

Л.В.Канторович
Г.П.Акилов

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1984

Канторович Л. В., Акилов Г. П. **Функциональный анализ.** — 3-е изд., перераб. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 752 с.

Настоящая книга представляет собой существенным образом переработанное переиздание книги «Функциональный анализ в нормированных пространствах», вышедшей в 1959 г. В переработанной редакции изложение базируется на общих функциональных пространствах (в связи с чем изменено название). Отражено дальнейшее развитие ряда вопросов, происшедшее за эти годы. При переработке в еще большей мере получили отражение применения функционального анализа. Помимо применений в вычислительной математике и математической физике, рассмотрены некоторые применения в проблемах математической экономики. Второе издание вышло в 1977 г.

В настоящее издание внесены некоторые улучшения и дополнения.

Для научных работников, студентов вузов и аспирантов.

Леонид Витальевич Канторович, Глеб Павлович Акилов

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редакторы: *Е. Ю. Хован, А. И. Штерн*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева.*

Корректор *Л. С. Сомова*

ИБ № 12429

Сдано в набор 03.01.84. Подписано к печати 24.09.84. Формат 60×90 $\frac{1}{4}$. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 47. Усл. кр.-отт. 47. Уч.-изд. л. 47,73. Тираж 14 000 экз. Заказ № 21. Цена 8 р. 20 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск 71, Станиславского, 25

К 1702050000 — 163
053(02) — 84 14 — 84

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1977;
с изменениями 1984 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	7
Предисловие ко второму изданию	8
Из предисловия к первому изданию	10

ЧАСТЬ I

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

Глава I. Топологические и метрические пространства	13
§ 1. Общие сведения о множествах. Упорядоченные множества	13
§ 2. Топологические пространства	17
§ 3. Метрические пространства	30
§ 4. Полнота и сепарабельность. Множества первой и второй категории	34
§ 5. Компактность в метрических пространствах	42
§ 6. Пространства с мерой	50
Глава II. Векторные пространства	70
§ 1. Основные определения	70
§ 2. Линейные операторы и функционалы	75
§ 3. Выпуклые множества и полунормы	79
§ 4. Теорема Хаана — Банаха	82
Глава III. Топологические векторные пространства	88
§ 1. Общие определения	88
§ 2. Локально выпуклые пространства	100
§ 3. Двойственность	109
Глава IV. Нормированные пространства	119
§ 1. Основные определения и простейшие свойства нормированных пространств	119
§ 2. Вспомогательные неравенства	130
§ 3. Нормированные пространства измеримых функций и последовательностей	134
§ 4. Другие нормированные пространства функций	153
§ 5. Гильбертово пространство	157

Глава V. Линейные операторы и функционалы	174
§ 1. Пространство операторов и сопряженное пространство	174
§ 2. Некоторые функционалы и операторы в конкретных пространствах	177
§ 3. Линейные функционалы и операторы в гильбертовом пространстве	191
§ 4. Кольцо операторов	199
§ 5. Метод последовательных приближений	208
§ 6. Кольцо операторов в гильбертовом пространстве	220
§ 7. Слабая топология и рефлексивные пространства	231
§ 8. Распространение линейных операторов	238
Глава VI. Аналитическое представление функционалов	245
§ 1. Интегральное представление функционалов на пространствах измеримых функций	245
§ 2. Пространства $L^p(T, \Sigma, \mu)$	252
§ 3. Общая форма линейного функционала в пространстве $C(K)$	257
Глава VII. Последовательности линейных операторов	264
§ 1. Основные теоремы	264
§ 2. Некоторые приложения к теории функций	268
Глава VIII. Слабая топология в банаховом пространстве	281
§ 1. Слабо ограниченные множества	281
§ 2. Теория Эберлейна — Шмульяна	283
§ 3. Слабая сходимость в конкретных пространствах	287
§ 4. Задача перемещения массы и порождаемое ею нормированное пространство	294
Глава IX. Компактные и сопряженные операторы	312
§ 1. Компактные множества в нормированных пространствах	312
§ 2. Компактные операторы	320
§ 3. Сопряженные операторы	323
§ 4. Компактные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	329
§ 5. Интегральное представление самосопряженного оператора	337
Глава X. Упорядоченные нормированные пространства	358
§ 1. Векторные решетки	359
§ 2. Линейные операторы и функционалы	366
§ 3. Нормированные решетки	377
§ 4. KB -пространства	382
§ 5. Выпуклые множества, замкнутые относительно сходимости по мере	392

Глава XI. Интегральные операторы	399
§ 1. Интегральное представление операторов	399
§ 2. Операторы в пространствах последовательностей	416
§ 3. Интегральные операторы в пространствах функций	423
§ 4. Теоремы вложения Соболева	435

ЧАСТЬ II

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава XII. Сопряженное уравнение	457
§ 1. Теоремы об обратном операторе	457
§ 2. Связь между данным и сопряженным уравнением	464
Глава XIII. Функциональные уравнения второго рода	473
§ 1. Уравнения с компактным ядром	473
§ 2. О комплексных нормированных пространствах	482
§ 3. Спектр	487
§ 4. Резольвента	492
§ 5. Альтернатива Фредгольма	506
§ 6. Применение к интегральным уравнениям	512
§ 7. Инвариантные подпространства компактного оператора. Проблема аппроксимации	517
Глава XIV. Общая теория приближенных методов	522
§ 1. Общая теория для уравнений второго рода	523
§ 2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям второго рода	536
§ 3. Применение к бесконечным системам уравнений	540
§ 4. Применение к интегральным уравнениям	543
§ 5. Применение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	553
§ 6. Применение к граничным задачам для уравнений эллиптического типа	566
Глава XV. Метод наискорейшего спуска	572
§ 1. Решение линейных уравнений	572
§ 2. Нахождение собственных значений компактных операторов	580
§ 3. Применение к эллиптическим дифференциальным уравнениям	585
§ 4. Минимизация дифференцируемых выпуклых функционалов	593
§ 5. Минимизация выпуклых функционалов в конечномерных пространствах	603
Глава XVI. Принцип неподвижной точки	609
§ 1. Принцип Каччопполи — Банаха	609
§ 2. Теорема Брауэра	613
§ 3. Принцип Шаудера	623

§ 4. Применения принципа неподвижной точки	628
§ 5. Теорема Какутани	637
Глава XVII. Дифференцирование нелинейных операторов	646
§ 1. Первая производная	646
§ 2. Вторая производная и билинейные операторы	655
§ 3. Примеры	662
§ 4. Теорема о неявной функции	669
Глава XVIII. Метод Ньютона	679
§ 1. Уравнения вида $P(x) = 0$	679
§ 2. Следствия из теоремы о сходимости метода Ньютона	693
§ 3. Применение метода Ньютона к конкретным функциональным уравнениям	702
§ 4. Метод Ньютона в решеточно-нормированных пространствах	727
Монографии по функциональному анализу и смежным вопросам	732
Используемая литература	737
Предметный указатель	746
Указатель обозначений	751
Указатель сокращений	752

*Посвящается памяти наших дорогих учителей:
Григория Михайловича Фихтенгольца
и Владимира Ивановича Смирнова*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В этом издании мы ограничились минимальными изменениями предыдущего издания. Точнее говоря, речь идет о новом тексте §§ 2, 3 главы XVI о так называемом принципе неподвижной точки Шаудера. По-прежнему доказана лежащая в основе упомянутого принципа теорема Брауэра: с использованием, по существу, редуцированного на рассматриваемую ситуацию понятия степени отображения. Оригинальный подход к этому понятию разработал недавно новосибирский математик В. В. Иванов, который любезно предоставил в наше распоряжение необходимые материалы. Он же обратил наше внимание на возможность более совершенного изложения этого вопроса.

В той же главе включена дополнительно теорема Эрроу — Дебре.

Некоторые дополнения внесены в главу X и указаны применения упорядоченных пространств в теории экономических моделей. В этом нам оказали помощь А. М. Рубинов и А. В. Бухвалов.

В главе XI существенно изменено изложение § 4 — доказательства теорем вложения С. Л. Соболева. В этом мы опирались на помощь В. П. Ильина и Ю. Г. Решетняка.

Наконец, в главе XVIII добавлено применение теорем о методе Ньютона в задаче конформного отображения. В этом участвовали Б. А. Вертгейм и Д. А. Мильман.

Всем названным лицам выражаем нашу признательность за оказанное содействие в подготовке данного издания.

Л. В. Канторович, Г. П. Акилов

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Со времени выхода в свет первого издания настоящей книги под названием «Функциональный анализ в нормированных пространствах» прошло двадцать лет. За это время произошли коренные изменения как в положении математики в системе современных научных представлений, так и внутри самой математики. Прежде всего эти перемены коснулись места функционального анализа среди математических дисциплин. Если при выходе в свет первого издания книги функциональный анализ воспринимался как сравнительно новая и перспективная часть анализа, то в настоящее время термины «функциональный анализ» и «математический анализ» стали практически равнообъемными. Более того, сейчас функциональный анализ является единым языком всей непрерывной математики. Ни одно серьезное исследование по теории функций, по дифференциальным уравнениям и математической физике, по численным методам, по математической экономике и теории управления и в других областях не обходится и не может обойтись без широкого использования языка и результатов функционального анализа. Именно этим объясняются, с одной стороны, бурное развитие функционального анализа как математической науки и, с другой стороны, та все возрастающая роль, которую функционально-аналитические методы играют в приложениях.

Авторы с гордостью и беспокойством осознают произошедшие перемены. Гордость — это естественное проявление чувства сопричастности важным историческим событиям. Беспокойство же вызывает судьба представляемой читателю книги — ведь сейчас уже невозможен универсальный (пусть даже вводный) учебник функционального анализа. Поэтому при подготовке настоящего издания, хотя оно и подверглось значительной переработке, мы сочли целесообразным сохранить общий замысел и, в основном, отбор и расположение материала, принятые в первом издании. Однако в ряде вопросов, в частности в теории топологических векторных пространств и в теории интегральных операторов, изложение существенным образом изменено. Если прежде основное изложение опиралось на теорию нормированных пространств, а топологические векторные пространства излагались, хотя и довольно развернуто, но как факультативный материал, то в настоящее время, в соответствии с логикой раз-

вития функционального анализа, топологические векторные пространства были взяты за основу изложения, с чем связано и изменение названия книги. Добавлена глава, посвященная основам теории полуупорядоченных пространств. Построение теории интегральных операторов и их представлений проводится на базе идеальных пространств измеримых функций.

По-прежнему наибольшее место уделено применениям функционального анализа в прикладном анализе, что составляло характерную особенность и первого издания данной книги. Наличие этих разделов в данной книге стимулировало разработку соответствующих вопросов у нас и за рубежом. Изложение их в настоящем издании в некоторой мере дополнено и модернизировано. Существенной особенностью данного издания является то, что в книгу включены также некоторые вопросы функционального анализа, связанные с его приложениями в математической экономике и теории управления, хотя это и не удалось сделать достаточно полно. Часть менее актуального материала исключена. Существенно изменена библиография.

Глава I носит вводный характер. В ней излагаются основы теории топологических и метрических пространств и абстрактных пространств с мерой. При этом многие результаты приводятся без доказательства. Предполагается, что читатель знаком с элементами теории функций вещественной переменной и топологии n -мерного евклидова пространства примерно в объеме общего университетского курса математического анализа. Более специальные и тонкие вопросы теории и применений выделены мелким шрифтом и могут быть опущены при первом чтении. Читатель, специально интересующийся применениями функционального анализа, может также опустить ряд других более абстрактных разделов, относящихся к топологическим и топологическим векторным пространствам, либо, если он уже знаком с основами теории нормированных пространств, непосредственно обратиться к чтению соответствующих прикладных глав.

В работе по подготовке данного издания большую помощь авторам оказал ряд лиц. Прежде всего следует назвать А. В. Бухвалова, которому, помимо редактирования всего текста книги, принадлежит написанная им заново глава X об упорядоченных нормированных пространствах и примыкающие к ней § 3 главы IV, § 1 главы VI, § 1 главы XI и некоторые другие параграфы. Им существенно переработано также изложение в главах I—IV; таким образом, в части книги он выступает фактически в роли соавтора.

В. Ф. Демьяновым и А. М. Рубиновым внесены некоторые коррективы в изложение главы XV о методе наискорейшего спуска и добавлены новые §§ 4 и 5. И. К. Даугаветом сделаны существенные дополнения и коррективы в главы XIV, XV и XVIII. Значительные улучшения в изложении §§ 3 и 4 главы XI

внесены В. П. Ильиным, в частности, в доказательство леммы 2 и теоремы 1 § 4 главы XI. Вновь написал Г. Ш. Рубинштейном § 4 главы VIII на основании работ Л. В. Канторовича и Г. Ш. Рубинштейна; некоторые дополнения к § 4 сделаны В. Л. Левиным. Ценные замечания были сделаны рецензентом книги проф. Б. З. Вулихом, а также Ю. А. Абрамовичем, А. М. Вершиком, С. В. Кисляковым, С. С. Кутателадзе, Г. Я. Лозановским, А. А. Меклером, Б. Т. Поляком и В. П. Хавиным.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность всем вышеизванным лицам, а также тем, кто оказал помощь при просмотре рукописи и корректуры.

Библиография состоит из двух частей — списка монографий по функциональному анализу и смежным вопросам и списка использованной литературы, состоящего в основном из журнальных статей. Ссылка Вулих — II означает ссылку на монографию Б. З. Вулиха, идущую за помером II под его фамилией в списке монографий, а ссылка Левин [3] означает ссылку на статью В. Л. Левина, но уже в списке использованной литературы. Библиография не претендует на полноту. В случае, когда результат уже нашел отражение в монографической литературе, мы, как правило, предпочитали делать ссылку на книгу, а не на оригинальную статью.

Книга состоит из восемнадцати глав, разделенных на параграфы, которые, в свою очередь делятся на пункты, занумерованные двойным индексом; первая его часть представляет помер параграфа, в котором содержится данный пункт, вторая — порядковый номер пункта в данном параграфе. При ссылках указывается также номер главы, в котором этот пункт находится; например, XI.4.2 означает ссылку на п. 2, § 4, гл. XI. При ссылках внутри параграфа помер главы опускается. Для теорем принята сквозная нумерация внутри каждого параграфа. Например, теорема XIV.3.2 означает теорему 2, § 3, гл. XIV. При ссылке внутри параграфа номера главы и параграфа не указываются.

Л. В. Канторович, Г. П. Акилов

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Функциональный анализ — сравнительно недавно возникшая научная дисциплина. Как самостоятельная ветвь математического анализа он оформился лишь за последние двадцать — тридцать лет, что не помешало ему, однако, занять одно из центральных мест в современной математике.

Функциональный анализ — наиболее яркое проявление коренного поворота в математике, совершающегося в настоящее вре-

мя и по своему принципиальному значению сравнимого с тем, который произошел в ней, когда в математику вошла переменная величина (XVII век), что привело к открытию дифференциального и интегрального исчисления.

Поворот этот прежде всего выразился в изменении подхода к исследованию различных проблем математического анализа. Рассмотрение отдельных функций и связывающих их соотношений и уравнений заменено совокупным исследованием этих объектов, т. е. изучением функциональных пространств и их преобразований (функциональных операций). Так, дифференциальный оператор или интегральное преобразование рассматриваются не в применении к отдельной функции, а к целому классу функций — изучается результат преобразования этого класса функций, непрерывность операции в том или ином смысле и т. п.

Важной особенностью функционального анализа является также общая абстрактная форма рассмотрения проблем анализа, позволяющая объединять и подвергать одновременному исследованию далекие на первый взгляд вопросы. Так, например, изучение функциональных уравнений $F(x) = y$, где x и y — объекты из более или менее произвольных областей, позволяет объединить рассмотрение таких различных проблем, как решение дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, граничных задач, бесконечных систем алгебраических уравнений или проблемы моментов. Переход от отдельных функций к пространствам функций, хотя он иногда формально даже трудно уловим, столь же принципиально важен, как в свое время переход от алгебраических уравнений и соотношений к переменным величинам и функциональной зависимости.

Эта новая точка зрения возникла не из простого стремления к обобщению. Потребность перехода на новую ступень абстракции была вызвана естественно возникавшими в процессе развития анализа новыми задачами. Полнота системы функций, разрешимость граничных задач в определенном классе функций, одновременное рассмотрение целого класса задач, например, при исследовании зависимости решения граничной задачи от правой части уравнения или граничных условий, представляют примеры такого рода вопросов. И именно для постановки и исследования таких задач методы функционального анализа оказались особенно плодотворными. При этом замечательно, что во многих случаях общность рассмотрения и позволяла обнаружить более общие и в то же время более конкретные и глубокие закономерности и связи, так как не имеющие значения детали каждой отдельной задачи отбрасываются и не заслоняют уже существа дела. Поэтому же становится яснее и родство различных по форме и происхождению вопросов.

Создание функционального анализа было подготовлено исследованиями в ряде областей классического математического ана-

лиза: вариационном исчислении, интегральных уравнениях, теории ортогональных функций, чебышевской теории приближений, проблеме моментов, естественно требовавших применения нового метода. Отдельные вопросы функционального анализа и возникли в недрах этих областей, как, например, понятие функционала в вариационном исчислении. С другой стороны, развитие теоретико-множественных дисциплин: теории функций вещественной переменной, топологии, абстрактной алгебры, — подготовило аппарат для систематического проведения нового направления в абстрактной форме. В частности, весьма существенное значение для функционального анализа имела теория абстрактных пространств.

Моментом начала самостоятельного существования функционального анализа можно считать систематическое построение теории операторов в бесконечномерных унитарных пространствах (Д. Гильберта и др.) и развитие общей теории линейных нормированных пространств (1918—1923) в работах венгерского математика Ф. Рисса и, в особенности, польского математика С. Банаха.

Интерес к функциональному анализу еще более возрос, когда выяснилось, что его аппарат (теория операторов в гильбертовом пространстве и др.) находит существенное применение в квантовой механике. За последние двадцать лет, в особенности в работах советских математиков, были созданы новые направления в функциональном анализе; его методы и результаты получили важнейшее применение в теоретической физике, математической физике, прикладном анализе и в других областях математики.

Предлагаемая книга не ставит своей задачей охватить все направления функционального анализа и области его применения. Она посвящена, в основном, теории нормированных пространств и охватывает важнейшие факты этой теории, основы которой были даны Ф. Риссом и С. Банахом, с учетом некоторых последующих работ. В книге рассмотрены теория нормированных пространств, теория операторов и теория функциональных уравнений. Наряду с линейными операторами и уравнениями значительное место занимают нелинейные операторы и уравнения. Помимо общей теории, большое внимание в книге уделено конкретным функциональным пространствам и операторам. В частности, рассматриваются введенные С. Л. Соболевым пространства дифференцируемых функций многих переменных. Эти вопросы связываются с общим изучением интегральных операторов.

В основу данной книги положен курс лекций, читаемых в Ленинградском университете для студентов, специализирующихся по математическому анализу и по вычислительной математике.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

Г л а в а I

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В математике важнейшую роль играет понятие пространства, т. е. множества, между элементами которого аксиоматически заданы некоторые соотношения. В этом случае говорят, что на множестве задана структура соответствующего пространства. Основным предметом рассмотрений этой главы будут топологические и метрические пространства — множества, для элементов которых определено понятие близости. Топологические пространства были введены в 1910-х годах Хаусдорфом (см. Хаусдорф), метрические — несколько ранее Фреше [1].

§ 1. Общие сведения о множествах. Упорядоченные множества

1.1. В этом пункте мы напомним некоторые начальные понятия общей теории множеств и связанные с ними обозначения*). При этом мы будем придерживаться неформальной точки зрения, считая понятие *множества*, или *совокупности*, интуитивно ясным и не нуждающимся в точном определении. Рассматривая некоторое множество, мы указываем его элементами те объекты, из которых оно составлено.

Через N обозначаем множество всех натуральных чисел, через R — вещественных чисел, через C — комплексных чисел.

Пусть A, B — множества. Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A ; $a \notin A$ — что объект a не принадлежит A . Мы будем говорить, что множество A есть *подмножество* множества B , и писать $A \subset B$ (или $B \supset A$), если каждый элемент множества A входит и в множество B . Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то называем A и B *равными* и пишем $A = B$. *Пустое множество* (т. е. множество, не содержащее ни одного элемента) обозначается символом $\emptyset$. Если (P) — некоторое утверждение, применимое к элементам множества A , то подмножество, обра-

*) Основы общей теории множеств были заложены немецким математиком Г. Кантором во второй половине XIX в.

зовавшее всеми $a \in A$, для которых выполнено (P) , обозначается $\{a \in A: (P)a\}$ или короче — $\{a: (P)a\}$.

Пусть A, B — множества. Если каждому элементу $a \in A$ по определенному правилу сопоставлен единственный элемент $f(a) \in B$, то говорят, что задано *отображение* f множества A в множество B , и пишут $f: A \rightarrow B$. Для любого $X \subset A$ определяется его *образ* $f(X) = \{b \in B: \text{существует } a \in X \text{ такое, что } b = f(a)\}$. Для любого множества $Y \subset B$ определяется его *полный прообраз* $f^{-1}(Y) = \{a \in A: f(a) \in Y\}$. Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *взаимно однозначным*, если $f(a_1) = f(a_2)$ влечет $a_1 = a_2$. Оно называется *отображением* A на B , если $f(A) = B$. Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *биекцией*, если оно взаимно однозначно и является отображением «на». Если f — биекция, то отображение $g: B \rightarrow A$, определяемое соотношением $g(f(a)) = a$ ($a \in A$), называется *обратным отображением* к f и обозначается f^{-1} .

Приведем теперь определения основных теоретико-множественных операций. Если каждому элементу α некоторого непустого множества A сопоставлено некоторое множество, то говорят, что задано *семейство множеств* $\{X_\alpha\}$ ($\alpha \in A$). *Объединением* семейства множеств $\{X_\alpha\}$ называется множество $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, состоящее

из всех объектов x таких, что $x \in X_\alpha$ хотя бы при одном $\alpha \in A$. *Пересечением* семейства множеств $\{X_\alpha\}$ называется множество $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$, состоящее из всех объектов x таких, что $x \in X_\alpha$ при лю-

бом $\alpha \in A$. *Прямым произведением* семейства множеств $\{X_\alpha\}$ называется множество $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, являющееся совокупностью всех отображений $f: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, для которых $f(\alpha) \in X_\alpha$ для всех $\alpha \in A$.

Если A состоит из целых чисел $1, 2, \dots, n$, то для обозначения соответственно объединения, пересечения и прямого произведения пишут

$$\bigcup_{k=1}^n X_k = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n, \quad \bigcap_{k=1}^n X_k = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n.$$

$$\prod_{k=1}^n X_k = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n.$$

Отметим, что конечное произведение $\prod_{k=1}^n X_k$ мы можем отождествить с множеством всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_k \in X_k$.

Если A есть множество всех натуральных чисел N , то в тех же случаях пишут соответственно

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k, \quad \prod_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Два множества A и B называются *дизъюнктивными* (или *непересекающимися*), если $A \cap B = \emptyset$. Говорят, что множества X_α ($\alpha \in \Lambda$) *попарно дизъюнктивны*, если $X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} = \emptyset$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$. *Разбиением* множества T называется семейство попарно дизъюнктивных множеств $\{X_\alpha\}$ ($\alpha \in \Lambda$) такое, что $T = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

Разностью $A \setminus B$ называется подмножество множества A , состоящее из всех $a \in A$ таких, что $a \notin B$. При этом в определении $A \setminus B$ не требуется, чтобы $B \subset A$. Если же $B \subset A$, то множество $A \setminus B$ называется также *дополнением* к множеству B (относительно множества A). *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Если $A \subset X$, то *характеристическая функция* χ_A множества A определяется формулой

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

1.2. Множество X называется *упорядоченным* *), если для некоторых пар его элементов x и y определено *отношение порядка* $x \geq y$ (x больше или равно y), причем выполнены следующие условия:

- 1) $x \geq x$ для любого $x \in X$;
- 2) если $x \geq y$ и $y \geq z$, то $x \geq z$;
- 3) если $x \geq y$ и $y \geq x$, то $x = y$.

Запись $x \leq y$ означает, что $y \geq x$; $x > y$ означает, что $x \geq y$ и $x \neq y$; $x \geq y$, z означает, что $x \geq y$ и $x \geq z$.

Примером упорядоченного множества, в котором любые два элемента связаны отношением $\leq$ (сравнимы), служит множество вещественных чисел $\mathbb{R}$. Примером упорядоченного множества, содержащего и несравнимые элементы, служит, например, множество всех подмножеств натурального ряда $\mathbb{N}$, упорядоченное по включению (т. е. $A \geq B \Leftrightarrow A \supset B$) **).

Пусть X — упорядоченное множество. Подмножество $A \subset X$ называется *ограниченным сверху*, если существует такой $x \in X$, что $a \leq x$ для любого $a \in A$; x называется *верхней границей* для A . Аналогично определяются *ограниченность снизу* и *нижняя граница*. Подмножество $A \subset X$ называется (*порядково*) *ограниченным*, если оно одновременно ограничено и сверху и снизу.

*) Часто применяется термин *частично упорядоченное множество*, которым подчеркивается, что отношением «больше или равно» могут быть связаны не все пары элементов.

**) Знак $\Leftrightarrow$ означает «эквивалентно», а знак $\Rightarrow$ «следует», «влечет».

Если $A \subset X$, то элемент $x \in A$ называется: 1) *наибольшим* (в A), если $x \geq a$ для любого $a \in A$; 2) *максимальным* (в A), если из $x \leq a$ для $a \in A$ следует, что $x = a$. Отметим, что любой наибольший элемент будет и максимальным, но, вообще говоря, не наоборот. Аналогично определяются *наименьший* и *минимальный* элементы.

Если A — ограниченное сверху подмножество X , то его наименьшая верхняя граница (если таковая существует) называется *супремумом* (или *верхней гранью*) множества A и обозначается $\sup A$. Если A — ограниченное снизу подмножество X , то его наибольшая нижняя граница (если таковая существует) называется *инфимумом* (или *нижней гранью*) множества A и обозначается $\inf A$. Если элементы множества A снабжены какими-нибудь индексами, $A = \{x_\beta\}$ ($\beta \in B$), то вместо $\sup A$ и $\inf A$ пишут соответственно

$$\sup_{\beta \in B} x_\beta \text{ или } \sup x_\beta \text{ и } \inf_{\beta \in B} x_\beta \text{ или } \inf x_\beta.$$

Если множество A состоит из конечного числа элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$, то вместо $\sup A$ и $\inf A$ пишут соответственно $\bigvee_{k=1}^n x_k$ или $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ и $\bigwedge_{k=1}^n x_k$ или $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$.

Отметим, что во втором из примеров, приведенных в начале этого пункта, супремум, очевидно, есть объединение множеств, а инфимум — пересечение.

Упорядоченное множество X называется *совершенно упорядоченным* (*линейно упорядоченным*, *цепью*), если для любых элементов x и y из X имеем $x \geq y$ или $x \leq y$, т. е. все элементы сравнимы между собой.

В различных вопросах бывает полезно следующее предложение, эквивалентное аксиоме выбора и принципу трансфинитной индукции, доказательство которого можно найти, например, в монографиях Данфорд, Шварц-I (теорема I.2.7); Келли.

Лемма Цорна. Если каждое совершенно упорядоченное подмножество упорядоченного множества X ограничено сверху, то в X существует максимальный элемент.

Для исследования топологических, а далее топологических векторных пространств нам будет важно понятие направления. Пусть X — произвольное множество, A — упорядоченное множество, *направленное по возрастанию*, т. е. такое множество, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ найдется такое $\alpha \in A$, что $\alpha \geq \alpha_1$ и $\alpha \geq \alpha_2$. Отображение $\alpha \rightarrow x_\alpha$ множества A в X называется *направлением* (другие термины — *сеть*, *обобщенная последовательность*) и обозначается $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) или просто $\{x_\alpha\}$. Если $A = \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел с обычным упорядочением, то $\{x_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) — это обычная последовательность. Далее для обозначения произвольного направления мы будем в качестве ип-

дексов использовать греческие буквы — $\{x_\alpha\}$, $\{x_\beta\}$, $\{x_\gamma\}$, а для обозначения последовательностей — латинские — $\{x_n\}$, $\{x_m\}$, $\{x_k\}$.

Нетривиальным примером направления является множество всех конечных подмножеств в N , упорядоченное по включению.

Понятие подпоследовательности обобщается на направления следующим образом. Направление $\{y_\beta\}$ ($\beta \in B$) называется *поднаправлением* направления $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$), если для любого $\alpha \in A$ существует такой индекс $\beta(\alpha) \in B$, что для любого $\beta' \in B$, удовлетворяющего неравенству $\beta' \geq \beta(\alpha)$, найдется $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \alpha$, удовлетворяющий равенству $x_{\alpha'} = y_{\beta'}$. Отметим, что последовательность всегда обладает поднаправлениями, которые сами последовательностями не являются.

С различными примерами упорядоченных множеств мы встретимся уже в этой главе. Более подробно с изложенным в этом параграфе материалом можно ознакомиться в монографиях Бурбаки — I, Келли; элементарное введение содержится в учебниках Вулих — III; Колмогоров, Фомин; Натансон — II. Подробное исследование различных классов упорядоченных множеств см. Биркгоф.

§ 2. Топологические пространства.

2.1. Превращение множества в топологическое пространство может производиться различными способами. Один из наиболее принятых и удобных заключается в указании совокупности открытых множеств данного пространства.

Множество X называется *топологическим пространством*, если в нем выделена система $\mathcal{G}$ подмножеств, называемых *открытыми*, которая удовлетворяет следующим трем условиям (аксиомам топологического пространства):

- 1) пустое множество $\emptyset$ и все множество X входят в $\mathcal{G}$;
- 2) если $G_\xi \in \mathcal{G}$ ($\xi \in \Xi$), то $\bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi \in \mathcal{G}$, т. е. объединение любого числа открытых множеств открыто;
- 3) если $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, то $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$, т. е. пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Если множество X превращается в топологическое пространство, то говорят, что в X *введена топология*.

Два топологических пространства X_1 и X_2 называются *гомеоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором открытые множества в X_1 и X_2 соответствуют друг другу. С точки зрения теории топологических пространств гомеоморфные пространства могут быть, очевидно, отождествлены.

Пусть в множестве X двумя, вообще говоря, различными способами введена топология, в результате чего образовались два топологических пространства X_1 и X_2 (совпадающих по со-

ставу элементов). Обозначим через $\mathcal{G}_1$, соответственно через $\mathcal{G}_2$, систему открытых множеств пространства X_1 , соответственно X_2 . Говорят, что топология в X_1 *сильнее* топологии в X_2 (или топология в X_2 *слабее* топологии в X_1), если $\mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2$. При этом пишут $\tau(X_1) \geq \tau(X_2)$ (или $\tau(X_2) \leq \tau(X_1)$).

Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{G}$ — система открытых множеств в нем. Пусть, далее, $X_0 \subset X$ — произвольное множество. Система $\mathcal{G}$, состоящая из множеств вида $G \cap X_0$ ($G \in \mathcal{G}$), как легко проверить, удовлетворяет аксиомам топологического пространства (по отношению к множеству X_0), вследствие чего X_0 обращается в топологическое пространство. Говорят, что топология в X_0 индуцирована топологией в X , а X_0 является *подпространством* топологического пространства X .

2.2. Множество F в топологическом пространстве X называется *замкнутым*, если множество $G = X \setminus F$ открыто. Система $\mathfrak{F}$ всех замкнутых множеств пространства X обладает свойствами:

1) $\emptyset, X \in \mathfrak{F}$;

2) если $F_\xi \in \mathfrak{F}$ ($\xi \in \Xi$), то $\bigcap_{\xi \in \Xi} F_\xi \in \mathfrak{F}$, т. е. пересечение любого

числа замкнутых множеств замкнуто;

3) если $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, то $F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$, т. е. объединение конечно-числа замкнутых множеств замкнуто.

Поскольку система $\mathfrak{F}$ однозначно определяет систему $\mathcal{G}$ открытых множеств, можно топологию в X вводить, задавая первоначально систему $\mathfrak{F}$, удовлетворяющую указанным трем условиям, и называя множества из $\mathfrak{F}$ замкнутыми. Открытые множества определяются при этом как дополнения замкнутых.

Если $X_0 \subset X$ — замкнутое множество, то, вводя в X_0 топологию, индуцированную топологией в X , мы получим, что система $\mathfrak{F}_0$ замкнутых множеств пространства X_0 состоит из замкнутых в X множеств, которые целиком содержатся в X_0 .

2.3. Пусть X — топологическое пространство. Точка $x \in X$ называется *внутренней* точкой множества $E \subset X$, если существует открытое множество G в X такое, что $x \in G \subset E$. *Окрестностью* точки $x \in X$ называется любое множество $V \subset X$, для которого точка x внутренняя. Система $\mathfrak{B}_x$ окрестностей точки x называется *фундаментальной*, или *базисом окрестностей* точки x , если для любой окрестности V точки x найдется окрестность $V_x \in \mathfrak{B}_x$ такая, что $V_x \subset V$. Совокупность $\mathfrak{B}$ базисов $\mathfrak{B}_x$ во всевозможных точках пространства называется *базисом пространства*. Базис пространства обладает следующими свойствами:

1) если $V \in \mathfrak{B}_x$, то $x \in V$,

2) если $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}_x$, то существует $V \in \mathfrak{B}_x$ такая, что $V \subset V_1 \cap V_2$,

3) какова бы ни была окрестность $V_x \in \mathfrak{B}_x$, существует $V'_x \in \mathfrak{B}_x$ такая, что $V'_x \subset V_x$, причем для любого $y \in V'_x$ найдется $V_y \in \mathfrak{B}_y$ такая, что $V_y \subset V_x$.

Поясним последнее свойство. Так как V_x — окрестность точки x , то существует открытое множество $G \subset V_x$, содержащее точку x . Множество G является окрестностью точки x , и потому существует $V'_x \in \mathfrak{B}_x$ такая, что $V'_x \subset G$ и тем более $V'_x \subset V_x$. Если $y \in V'_x$, то $y \in G$ и множество G , будучи открытым, является окрестностью точки y , вследствие чего найдется $V_y \subset G$ ($V_y \in \mathfrak{B}_y$). Подавно будет $V_y \subset V_x$.

Свойства 1)–3) характеризуют базис пространства.

Теорема 1. Пусть с каждой точкой x некоторого множества X связана система $\mathfrak{B}_x$ подмножеств множества X , причем удовлетворены условия 1)–3). Множество $G \subset X$ назовем открытым, если для любого $x \in G$ существует $V \subset G$ ($V \in \mathfrak{B}_x$). Тогда система открытых множеств удовлетворяет аксиомам топологического пространства и в полученном таким образом топологическом пространстве каждая система $\mathfrak{B}_x$ является базисом окрестностей точки x .

Доказательство. Выполнение аксиом топологического пространства очевидным образом вытекает из условий 1)–2). Проверим, что при любом $x \in X$ система $\mathfrak{B}_x$ является фундаментальной системой окрестностей точки x . Пусть $V \in \mathfrak{B}_x$. Образует множество G , состоящее из всех таких точек $y \in V$, для которых существует $V_y \subset V$ ($V_y \in \mathfrak{B}_y$). Докажем, что G — открытое множество. Возьмем произвольную точку $z \in G$. Существует множество $V_z \in \mathfrak{B}_z$ такое, что $V_z \subset V$. По условию 3) найдется $V'_z \in \mathfrak{B}_z$ такое, что $V'_z \subset V_z$ и для любого $y \in V'_z$ существует $V_y \subset V_z$ ($V_y \in \mathfrak{B}_y$). Это означает, что $y \in G$ и $V'_z \subset G$, т. е. G — открытое множество и V , таким образом, является окрестностью точки x . Осталось проверить, что $\mathfrak{B}_x$ будет фундаментальной системой окрестностей. Пусть U — произвольная окрестность точки x . Существует открытое множество $G \subset U$, содержащее точку x . Следовательно, по определению найдется $V_x \in \mathfrak{B}_x$ такое, что $V_x \subset G$ и тем более $V_x \subset U$.

Доказанная теорема позволяет вводить топологию посредством указания фундаментальных систем окрестностей для каждой точки пространства. Этот способ введения топологии оказывается, как правило, самым удобным, так как обычно в качестве окрестностей можно выбрать множества, имеющие сравнительно простую структуру. Например, топология евклидова пространства задается при помощи множества всевозможных шаров (которое, как легко проверить, образует базис). Охарактеризуем в терминах базиса основные понятия, введенные в топологическом пространстве.

Пусть в множестве X указаны два базиса *): $\{\mathfrak{B}_x\}$ ($x \in X$) и $\{\mathfrak{C}_x\}$ ($x \in X$). Каждый из них на основании теоремы 1 определяет

*) Под базисом в множестве X в дальнейшем понимается совокупность множеств, удовлетворяющая условиям 1) — 3).

в X топологию. Топологическое пространство, построенное по первому базису, обозначим через X_1 , по второму базису — через X_2 .

Для того чтобы топология в X_1 была слабее топологии в X_2 , необходимо и достаточно, чтобы для любых $x \in X$ и $V \in \mathfrak{B}_2$ нашлась окрестность $U \in \mathfrak{U}_x$, содержащаяся в V .

Несложное доказательство этого факта предоставляем читателю.

Из сформулированного предложения следует, что два базиса определяют одну и ту же топологию в том и только том случае, когда кроме указанного условия выполнено еще ему симметричное: для любых $x \in X$ и $U \in \mathfrak{U}_x$ найдется $V \in \mathfrak{B}_x$, содержащаяся в U . В этом случае базисы называются *эквивалентными*.

Если X_0 — множество в топологическом пространстве X с заданным базисом $\{\mathfrak{B}_x\}$ ($x \in X$), то индуцированную топологию в X_0 можно определить, исходя из базиса $\{\mathfrak{B}_x^{(0)}\}$ ($x \in X_0$), где $\mathfrak{B}_x^{(0)}$ состоит из всех множеств вида $V \cap X_0$ ($V \in \mathfrak{B}_x$). Мы и здесь предоставляем читателю доказательство того, что построенная совокупность $\{\mathfrak{B}_x^{(0)}\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и что топология, определенная этим базисом, совпадает с индуцированной.

2.4. Прежде чем указывать условия замкнутости множества в терминах окрестностей, введем еще одно важное понятие. Точка x топологического пространства X называется *точкой прикосновения* множества $E \subset X$, если, какую бы окрестность V точки x мы ни взяли, пересечение $V \cap E$ непусто. Если, кроме того, это пересечение никогда не сводится к одной точке x , то x называется *предельной точкой* множества E (или *точкой сгущения*; применяется также термин *точка накопления*).

В определении точки прикосновения (соответственно предельной точки) можно учитывать не все окрестности точки x , а только окрестности, входящие в некоторую фундаментальную систему окрестностей этой точки.

Множество всех точек прикосновения данного множества E называется *замыканием* множества E и обозначается символом $\bar{E}$. Без труда устанавливаются следующие свойства замыкания:

- 1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$;
- 2) $E \subset \bar{E}$;
- 3) если $E_1 \subset E_2$, то $\bar{E}_1 \subset \bar{E}_2$;
- 4) $\overline{E_1 \cup E_2} = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$;
- 5) $\bar{\bar{E}} = \bar{E}$.

Проверим два последних, менее очевидных свойства. Пусть $E = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$. Так как $E_i \subset E$, то $\bar{E}_i \subset \bar{E}$ ($i = 1, 2$), откуда $\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2 \subset \bar{E}$. Обратно, если $x \in \bar{E}$, то, предполагая, что $x \notin \bar{E}_1$, найдем окрестность V_0 точки x такую, что $V_0 \cap E_1 = \emptyset$. Пусть V — произвольная окрестность точки x . Можно считать, что $V \subset V_0$ (иначе

мы рассмотрим пересечение $V \cap V_0$). Так как $V \cap E \neq \emptyset$, то должно быть $V \cap E_2 \neq \emptyset$ и, следовательно, $x \in E_2 \subset E_1 \cup E_2$.

Проверяя последнее свойство, надо лишь установить, что $\overline{\overline{E}} \subset \overline{E}$. Пусть $x \in \overline{\overline{E}}$. Возьмем произвольную окрестность V точки x . Можно считать, что V — открытое множество и потому является окрестностью всех своих точек. Пересечение $V \cap \overline{E} \neq \emptyset$; пусть $y \in V \cap \overline{E}$. Так как $y \in \overline{E}$, а V является окрестностью точки y , то $V \cap E \neq \emptyset$, а это означает, что $x \in \overline{E}$.

Множество $F \subset X$ будет замкнутым тогда и только тогда, когда $\overline{F} = F$. Действительно, если $x \notin F = \overline{F}$, то существует окрестность V точки x , которая не пересекается с F . Это означает, что множество $G = X \setminus F$ открыто, а F , следовательно, замкнуто. Обратное предложение доказывается обращением приведенного рассуждения.

Отметим еще тот очевидный факт, что замыкание множества E получается присоединением к E всех предельных точек множества E , и, следовательно, замкнутое множество можно охарактеризовать как множество, содержащее все свои предельные точки.

Для $E \subset X$ через $\overset{\circ}{E}$ обозначается множество всех внутренних точек множества E , которое называется *внутренностью* E . Предоставляем читателю проверить, что $\overset{\circ}{E}$ является наибольшим открытым множеством из всех, содержащихся в E .

Пусть X — топологическое пространство. Множество $E \subset X$ называется *плотным* в множестве $X_0 \subset X$, если $\overline{E} \supset X_0$. Если $\overline{E} = X$, то E называется *всюду плотным*. Множество $E \subset X$ называется *нигде не плотным*, если внутренность его замыкания пуста (или, что равносильно, если $X \setminus \overline{E}$ всюду плотно). Множество $E \subset X$ называется *множеством первой категории*, если E можно представить в виде объединения счетного семейства нигде не плотных множеств. Множество $E \subset X$, не являющееся множеством первой категории, называется *множеством второй категории* (в X).

Топологическое пространство X называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество. Подробнее с этим понятием мы познакомимся дальше.

2.5. Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *непрерывным*, если прообраз каждого открытого множества открыт. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если прообраз произвольной окрестности точки $f(x)$ является окрестностью точки x (очевидно, что последнее определение не изменится, если вместо произвольной окрестности точки $f(x)$ брать окрестности из некоторого базиса окрестностей точки $f(x)$). В следующей теореме приводятся различные условия, эквивалентные непрерывности.

Теорема 2. Пусть X и Y — топологические пространства, f — отображение X в Y . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) отображение f непрерывно;
- 2) прообраз каждого замкнутого множества замкнут;
- 3) отображение f непрерывно в каждой точке $x \in X$;
- 4) для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U точки $f(x)$ существует окрестность V точки x такая, что $f(V) \subset U$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) эквивалентны в силу соотношения $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ для любого $B \subset Y$. Равносильность 3) и 4) очевидна. Так как из 1), очевидно, следует 3), то нам осталось доказать, что 3) влечет 1). Пусть G — открытое подмножество Y . Докажем, что $f^{-1}(G)$ открыто. Если $x \in f^{-1}(G)$, то найдется $y \in G$, удовлетворяющий $y = f(x)$. Так как G — окрестность точки y , то, по определению непрерывности в точке x , $f^{-1}(G)$ — окрестность точки x . Следовательно, точка x — внутренняя, и множество G открыто.

Пусть f — биекция X на Y . Если оба отображения f и f^{-1} непрерывны, то отображение f называется *гомеоморфизмом*. Ясно, что пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда их можно гомеоморфно отобразить друг на друга.

2.6. В дальнейшем нам часто будет удобно описывать топологию пространства и многие топологические понятия в терминах сходимости направлений (сходимость по Муру — Смуту).

Направление $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) элементов топологического пространства X называется *сходящимся к $x \in X$* , если для любой окрестности V точки x существует $\alpha_V \in A$ такое, что $x_\alpha \in V$ для $\alpha \geq \alpha_V$. Это обстоятельство обозначается так: $x_\alpha \rightarrow x$ или $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$ (в дальнейшем в этой записи множество индексов мы часто опускаем). Точка x называется *пределом* направления $\{x_\alpha\}$.

Укажем некоторые свойства сходящихся направлений.

Свойство 1. Если $x_\alpha \rightarrow x$ и $\{y_\beta\}$ ($\beta \in B$) — поднаправление в $\{x_\alpha\}$, то $y_\beta \rightarrow x$.

Свойство 2. Пусть $E \subset X$; для того чтобы $x \in \bar{E}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало направление $\{x_\alpha\}$ такое, что $x_\alpha \rightarrow x$ и $x_\alpha \in E$.

Действительно, если такое направление существует, то, какова бы ни была окрестность V точки x , пересечение $V \cap E \neq \emptyset$, так как оно содержит элементы данного направления. Поэтому $x \in \bar{E}$.

Предположим теперь, что $x \in \bar{E}$; $\mathfrak{B}_x$ — фундаментальная система окрестностей точки x . Для $U, V \in \mathfrak{B}_x$ будем считать $U \leq V$, если $U \supset V$. Ясно, что $\mathfrak{B}_x$ с таким упорядочением становится направлением. В пересечении $U \cap E$, которое непусто вследствие условия $x \in \bar{E}$, выберем точку x_U . Проделав это для каждого

$U \in \mathfrak{D}_x$, получим направление $\{x_\alpha\}$ ($U \in \mathfrak{D}_x$), сходящееся к точке x .

Из доказанного вытекает

Свойство 3. Для того чтобы множество $F \subset X$ было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы для любого направления $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) такого, что $x_\alpha \rightarrow x$ и $x_\alpha \in F$ ($\alpha \in A$), было $x \in F$.

Топологические пространства, удовлетворяющие лишь трем аксиомам топологического пространства, могут иметь самую замысловатую структуру, или, наоборот, топологическое их строение может оказаться настолько примитивным, что средствами топологии их изучать нельзя. Так, например, будет, если в пространстве имеются всего два открытых множества — пустое и все пространство.

В связи с этим обычно вводят еще те или иные дополнительные аксиомы, выделяющие более узкие классы топологических пространств, например, нижеследующую аксиому отделимости Хаусдорфа, которая гарантирует важнейшее свойство единственности предела направления.

Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым* (или *отделимым*), если для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдутся окрестность U точки x и окрестность V точки y такие, что $U \cap V = \emptyset$.

Свойство 4. Для того чтобы каждое сходящееся направление сходилась только к одному пределу, необходимо и достаточно, чтобы пространство X было хаусдорфовым.

Единственность предела при условии, что пространство X хаусдорфово, непосредственно вытекает из определения предела.

Докажем обратное. Пусть пространство X не хаусдорфово. Тогда существует пара различных точек $x, y \in X$ такая, что, какие бы окрестности U, V точек x и y соответственно ни взять, пересечение $U \cap V \neq \emptyset$. Обозначим через A совокупность пар (U, V) , где U — окрестность точки x , а V — точки y . Если $\alpha' = (U', V')$ и $\alpha'' = (U'', V'')$ — элементы из A , то будем считать $\alpha' \leq \alpha''$ в случае, когда одновременно $U' \supset U''$, $V' \supset V''$. Пусть $\alpha = (U, V) \in A$. Поскольку $U \cap V \neq \emptyset$, можно выбрать $x_\alpha \in U \cap V$. Тогда $x_\alpha \xrightarrow{A} x$ и вместе с тем $x_\alpha \xrightarrow{A} y$. Проверим, например, первое соотношение. Для любой окрестности U_0 точки x существует $x_\alpha \in U_0$. Можно считать, что $\alpha_0 = (U_0, V_0)$, где V_0 — некоторая окрестность точки y . Так как $\alpha = (U, V) \geq \alpha_0$ означает, в частности, $U \subset U_0$, то $x_\alpha \in U \subset U_0$, т. е. $x_\alpha \xrightarrow{A} x$.

Условие непрерывности отображения f топологического пространства X в топологическое пространство Y может быть с помощью понятия сходимости сформулировано так:

Свойство 5. Чтобы f было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ и любого направления $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) такого, что $x_\alpha \xrightarrow{A} x$, было $f(x_\alpha) \xrightarrow{A} f(x)$.

Докажем достаточность. Пусть $\Phi \subset Y$ — замкнутое множество и $F = f^{-1}(\Phi)$. Рассмотрим направление $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) элементов множества F , сходящееся к $x \in X$. Так как по условию $f(x_\alpha) \xrightarrow{A} f(x)$ и $f(x_\alpha) \in \Phi$ ($\alpha \in A$), то $f(x) \in \Phi$; следовательно, $x \in F$. Множество F , таким образом, замкнуто, а отображение f непрерывно.

Предположим, что f — непрерывное отображение. Возьмем произвольный $x \in X$ и направление $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$), сходящееся к x . Пусть U — окрестность точки $y = f(x)$. Существует окрестность V точки x такая, что $f(V) \subset U$. Далее, найдется $\alpha_v \in A$ так, что $x_\alpha \in V$ при $\alpha \geq \alpha_v$. Для этих же α имеем $f(x_\alpha) \in U$, откуда получаем $f(x_\alpha) \xrightarrow{A} f(x)$ *).

Свойство 6. Если пространство X таково, что каждая его точка обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, то в свойствах 2—5 можно вместо направлений говорить об обычных последовательностях.

Действительно, пусть $\mathfrak{B}_x = \{V_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) — базис окрестностей в точке x . Положим $U_n = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n$. Если направление $x_\alpha \xrightarrow{A} x$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем $\alpha_n \in A$ так, чтобы $y_n = x_{\alpha_n} \in U_n$. Тогда последовательность $y_n \rightarrow x$. С ее помощью из свойств 2—5 для направлений легко получаем аналогичные свойства для последовательностей.

Свойство 3 сходимости направлений позволяет вводить топологию, исходя из заранее заданной (априорной) сходимости. Именно, пусть в множестве X определена сходимость, т. е. выделен класс направлений, которые называются сходящимися, и для каждого такого направления указан ее предел (предположим для простоты — единственный). Будем, кроме того, считать, что сходимость обладает свойством 1. Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если F содержит предел любого сходящегося направления своих элементов. Нетрудно проверить, что система так определенных замкнутых множеств удовлетворяет условиям 1)–3) из 2.2, так что мы действительно имеем дело с топологическим пространством. Поскольку X стало топологическим пространством, в нем можно ввести сходимость так, как это делается в любом топологическом пространстве. Отметим, что априорная сходимость и топологическая сходимость, которую она порождает, вообще говоря, различны.

2.7. Одним из важнейших понятий общей топологии является понятие компактного пространства, введенное в начале 1920-х годов П. С. Александровым и П. С. Урысоном.

*) Если условие выполнено для данной точки x , то, как это следует из доказательства, отображение f непрерывно в этой точке.

Топологическое пространство X называется *компактным* (или *бикompактным*), если, каково бы ни было семейство $\{G_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) открытых множеств, образующих покрытие пространства X , т. е. такое, что

$$\bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi = X,$$

существует конечное число множеств $G_{\xi_1}, G_{\xi_2}, \dots, G_{\xi_n}$, также покрывающих пространство X .

Будем говорить, что семейство множеств $\{A_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) образует *центрированную систему* (или *центрировано*), если пересечение произвольного конечного числа любых множеств из этого семейства непусто.

Поскольку утверждение, что семейство множеств $\{G_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) образует покрытие пространства X , равносильно тому, что пересечение дополнений F_ξ множеств G_ξ пусто, то пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

Пусть $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — произвольное направление элементов топологического пространства X . Будем говорить, что направление $\{x_\alpha\}$ часто встречается с подмножеством $E \subset X$, если для любого $\alpha \in A$ найдется индекс $\alpha' \in A$ такой, что $\alpha' \geq \alpha$ и $x_{\alpha'} \in E$. Точка $x \in X$ называется *предельной точкой* направления $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$), если $\{x_\alpha\}$ часто встречается с каждой окрестностью точки x (не путать с предельными точками множества $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$). У направления может быть больше одной предельной точки, одна или ни одной. Например, последовательность $x_n = n$ ($n \in \mathbb{N}$) не имеет предельных точек в $\mathbb{R}$. С другой стороны, если мы произвольным образом занумеруем в последовательность все рациональные числа, то любое вещественное число будет предельной точкой этой последовательности. Если направление сходится к некоторой точке, то она является его предельной точкой (в случае хаусдорфова пространства — единственной).

Лемма 1. Точка x топологического пространства X является предельной точкой направления $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) тогда и только тогда, когда существует поднаправление $\{y_\beta\}$ ($\beta \in B$), сходящееся к x .

Доказательство. Пусть x — предельная точка направления $\{x_\alpha\}$, $\mathfrak{B}_x$ — семейство всех окрестностей точки x . Рассмотрим множество B всех пар (α, U) таких, что $\alpha \in A$, $U \in \mathfrak{B}_x$ и $x_\alpha \in U$. Если определить порядок на B следующим образом: $(\alpha, U) \geq (\alpha_1, U_1)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geq \alpha_1$ и $U \subset U_1$, то B становится направленным по возрастанию множеством. Действительно, если $(\alpha, U), (\alpha_1, U_1) \in B$, то найдется $U_2 \in \mathfrak{B}_x$, удовлетворяющая $U_2 \subset U \cap U_1$. Так как A направлено по возрастанию, то существует $\alpha_0 \geq \alpha, \alpha_1$. В силу того, что $\{x_\alpha\}$ часто встречается с U_2 , найдется $\alpha_2 \geq \alpha_0$, причем $x_{\alpha_2} \in U_2$. Тогда $(\alpha_2, U_2) \geq (\alpha, U), (\alpha_1, U_1)$.

Положим $y_{(\alpha, U)} = x_\alpha$, где $(\alpha, U) \in B$. Тогда $\{y_{(\alpha, U)}\} ((\alpha, U) \in B)$ является поднаправлением направления $\{x_\alpha\}$. Действительно, для произвольного $\alpha \in A$ возьмем (α, U) , где окрестность $U \in \mathfrak{B}_x$ удовлетворяет $x_\alpha \in U$ (например, $U = X$). Тогда, если $(\alpha_1, U_1) \geq (\alpha, U)$, то $\alpha_1 \geq \alpha$ и $y_{(\alpha_1, U_1)} = x_{\alpha_1}$. Докажем, что направление $\{y_{(\alpha, U)}\}$ сходится к x . Возьмем $U \in \mathfrak{B}_x$. Так как x — предельная точка для $\{x_\alpha\}$, то найдется $\alpha \in A$ такое, что $x_\alpha \in U$. Если $(\alpha_1, U_1) \geq (\alpha, U)$, то $y_{(\alpha_1, U_1)} = x_{\alpha_1} \in U_1 \subset U$, чем и доказана сходимость.

Пусть, обратно, поднаправление $y_\beta \rightarrow x$. Для любого $\alpha \in A$ найдется $\beta(\alpha) \in B$ такое, что для всех $\beta \geq \beta(\alpha)$ имеем $y_\beta = x_\alpha$ с $\alpha' \geq \alpha$. Если U — произвольная окрестность точки x , то существует $\beta_0 \in B$ такое, что для $\beta \geq \beta_0$ имеем $y_\beta \in U$. Возьмем $\beta \geq \beta(\alpha)$, β_0 . Тогда найдется $\alpha' \geq \alpha$, для которого $x_{\alpha'} = y_\beta \in U$, чем и доказано, что x — предельная точка направления $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$).

Лемма 2. *Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждое направление в X имеет предельную точку.*

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — произвольное направление в компактном топологическом пространстве X . Так как множество A направлено по возрастанию, то центрировано семейство множеств $B_\alpha = \{x_{\alpha'}: \alpha' \geq \alpha\}$. Тем более центрировано семейство их замыканий $\bar{B}_\alpha$. Тогда в силу компактности X пересечение всех $\bar{B}_\alpha$ содержит некоторую точку x . Покажем, что x — предельная точка направления $\{x_\alpha\}$.

Обозначим через $\mathfrak{B}_x$ семейство всех окрестностей точки x . Надо проверить, что для любой окрестности $U \in \mathfrak{B}_x$ и любого $\alpha \in A$ найдется $\alpha_1 \in A$ такой, что $\alpha_1 \geq \alpha$ и $x_{\alpha_1} \in U$. Действительно, так как для любого $\alpha \in A$ выполнено $x \in \bar{B}_\alpha$, то для $U \in \mathfrak{B}_x$ найдется $\alpha_1 \geq \alpha$, при котором $x_{\alpha_1} \in U$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть X — топологическое пространство, в котором каждое направление имеет предельную точку. Для доказательства компактности X проверим, что произвольное центрированное семейство $\mathfrak{F}_0$ его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение. Пусть A — семейство всевозможных конечных пересечений элементов из $\mathfrak{F}_0$.

Очевидно, достаточно доказать, что пересечение всех множеств из A непусто. Семейство $\mathfrak{F}_0$ центрировано, поэтому если мы упорядочим A отношением включения ($\alpha_1 \leq \alpha_2$, если $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, $\alpha_1 \supset \alpha_2$), то A направлено по возрастанию. Если для любого $\alpha \in A$ выберем произвольный элемент $x_\alpha \in \alpha$, то получим направление $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$). По условию оно имеет предельную точку x . Возьмем любое множество $\alpha \in A$ и покажем, что x — точка прикосновения для α , откуда в силу замкнутости α получим $x \in \alpha$.

Тогда в силу произвольности α точка x принадлежит пересечению всех множеств из A , которое, таким образом, непусто.

Итак, возьмем произвольную окрестность U точки x . Тогда найдется $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \alpha$, для которого $x_{\alpha'} \in U$, откуда $x_{\alpha'} \in \alpha' \subset \alpha$ и $x_{\alpha'} \in U \cap \alpha$. Следовательно, x — точка прикосновения множества α .

Следствие. Если направление $\{x_\alpha\}$ в компактном пространстве X имеет единственную предельную точку x , то $x_\alpha \rightarrow x$.

Доказательство. Если $\{x_\alpha\}$ не сходится к x , то найдется окрестность U точки x такая, что множество $\{x_\alpha: x_\alpha \notin U\}$ является поднаправлением $\{x_\alpha\}$, которое в силу 2 должно иметь предельную точку, но этой точкой не может быть x .

Из лемм 1 и 2 следует

Теорема 3. Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждое направление в X содержит поднаправление, сходящееся к некоторой точке пространства X .

Компактное хаусдорфово пространство называется **компактом**.

Множество E топологического пространства X называется **компактным**, если рассматриваемое как топологическое пространство (с топологией, индуцируемой топологией пространства X) оно компактно. Поскольку открытые множества в E имеют вид $G \cap E$, где G — открытое множество в X , то можно сформулировать определение компактности множества E следующим образом: какова бы ни была система $\{G_\xi\}$ открытых (в X) множеств, покрывающая E , т. е. такая, что $\bigcup_{\xi} G_\xi \supset E$, существует конечное число множеств $G_{\xi_1}, G_{\xi_2}, \dots, G_{\xi_n}$, также покрывающих E .

Теорема 4. Если X — хаусдорфово пространство, то всякое компактное множество $E \subset X$ замкнуто.

Доказательство. Допустим, что множество E имеет точку прикосновения $x_0 \notin E$. Для каждого $x \in E$ найдем открытые непересекающиеся окрестности V_x точки x и $V_{x_0}^{(x)}$ точки x_0 . Ясно, что система $\{V_x\}$ ($x \in E$) покрывает множество E и, следовательно, существует конечное число точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ таких, что

$$G = \bigcup_{h=1}^n V_{x_h} \supset E.$$

Пересечение

$$V_0 = \bigcap_{h=1}^n V_{x_0}^{(x_h)}$$

является, очевидно, окрестностью точки x_0 . Однако $V_0 \cap E \subset V_0 \cap G = \emptyset$, что противоречит тому, что x_0 — точка прикосновения множества E .

Замечание. Если X — компактное пространство и E — замкнутое множество в X , то E компактно.

Действительно, замкнутые множества в E будут замкнутыми и в X . Поэтому, если $\{F_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — центрированная система

замкнутых в E множеств, то она имеет непустое пересечение, которое содержится в E .

Будем называть множество E топологического пространства X *относительно компактным*, если его замыкание компактно. Ясно, что любое множество в компактном пространстве относительно компактно.

Пусть X — компактное пространство и f — непрерывное отображение пространства X в топологическое пространство Y .

Теорема 5. *Множество $f(X)$ компактно в пространстве Y . Доказательство.* Положим $A = f(X)$, и пусть $\{G_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — система открытых множеств, покрывающая A . Пусть $G'_\xi = f^{-1}(G_\xi)$. Множества G'_ξ ($\xi \in \Xi$) открыты и, кроме того, $\bigcup_{\xi \in \Xi} G'_\xi = X$. Следовательно, существуют индексы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

такие, что $\bigcup_{k=1}^n G'_{\xi_k} = X$. Но тогда и $\bigcup_{k=1}^n C_{\xi_k} \supset A$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если E — компактное множество топологического пространства X , то $f(E)$ — компактное множество в пространстве Y .*

Используя теорему 4, получаем

Следствие 2. *Если Y — хаусдорфово пространство, то образ $f(E)$ компактного множества $E \subset X$ замкнут.*

Следствие 3. *Если пространство X компактно, а Y — хаусдорфово и f — взаимно однозначное непрерывное отображение X на Y , то обратное отображение f^{-1} непрерывно, т. е. f — гомеоморфизм.*

Действительно, всякое замкнутое множество $F \subset X$ компактно. Прообраз этого множества при отображении f^{-1} есть $f(F)$ — множество, замкнутое на основании следствия 2. Поскольку прообраз каждого замкнутого множества замкнут, отображение f^{-1} непрерывно.

Отметим, кроме того, следующее важное свойство непрерывных функций на компакте, обобщающее теорему Вейерштрасса для функций вещественной переменной.

Теорема 6. *Всякая непрерывная вещественная функция f на компактном пространстве X принимает свои наибольшее и наименьшее значения.*

Доказательство проведем только для случая наибольшего значения. Пусть $M = \sup \{f(x) : x \in X\}$. По теореме 5 число M конечно. Для любого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$F_n = \{x \in X : f(x) \geq M - 1/n\}.$$

Ясно, что множества F_n замкнуты и непусты. Кроме того, $F_n \subset F_m$ при $n \geq m$. Значит, $\{F_n\}$ — центрированная система замкнутых множеств, а тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Если $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, то $f(x) \geq M$, от-

куда $f(x) = M$, т. е. в точке x функция f принимает наибольшее значение.

Нам понадобится еще ряд свойств, тесно связанных с понятием компактности. Пусть X — топологическое пространство.

Множество $E \subset X$ называется *секвенциально компактным*, если любая последовательность в E содержит последовательность, сходящуюся к точке из E (ср. с теоремой 3). Множество $E \subset X$ называется *отрицательно секвенциально компактным*, если любая последовательность в E содержит подпоследовательность, сходящуюся к точке из X . Множество $E \subset X$ называется *счетно компактным*, если любая последовательность в E имеет предельную точку $x \in E$ (ср. с леммой 2). Множество $E \subset X$ называется *относительно счетно компактным*, если любая последовательность в E имеет предельную точку $x \in X$. Отметим, что, вообще говоря, компактность не влечет секвенциальную компактность и наоборот. Если множество компактно, то оно, очевидно, и счетно компактно. Соотношения между введенными понятиями в различных частных случаях будут рассмотрены ниже.

2.8. Пусть $\{X_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — семейство топологических пространств. Рассмотрим прямое произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (см. § 1).

В X введем топологию, принимая за базис окрестностей точки $f \in X$ всякое множество вида $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, где каждое множество U_α есть окрестность точки $f(\alpha)$ в пространстве X_α , причем U_α отлично от X_α не более чем для конечного числа индексов $\alpha \in A$. Проверку того, что введенная совокупность множеств действительно является базисом, предоставляем читателю. Легко доказать, что направление $\{f_\beta\}$ ($\beta \in B$) в X будет сходиться к точке $f \in X$ тогда и только тогда, когда $f_\beta(\alpha) \rightarrow f(\alpha)$ в топологическом пространстве X_α при каждом α . Таким образом, сходимостъ направления $\{f_\beta\}$ элементов пространства X есть покоординатная сходимость, т. е. сходимость каждой «координаты» $f_\beta(\alpha)$ к соответствующей «координате» предельной точки f в пространстве X_α .

Далее нам будет нужна следующая теорема Тихонова, доказательство которой можно найти, например, в книге Келли (гл. 5, теорема 13).

Теорема 7. Если X_α — компактные пространства при любом $\alpha \in A$, то пространство $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ компактно.

Более подробно с изложенным в этом параграфе материалом можно ознакомиться в монографиях Бурбаки — II, Келли.

В заключение сделаем одно замечание относительно терминологии. Так как иногда нам придется одновременно рассматривать несколько топологий на одном и том же пространстве X ,

то во избежание путаницы договоримся об одном типе сокращенной записи. Если τ — некоторая топология в пространстве X , то термины τ -замыкание, τ -компактное множество и т. д. будут означать соответственно замыкание в топологии τ , множество, компактное в топологии τ и т. д.

§ 3. Метрические пространства

3.1. Важным классом топологических пространств являются метрические пространства. Множество X называется *метрическим пространством*, если каждой паре элементов $x, y \in X$ сопоставлено вещественное число $\rho(x, y)$ — *расстояние* между элементами x и y , — удовлетворяющее условиям:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любого $z \in X$ (неравенство треугольника).

Введенная функция $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *метрикой*. Простыми примерами метрических пространств могут служить n -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ *, отрезок прямой, окружность, если в качестве расстояния на окружности брать длину кратчайшей дуги между точками.

Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ . *Открытым шаром* радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x_0 \in X$ называется множество

$$K_\varepsilon(x_0) = \{x \in X: \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Замкнутым шаром (в дальнейшем обычно просто *шаром*) радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x_0 \in X$ называется множество

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X: \rho(x, x_0) \leq \varepsilon\}.$$

Теорема 1. Совокупность множеств $K_{1/n}(x)$ ($n \in \mathbb{N}$, $x \in X$) удовлетворяет условиям 1)–3) пункта 2.3, т. е. образует базис в множестве X .

Доказательство. Так как $\rho(x, x) = 0$, то выполнение условия 1) очевидно. Если $n, m \in \mathbb{N}$ и $p = \max(n, m)$, то $K_{1/p}(x) \subset \subset K_{1/n}(x) \cap K_{1/m}(x)$. Следовательно, выполнено условие 2). Если $V_x = K_{1/n}(x)$, то положим $V'_x = K_{1/(2n)}(x)$, откуда $V'_x \subset V_x$. Кроме того, если $y \in V'_x$ и $V_y = K_{1/(2n)}(y)$, то $V_y \subset V_x$, так как в силу неравенства треугольника для любого $z \in V_y$ имеем $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < 1/(2n) + 1/(2n) = 1/n$. Таким образом, выполнено и условие 3).

Конструкция, приведенная в теореме 2.1, каноническим образом превращает метрическое пространство X в топологическое

*) $\mathbb{R}^n$ — вещественное n -мерное пространство, $\mathbb{C}^n$ — комплексное.

с базисом из открытых шаров. Теорема 1 показывает также, что каждая точка из X обладает счетным базисом. Следовательно, для описания топологии в X достаточно ограничиться сходящимися последовательностями (см. 2.6, свойство 6). Отметим, что $x_n \rightarrow x$ в полученном топологическом пространстве тогда и только тогда, когда $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$.

Топологическое пространство, топологию которого порождает некоторая метрика, называется *метризуемым*. Отнюдь не всякое топологическое пространство метризуемо; примеры неметризуемых пространств мы увидим дальше. Следует иметь в виду, что одна и та же топология может порождаться разными метриками.

Теорема 2. 1) $\rho(x, y)$ есть непрерывная функция своих аргументов, т. е. если $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$, то $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x_0, y_0)$.

2) Метрическое пространство хаусдорфово (следовательно, сходящаяся последовательность может иметь только один предел).

Доказательство. 1) Из неравенства треугольника получаем соотношение

$$\rho(x', y') - \rho(x, y) \leq \rho(y, y') + \rho(x, x').$$

Меняя x, y и x', y' местами, приходим к неравенству противоположного знака, откуда

$$|\rho(x', y') - \rho(x, y)| \leq \rho(x, x') + \rho(y, y'). \quad (1)$$

Отсюда получаем

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0) \rightarrow 0.$$

2) Если $x \neq x_0$, то $\varepsilon = \rho(x, x_0)/2 > 0$, и из неравенства треугольника получаем, что открытые шары $K_\varepsilon(x)$ и $K_\varepsilon(x_0)$ не пересекаются.

Ниже нам понадобится понятие расстояния от точки до множества $E \subset X$. Как и в евклидовом пространстве, мы понимаем под этим величину

$$\rho(x_0, E) = \inf_{x \in E} \rho(x_0, x).$$

Петрудно видеть, что $\rho(x_0, E) = 0$ равносильно тому, что $x_0 \in \bar{E}$.

Пусть X_0 — множество в метрическом пространстве X . Поскольку расстояние определено для каждой пары элементов множества X , оно тем самым определено и в X_0 . Ясно, что при этом выполнены аксиомы 1)–3) метрического пространства, так что X_0 естественным образом оказывается метрическим пространством. Говорят, что метрика в X_0 индуцирована метрикой пространства X , или что пространство X_0 является *подпространством* метрического пространства X .

Допустим, что между элементами двух метрических пространств X и Y можно установить взаимно однозначное соответ-

ствие так, что расстояния между соответствующими парами элементов пространств X и Y равны. Такие пространства называются *изометричными*. Ясно, что все метрические соотношения в одном из изометричных пространств имеют место также и в другом, поэтому различие между такими пространствами является различием лишь в конкретной природе элементов и не затрагивает существенных, т. е. связанных с расстоянием свойств пространства. Это обстоятельство дает основания для отождествления изометричных пространств.

3.2. Приведем более сложные примеры метрических пространств. В этой книге основную роль будут играть пространства, элементами которых являются функции. Здесь и в дальнейшем, вводя некоторое пространство X , элементами которого являются числовые функции, мы, если не оговорено противное, вводим сразу два пространства — вещественное пространство X , состоящее из всех вещественных функций, удовлетворяющих соответствующим условиям, и комплексное пространство X , состоящее из всех комплексных функций, удовлетворяющих тем же условиям. Разница в обозначениях этих пространств, как правило, не проводится. Если в некотором утверждении мы не упоминаем, о каком пространстве идет речь, вещественном или комплексном, то, значит, это утверждение справедливо и в том и другом случае.

1) Пусть K — компакт. Пространство $C(K)$ есть множество всех непрерывных функций на компакте K , в котором расстояние между функциями x и y определяется следующим образом:

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in K} |x(t) - y(t)|.$$

Проверка условий 1)–3) не представляет труда, поэтому мы ее опускаем. Так как непрерывная функция на компакте достигает своего максимума (см. теорему 2.6), то можем также написать

$$\rho(x, y) = \max_{t \in K} |x(t) - y(t)|.$$

Сходимость последовательности $\{x_n\}$ элементов пространства $C(K)$ к точке x_0 означает равномерную сходимость последовательности функций $x_n(t)$ к функции $x_0(t)$. В самом деле, если по произвольному $\varepsilon > 0$ выбрано N такое, что $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ при $n \geq N$, то это значит, что для тех же n

$$\sup_{t \in K} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

Таким образом, для всех $t \in K$ справедливо неравенство

$$|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon, \quad n \geq N,$$

откуда и следует доказываемая равномерная сходимость.

Очевидно и обратное: из равномерной сходимости последовательности непрерывных функций к непрерывной функции следует сходимость соответствующих элементов в пространстве $C(K)$. Если $K = [a, b]$, то пишем $C[a, b]$.

2) Пространство s есть множество всевозможных числовых последовательностей, в котором расстояние между последовательностями $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots)$ определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

Проверка аксиом 1) и 2) метрического пространства не представляет труда. Условие 3) вытекает из того, что функция $\varphi(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ возрастает при $\lambda \geq 0$, и поэтому имеет место числовое неравенство

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}. \quad (2)$$

Если последовательность $\{x_n\}$ ($x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$, $n = 1, 2, \dots$) сходится к элементу $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)}, \dots)$, то это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

т. е. сходимость последовательности точек в s есть покоординатная сходимость — сходимость каждой координаты точки x_n к соответствующей координате предельной точки x_0 .

В самом деле, из неравенства

$$\frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|} \leq \rho(x_n, x_0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

в случае, если $x_n \rightarrow x_0$, получаем $\xi_k^{(n)} \rightarrow \xi_k^{(0)}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Напротив, если выполнено условие (3), то, так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|} = \rho(x_n, x_0)$$

сходится равномерно относительно n (он мажорируется рядом $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$), допустим почленный предельный переход, и поскольку каждый член ряда стремится к нулю, то $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$.

Из доказанного вытекает, что пространство s является топологическим произведением счетного семейства прямых.

Укажем еще на пространство $C^{(l)}[a, b]$ (в отличие от пространства комплексных чисел C^n здесь мы пишем индекс в круглых скобках), элементы которого — функции, определенные в промежутке $[a, b]$ и имеющие в этом промежутке непрерывные производные до l -й включительно. Расстояние между $x, y \in C^{(l)}[a, b]$ можно определить так:

$$\rho(x, y) = \sum_{h=0}^l \max_{a \leq t \leq b} |x^{(h)}(t) - y^{(h)}(t)|,$$

$$x^{(0)}(t) = x(t), \quad y^{(0)}(t) = y(t).$$

Сходимость в $C^{(l)}[a, b]$ означает равномерную сходимость как последовательности самих функций, так и последовательности k -х производных ($1 \leq k \leq l$).

Можно рассматривать и пространство $C^{(l)}(D)$, состоящее из функций, непрерывных вместе со всеми своими частными производными до l -го порядка в области D n -мерного пространства (см. IV. 4.4).

Отметим также, что если в $C(K)$ ввести порядок: $x \geq y$ тогда и только тогда, когда $x(t) \geq y(t)$ при любом $t \in K$, а в s условиться, что $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \geq y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда $\xi_k \geq \eta_k$ при любом $k \in \mathbb{N}$, то $C(K)$ и s становятся упорядоченными множествами (но не совершенно упорядоченными).

§ 4. Полнота и сепарабельность.

Множества первой и второй категории *)

Из аксиом метрического пространства вытекает и ряд других свойств расстояния и предела, аналогичных хорошо известным свойствам вещественных чисел; например, если $x_n^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_n$,

$x_n \rightarrow x_0$, то имеется последовательность $x_n^{(k_n)} \rightarrow x_0$. Однако некоторые важные предложения о пределе, имеющие место для множества вещественных чисел, не могут быть выведены из аксиом метрического пространства и не выполняются, вообще говоря, в произвольном метрическом пространстве. Поэтому естественно выделить из совокупности всех метрических пространств некоторые классы пространств, метрика в которых удовлетворяет тем или иным дополнительным условиям, обобщающим другие существенные свойства расстояния и сходимости в пространстве вещественных чисел.

4.1. Важнейшим из таких свойств является полнота. Для вещественных чисел принцип полноты может быть высказан в различных формах (принцип Дедекинда, наличие точной границы у ограниченного множества и др.), однако только в одной из

*) Множества первой и второй категории введены Р. Бэром.

пих — в признаке сходимости Коши — при формулировке не используется иных понятий, кроме метрических. Наличие обобщенного признака Коши мы и примем в качестве определения полноты произвольного метрического пространства. Именно, дадим следующее определение.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется *сходящейся в себе**, если $\rho(x_m, x_n) \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$), т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдется N_ε , для которого $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ при $m, n \geq N_\varepsilon$.

Метрическое пространство X называется *полным*, если каждая сходящаяся в себе последовательность $\{x_n\}$ сходится, т. е. существует такая точка $x_0 \in X$, что $x_n \rightarrow x_0$.

Очевидно, в любом метрическом пространстве каждая сходящаяся последовательность сходится и в себе.

Таким образом, в полном пространстве имеет место

Признак сходимости Коши. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в себе.

При переходе от пространства X к его замкнутому подпространству X_0 свойство полноты сохраняется. В самом деле, если $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность точек из X_0 , то в силу полноты пространства X существует $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X$. По

замкнутости множества X_0 должно быть $x_0 \in X_0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится в X_0 .

Нетрудно видеть, что если отбросить требование замкнутости множества X_0 , то приведенное утверждение уже не будет верным. Достаточно взять, например, за X пространство всех вещественных чисел, а за X_0 — содержащееся в нем пространство рациональных чисел.

Проверку полноты метрического пространства часто облегчает

Лемма 1. Если последовательность Коши $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к точке x , то $x_n \rightarrow x$.

Доказательство. Так как $\{x_n\}$ — последовательность Коши, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m \geq N$. Для $n_k \geq N$ имеем

$$\rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon. \quad (1)$$

Так как $x_{n_k} \rightarrow x$, то, переходя в (1) к пределу, получаем $\rho(x_n, x) \leq \varepsilon$, чем и доказано $x_n \rightarrow x$.

4.2. Все конкретные метрические пространства, введенные в § 3, полны. Проверим это.

1) Пространство $C(K)$. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов из $C(K)$. Если $\varepsilon > 0$, то для доста-

*) Часто употребляют также термины *последовательность Коши* и *фундаментальная последовательность*.

точно больших m и n ($m, n \geq N_\epsilon$)

$$\rho(x_m, x_n) = \max_{t \in K} |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon.$$

Таким образом, при любом $t \in K$ будет

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon. \quad (2)$$

Фиксируя здесь $t \in K$, мы видим, что числовая последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится в себе, следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$,

который мы обозначим через $x_0(t)$. Остается доказать еще, что x_0 принадлежит $C(K)$ и сходимости x_n к x_0 имеет место в смысле метрики этого пространства. Переходя к пределу в неравенстве (2) при $m \rightarrow \infty$, получим

$$|x_0(t) - x_n(t)| \leq \epsilon.$$

Отсюда ясно, что последовательность функций $\{x_n(t)\}$ сходится к функции $x_0(t)$ равномерно, что влечет непрерывность функции $x_0(t)$ и сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x_0 в пространстве $C(K)$.

Аналогично можно проверить полноту пространства $C^{(n)}$.

2) Пространство s . Полнота пространства s устанавливается совсем просто. Если $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$ — сходящаяся в себе последовательность, то, используя неравенство типа (4) из § 3, легко убедиться, что каждая из числовых последовательностей $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots$ также сходится в себе, а потому существует предел $\xi_k^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \dots$). Полагая $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)}, \dots)$, мы видим, что $x_n \rightarrow x_0$ в s (так как сходимость в s покоординатная).

4.3. Подобно тому, как множество рациональных чисел включается в множество вещественных чисел, так и произвольное метрическое пространство может быть включено в полное метрическое пространство.

Наименьшее полное метрическое пространство, содержащее данное пространство X , называется *пополнением* пространства X . (Термин *наименьшее* понимается в том смысле, что пополнение содержится во всяком другом полном пространстве, содержащем X . При этом, как указывалось в 3.1, изометричные пространства отождествляются.)

Теорема 1. *Всякое метрическое пространство имеет пополнение.*

Доказательство*). Пусть X — некоторое метрическое пространство. Назовем сходящиеся в себе последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ эквивалентными, если $\rho(x_n, x'_n) \rightarrow 0$. Ясно, что если

*). См. Хаусдорф. Доказательство по существу следует процессу Кантора — Мерз введения вещественных чисел.

одна из эквивалентных последовательностей сходится, то сходится и другая, и к той же самой точке. Действительно, если, например, $x_n \rightarrow x$, то

$$\rho(x'_n, x) \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(x_n, x) \rightarrow 0$$

и потому $x'_n \rightarrow x$.

Разобьем множество всех сходящихся в себе последовательностей на классы, отложив в один класс все эквивалентные между собой последовательности. Обозначим через Ξ множество всех таких классов. Очевидно, две последовательности, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой, следовательно, одна и та же последовательность не может принадлежать двум разным классам.

Пусть ξ и η — некоторые классы Ξ . Выберем в классе ξ произвольным образом последовательность $\{x_n\}$, а в классе η — последовательность $\{y_n\}$. С помощью неравенства (1) из § 3 получаем

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n).$$

А так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся в себе, то правая часть стремится к нулю и числовая последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ сходится. Положим

$$\rho(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n).$$

Расстояние $\rho(\xi, \eta)$ определяется классами ξ и η однозначно. В самом деле, если последовательность $\{x'_n\}$ эквивалентна последовательности $\{x_n\}$, а $\{y'_n\}$ эквивалентна $\{y_n\}$, то, переходя к пределу в неравенстве

$$|\rho(x'_n, y'_n) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n),$$

получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n).$$

Проверим теперь, что $\rho(\xi, \eta)$ удовлетворяет аксиомам 1)–3) метрического пространства. При проверке условия 1) нужно доказать, что из $\rho(\xi, \eta) = 0$ следует $\xi = \eta$. Сохранив прежние обозначения, мы видим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0,$$

т. е. последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентны, а тогда классы ξ и η совпадают.

Условие 2) очевидно. Условие 3) получается предельным переходом из неравенства

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, z_n) + \rho(y_n, z_n).$$

Здесь $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ — последовательности, принадлежащие соответственно классам ξ , η , ζ .

Таким образом, множество Ξ классов эквивалентных последовательностей представляет собой метрическое пространство.

Покажем, что первоначальное пространство X можно рассматривать как подмножество Ξ .

Для произвольного $x \in X$ обозначим через $\xi_x \in \Xi$ класс последовательностей, содержащий последовательность $(x, x, \dots, x, \dots)$, иначе говоря, класс сходящихся к x последовательностей. Очевидно, равенство $\xi_x = \xi_y$ равносильно $x = y$. Далее, $\rho(\xi_x, \xi_y) = \rho(x, y)$, в чем проще всего убедиться, беря последовательности $(x, x, \dots, x, \dots)$ и $(y, y, \dots, y, \dots)$ в качестве определяющих классы ξ_x и ξ_y .

Ввиду сказанного ясно, что, отождествляя элемент $x \in X$ с классом $\xi_x \in \Xi$, мы изометрично погрузим X в метрическое пространство Ξ .

Таким образом, впредь X можно рассматривать как подмножество пространства Ξ , а для элементов ξ_x пользоваться старым обозначением x . Отметим еще следующий факт. Пусть $\{x_n\}$ — определяющая последовательность для класса ξ . Тогда имеем $\xi_{x_n} = x_n \rightarrow \xi$ (в Ξ). Действительно, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m \geq N_\varepsilon$, но тогда $\rho(x_n, \xi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ при $n \geq N_\varepsilon$, откуда $x_n \rightarrow \xi$ (в Ξ).

Благодаря доказанному, для любого $\xi \in \Xi$ можно найти такое $x \in X$, что $\rho(x, \xi) < \varepsilon$ (в качестве x можно взять любое x_n при $n \geq N_\varepsilon$).

Докажем теперь полноту пространства Ξ . Пусть $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}, \dots$ — последовательность классов, сходящаяся в себе. Возьмем последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Согласно доказанному выше для каждого n найдется $x^{(n)} \in X$ такое, что $\rho(x^{(n)}, \xi^{(n)}) < \varepsilon_n$. Из неравенства

$$\begin{aligned} \rho(x^{(n)}, x^{(m)}) &\leq \rho(x^{(n)}, \xi^{(n)}) + \rho(\xi^{(n)}, \xi^{(m)}) + \rho(\xi^{(m)}, x^{(m)}) < \\ &< \varepsilon_n + \varepsilon_m + \rho(\xi^{(n)}, \xi^{(m)}) \end{aligned}$$

ясно, что последовательность $\{x^{(n)}\}$ сходится в себе. Она, следовательно, определяет некоторый класс ξ так, что $\rho(x^{(n)}, \xi) \rightarrow 0$. Но

$$\rho(\xi^{(n)}, \xi) \leq \rho(\xi^{(n)}, x^{(n)}) + \rho(x^{(n)}, \xi) < \varepsilon_n + \rho(x^{(n)}, \xi).$$

Отсюда $\xi^{(n)} \rightarrow \xi$ в Ξ , что и устанавливает полноту пространства Ξ .

Если H — другое полное пространство, содержащее X , то, отождествляя те элементы пространства H , которые являются пределами сходящихся в себе последовательностей точек из X , с классами эквивалентных последовательностей, получаем, в силу полноты H , что $\Xi \subset H$.

Полношение пространства X построено.

4.4. Здесь мы рассмотрим свойства плотности и сепарабельности, введенные в 2.4 для произвольных топологических пространств.

Пусть X — метрическое пространство. Очевидно, что множество $E \subset X$ является плотным в множестве $X_0 \subset X$, если для каждого $x \in X_0$ и $\varepsilon > 0$ существует точка $z \in E$, удовлетворяющая $\rho(x, z) < \varepsilon$, или, что то же самое, для любого $x \in X_0$ существует последовательность $\{x_n\} \subset E$ такая, что $x_n \rightarrow x$.

Нетрудно видеть, что всякое пространство X представляет собой множество, плотное в своем пополнении.

Действительно, если $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — последовательность, принадлежащая классу $\xi \in \Xi$, то, как было показано при доказательстве теоремы 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, откуда и следует наше утверждение.

Напомним, что метрическое пространство X является *сепарабельным*, если в нем существует счетное плотное подмножество.

Если метрическое пространство X_0 содержится в сепарабельном метрическом пространстве X , то X_0 также сепарабельно.

Пусть X_0 — подмножество пространства X и $D = \{x_k\}$ — счетное плотное в X множество. Возьмем числовую последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($\varepsilon_n > 0$) и для каждого $k = 1, 2, \dots$ найдем в X_0 элемент z_{kn} такой, что

$$\rho(x_k, z_{kn}) < \rho(x_k, X_0) + \varepsilon_n.$$

Пусть $x \in X_0$ и $\varepsilon > 0$; найдется элемент $x_k \in D$ такой, что $\rho(x, x_k) < \varepsilon$; беря n настолько большим, чтобы было $\varepsilon_n < \varepsilon$, получим

$$\begin{aligned} \rho(x, z_{kn}) &\leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, z_{kn}) < \varepsilon + \rho(x_k, X_0) + \varepsilon_n \leq \\ &\leq \varepsilon + \rho(x_k, x) + \varepsilon_n < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда и следует плотность множества $D_0 = \{z_{kn}\}$ в X_0 .

4.5. Пространства R^n , $C[a, b]$, $C^{(1)}$, s сепарабельны*). Для R^n это утверждение очевидно. В качестве счетного плотного множества можно взять, например, множество точек с рациональными координатами.

Что касается $C[a, b]$, то в качестве счетного плотного в нем множества можно взять множество всех алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами. В самом деле, по известной теореме Вейерштрасса (см. IV. 4.1) всякую непрерывную функцию можно равномерно (т. е. по расстоянию в $C[a, b]$) аппроксимировать многочленом с любой наперед заданной точностью. Ясно, далее, что за счет сколь угодно малого изменения многочлена можно добиться рациональности его коэффициентов.

*) Приведем доказательство лишь для случая вещественных пространств; комплексный случай легко сводится к вещественному.

Таким образом, для всякой непрерывной функции $x(t)$ найдется многочлен с рациональными коэффициентами, сколь угодно близкий к $x(t)$ в метрике $C[a, b]$.

В пространстве $C[a, b]$ в качестве счетного плотного множества можно взять также совокупность всех кусочно-линейных функций, графики которых представляют собой ломаные с вершинами в рациональных точках.

Доказательство сепарабельности пространства $C^{(1)}[a, b]$ представляем читателю.

Счетным плотным в пространстве s множеством является, например, множество r_0 , элементы которого суть все последовательности рациональных чисел с конечным числом членов, отличных от нуля. Действительно, заменяя в последовательности $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n, \dots)$, определяющей элемент x из s , все члены начиная с $(n+1)$ -го, нулями, получим последовательность $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n, 0, \dots) = [x]_n$, отстоящую, как элемент пространства s , от предыдущей меньше, чем на $1/2^n$.

Поскольку сходимость в s покоординатная, то к полученной последовательности — элементу из s — можно, очевидно, сколь угодно близко приблизиться последовательностью элементов из r_0 .

4.6. Не всякое метрическое пространство сепарабельно. Чтобы построить пример несепарабельного пространства, рассмотрим произвольное бесконечное множество T и множество $l^\infty(T)$ всех заданных на T вещественных ограниченных функций. Если для $x, y \in l^\infty(T)$ положить

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in T} |x(t) - y(t)|,$$

то $l^\infty(T)$ обращается в полное метрическое пространство, сходимость в котором означает равномерную сходимость соответствующей последовательности функций.

Эти утверждения проверяются так же, как для пространства $C(K)$. Докажем, что пространство $l^\infty(T)$ не сепарабельно.

Рассмотрим множество $M_0 \subset l^\infty(T)$ всех характеристических функций, т. е. функций, принимающих только два значения — нуль и единица. Оно несчетно*). Пусть D — плотное в $l^\infty(T)$ множество. Каждому $x \in M_0$ отнесем один из таких $z \in D$, что

$$\rho(x, z) < 1/2.$$

При этом различным элементам x и x' из M_0 соответствуют различные же элементы z и z' из D , так как если бы выполнялись неравенства

$$\rho(x, z) < 1/2, \quad \rho(x', z) < 1/2,$$

то было бы справедливо соотношение

$$\rho(x, x') \leq \rho(x, z) + \rho(x', z) < 1,$$

* См. Натансон — II, гл. I, § 4, теорема 8.

в то время как должно выполняться равенство

$$\rho(x, x') = 1.$$

Таким образом, несчетное множество M_0 поставлено во взаимно однозначное соответствие с частью множества D . Следовательно, D несчетно.

4.7. Легко видеть, что подмножество E метрического пространства X является *нигде не плотным*, если оно не плотно ни в одном шаре, т. е. если для любого шара $K_\varepsilon(x)$ найдется другой шар $K_{\varepsilon_1}(x_1) \subset K_\varepsilon(x)$, в котором нет точек множества E (см. 2.4).

В двумерном евклидовом пространстве (на плоскости) примером нигде не плотного множества может служить любое множество точек, лежащих на прямой. Множество точек, обе координаты которых рациональны, является примером множества первой категории — оно есть сумма счетного множества «одноточечных» множеств. Хотя это множество первой категории, оно тем не менее плотно в $\mathbb{R}^2$.

На вопрос о существовании множеств второй категории ответ дает следующая

Теорема 2. *Полное метрическое пространство X есть множество второй категории (в себе).*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что X — множество первой категории, так что $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k нигде не плотны. Так как E_1 нигде не плотно, найдется шар $K_{\varepsilon_1}(x_1)$, в котором нет точек множества E_1 . Поскольку E_2 нигде не плотно, в шаре $K_{\varepsilon_1/2}(x_1)$ найдется шар $K_{\varepsilon_2}(x_2)$, в котором нет точек E_2 . При этом можно считать, что $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1/2$.

Продолжая таким же образом, построим последовательность шаров $\{K_{\varepsilon_n}(x_n)\}$ таких, что

$$K_{\varepsilon_n}(x_n) \subset K_{\varepsilon_{n-1}/2}(x_{n-1}), \quad K_{\varepsilon_n}(x_n) \cap E_n = \emptyset,$$

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n-1}/2, \quad n = 2, 3, \dots$$

Ввиду того, что шар $K_{\varepsilon_n/2}(x_n)$ содержит все следующие шары, будет

$$\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon_n/2. \quad (3)$$

Так как, очевидно, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе, а потому вследствие полноты пространства X существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Переходя к пределу в (3) (при $p \rightarrow \infty$), получаем

$$\rho(x, x_n) \leq \varepsilon_n/2 < \varepsilon_n,$$

так что $x \in K_{e_n}(x_n)$ и, следовательно, $x \notin E_n$ для любого $n = 1, 2, \dots$. С другой стороны, $x \in X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, стало быть, x должно входить по крайней мере в одно из E_n .

Замечание. Небольшое изменение доказательства позволяет получить и более сильный результат о том, что в полном пространстве всякое непустое открытое множество — второй категории.

Следствие. В полном пространстве множество, дополненное к множеству первой категории, всегда второй категории.

Множества такого рода называются *вычетами*. Отметим следующий факт: пересечение счетного множества вычетов является вычетом. Действительно, если A_k — вычеты, то $A_k = X \setminus E_k$, где E_k — множества первой категории. Поскольку $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и, очевидно, $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ первой категории, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ является вычетом.

Ясно также, что открытое плотное в полном метрическом пространстве множество является вычетом, так как, очевидно, его дополнение нигде не плотно.

Предоставляем читателю в виде упражнения убедиться, что множество вещественных чисел, в разложении которых в k -ичную дробь какая-либо цифра, начиная с некоторого места, отсутствует, есть множество первой категории в пространстве вещественных чисел, и получить отсюда, что существуют числа, у которых в разложении в k -ичную дробь (при всех k) все значащие цифры присутствуют бесконечное множество раз (множество таких чисел является вычетом).

§ 5. Компактность в метрических пространствах

5.1. В п. 2.7 мы ввели понятия компактности и секвенциальной компактности и отметили, что эти понятия, вообще говоря, различны. Однако важно выделить классы пространств, где эти понятия совпадают. Сейчас мы покажем, что эти понятия совпадают в классе метрических пространств. Условие метризуемости, впрочем, вовсе не является для этого необходимым (см. гл. VIII).

Лемма 1. Точка x метрического пространства X является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к x .

Доказательство. Пусть x — предельная точка последовательности $\{x_n\}$. Обозначим через U_n шар $K_{1/n}(x)$. Возьмем любую точку $x_{n_1} \in U_1$. Пусть построены $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ и $x_{n_i} \in U_i$ ($i=1, 2, \dots, k$). Так как x — пре-

дельная точка, то найдется $m > n_k$, для которого $x_m \in U_{k+1}$. Положим $n_{k+1} = m$. Тогда построенная подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow x$. Обратное утверждение вытекает из леммы 2.1.

Требование компактности пространства является весьма сильным и выделяет сравнительно узкий класс пространств, в частности, более узкий, чем полные и сепарабельные пространства.

Теорема 1. *Компактное метрическое пространство полно.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши в компактном метрическом пространстве X . По лемме 2.2 последовательность $\{x_n\}$ имеет предельную точку x . В силу леммы 1 найдется подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow x$. Тогда по лемме 4.1 $x_n \rightarrow x$.

Введем следующее важное определение.

Пусть $\varepsilon > 0$ — данное положительное число, а M — подмножество метрического пространства X . Множество M называется ε -сетью для множества $E \subset X$, если для каждой точки $x \in E$ в M найдется такая точка z , что $\rho(x, z) < \varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть X — метрическое пространство. Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) X компактно;
- 2) X секвенциально компактно;
- 3) X счетно компактно;
- 4) X полно, и при каждом $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε -сеть (для X).

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 3) верно в любом топологическом пространстве; 3) $\Rightarrow$ 2) в силу леммы 1; 1) $\Rightarrow$ 3) в любом топологическом пространстве (см. лемму 2 § 2). Теперь докажем, что 2) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1).

2) $\Rightarrow$ 4). Доказательство полноты X проводится аналогично доказательству теоремы 1. Пусть условие 4) не выполнено, т. е. пусть при некотором $\varepsilon > 0$ не существует конечной ε -сети. Возьмем произвольную точку $x_1 \in X$. Множество, состоящее из одного элемента x_1 , не образует ε -сети для X , поэтому найдется $x_2 \in X$ такое, что $\rho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. Множество $\{x_1, x_2\}$ также не может быть ε -сетью для X , следовательно, найдется $x_3 \in X$, причем $\rho(x_i, x_3) \geq \varepsilon$ ($i = 1, 2$). Рассуждая так и дальше, мы придем к последовательности $\{x_n\}$ точек из X такой, что $\rho(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ ($m \neq n$, $m, n = 1, 2, \dots$). Очевидно, из этой последовательности нельзя выделить никакой сходящейся подпоследовательности, что противоречит секвенциальной компактности X .

4) $\Rightarrow$ 2). Пусть выполнено условие 4). Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ элементов множества X и докажем, что из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для этого зададимся числовой последовательностью $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($\varepsilon_n > 0$) и рассмотрим существующую по условию ε_1 -сеть. Если построить шары с центрами в точках ε_1 -сети и радиусом ε_1 , то каждая точ-

ка множества X попадет по крайней мере в один из этих шаров. Так как шаров конечное число, то в одном из них окажется бесконечно много членов рассматриваемой последовательности. Обозначим этот шар через $K_{\varepsilon_1}(z_1)$. Возьмем далее ε_2 -сеть и рассмотрим шары радиуса ε_2 с центрами в ее точках. Как и раньше, в один из этих шаров попадет бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, содержащихся в $K_{\varepsilon_1}(z_1)$. Пусть это будет шар $K_{\varepsilon_2}(z_2)$. Продолжая таким образом, получим последовательность шаров $K_{\varepsilon_1}(z_1), K_{\varepsilon_2}(z_2), \dots, K_{\varepsilon_n}(z_n), \dots$ такую, что в пересечение любого конечного их числа попадает бесконечное множество точек данной последовательности. Ввиду этого мы можем выбрать

$$x_{n_1} \in K_{\varepsilon_1}(z_1), \quad x_{n_2} \in K_{\varepsilon_2}(z_2) \cap K_{\varepsilon_1}(z_1), \quad n_2 > n_1,$$

и вообще $x_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^k K_{\varepsilon_i}(z_i) \quad (n_k > n_{k-1} > \dots > n_1)$.

Так как оба элемента x_{n_k} и x_{n_l} принадлежат шару $K_{\varepsilon_k}(z_k)$ ($k \leq l$), то

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \rho(x_{n_k}, z_k) + \rho(x_{n_l}, z_k) < 2\varepsilon_k,$$

а, значит, последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится в себе и, в силу полноты пространства X , сходится к некоторому элементу $x_0 \in X$. Таким образом, секвенциальная компактность X доказана.

Итак, мы доказали, что $2) \Leftrightarrow 4)$. Теперь из 2) и 4) выведем 1), чем и закончим доказательство теоремы 2.

Прежде всего отметим, что пространство, обладающее свойством 4), сепарабельно. Действительно, если $\varepsilon_k \rightarrow 0$ и M_k ($k \in \mathbb{N}$) — конечная ε_k -сеть, то $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ будет, очевидно, счетным плотным в данном пространстве множеством*).

Лемма 2. Пусть X — произвольное метрическое сепарабельное пространство. Рассмотрим систему $\{G_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) открытых множеств, покрывающую пространство X . Тогда из системы $\{G_\xi\}$ можно выделить счетное покрытие пространства X .

Доказательство. Обозначим через D счетное плотное в X множество и рассмотрим всевозможные шары рационального

*) В связи с проведенным рассуждением мы хотим обратить внимание на различие понятий компактного и сепарабельного пространств. В случае сепарабельного пространства было обеспечено наличие счетного множества, элементами которого можно было безгранично приблизиться к любому элементу пространства. В случае компактного пространства мы также получаем такую возможность, строя множество M — объединение ε_k -сетей. Однако здесь с помощью одной ε -сети — конечного числа элементов — мы можем одновременно аппроксимировать каждый элемент пространства, что в сепарабельном пространстве, вообще говоря, не имеет места.

радиуса с центрами в точках из D . Множество таких шаров, очевидно, счетно. Перенумеруем указанные шары; пусть это будут $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$. Для каждого $x \in X$ и $\xi \in \Xi$, очевидно, найдется шар $S_{n(x, \xi)}$ такой, что

$$x \in S_{n(x, \xi)} \subset G_\xi. \quad (1)$$

Когда x пробегает все X , а ξ — все Ξ , индексы $n(x, \xi)$ пробегают некоторое счетное множество $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$. При этом шары $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_k}, \dots$ покрывают пространство X . Для каждого $k = 1, 2, \dots$ выберем $\xi_k \in \Xi$ так, что $n(x_k, \xi_k) = n_k$ при некотором $x_k \in X$. В силу (1)

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{\xi_k} \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{n(x_k, \xi_k)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{n_k} = X.$$

Завершим теперь доказательство теоремы 2. Пусть опять X секвенциально компактно. Рассмотрим покрытие $\{G_\xi\}$ пространства X открытыми множествами. Так как по доказанному X сепарабельно, то по лемме 2 можно считать, что покрытие $\{G_\xi\}$ счетно, т. е. что ξ пробегает множество натуральных чисел. Предположим, что множества

$$F_n = X \setminus \bigcup_{\xi=1}^n G_\xi$$

непусты ни при одном $n \in \mathbb{N}$. Выберем в множестве F_n точку x_n . Из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть, например, $x_{n_k} \rightarrow x$. Так как для $n_k \geq n$ будет $x_{n_k} \in F_{n_k}$, а множество F_n замкнуто, то и $x \in F_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Иначе говоря,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = X \setminus \bigcup_{\xi=1}^{\infty} G_\xi,$$

что, однако, невозможно, поскольку $\bigcup_{\xi=1}^{\infty} G_\xi = X$.

Таким образом, при некотором n будет $X = \bigcup_{\xi=1}^n G_\xi$, и пространство X компактно. Доказательство теоремы 2 полностью закончено.

По ходу доказательства нами было получено

Следствие 1. *Компактное метрическое пространство сепарабельно.*

Следствие 2. *Пусть E — подмножество метрического пространства X . Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) E относительно компактно;
- 2) E относительно секвенциально компактно;
- 3) E относительно счетно компактно.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) в силу теоремы 2; 2) $\Rightarrow$ 3) очевидно. Докажем 3) $\Rightarrow$ 1). Для этого в силу теоремы 2 достаточно доказать, что замыкание $\bar{E}$ счетно компактно. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в $\bar{E}$. Для каждого n возьмем $y_n \in E$, для которого $\rho(x_n, y_n) < 1/n$. Так как E относительно счетно компактно, то последовательность $\{y_n\}$ имеет предельную точку $x \in \bar{E}$. Очевидно, что x является предельной точкой и для $\{x_n\}$.

Лемма 3. Пусть E — подмножество метрического пространства X . Если в X существует конечная ε -сеть для E , то в E существует конечная (2ε) -сеть.

Доказательство. Пусть $M \subset X$ — конечная ε -сеть для E . Для каждого $x \in M$ зафиксируем $y_x \in E$, для которого $\rho(x, y_x) < \varepsilon$ (если такой найдется). Тогда множество $M_1 = \{y_x: x \in M\} \subset E$ — конечная (2ε) -сеть.

Из теоремы 2 и леммы 3 получаем важный критерий компактности Хаусдорфа.

Теорема 3 (Хаусдорф). Для того чтобы подмножество E метрического пространства X было относительно компактным, необходимо, а если X — полное пространство, то и достаточно, чтобы при каждом $\varepsilon > 0$ в X существовала конечная ε -сеть для E .

Замечание. Для относительной компактности множества достаточно также (в случае полноты пространства X) существования относительно компактной ε -сети при любом $\varepsilon > 0$.

В самом деле, для этой относительной компактной ε -сети будет существовать конечная ε -сеть, которая будет, очевидно, (2ε) -сетью для исходного множества, что и устанавливает его относительную компактность.

5.2. Обратимся теперь к изучению условий компактности в конкретных пространствах. Классическая теорема Больцано — Вейерштрасса утверждает, что подмножество в n -мерном пространстве R^n (или C^n) компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

Укажем теперь условия компактности множества в пространстве s . Нетрудно видеть, что множество $E \subset s$ относительно компактно в s тогда и только тогда, когда числовое множество k -х координат точек множества E ограничено при любом $k \in N$, т. е.

$$|\xi_{k\alpha}| \leq l_k, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots) \in E.$$

Иначе говоря, множество E расположено в некотором параллелепипеде пространства s .

Необходимость этого условия очевидна, так как если мы возьмем последовательность элементов, у которых, скажем, первая координата неограниченно возрастает, то из нее, очевидно, нельзя выделить частичную сходящуюся (покоординатно).

Для установления достаточности построим ε -сеть для E . Возьмем k настолько большим, чтобы было $1/2^k < \varepsilon$, и рассмотрим множество H точек вида $[x]_k = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, 0, \dots)$, где $x =$

$= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots) \in E$. Множество H относительно компактно (подобно ограниченному множеству в k -мерном пространстве). В то же время H является ε -сетью для E , так как, очевидно,

$$\rho(x, [x]_k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n|}{1 + |\xi_n|} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Здесь $[x]_k$ по-прежнему обозначает последовательность $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, 0, \dots)$.

Наличие относительно компактной ε -сети, как было отмечено выше, достаточно для относительной компактности E .

З а м е ч а н и е. Из установленной компактности параллелепипеда в s вытекает следующий факт. Если имеется совокупность ограниченных одним и тем же числом последовательностей, то из нее всегда можно извлечь последовательность, сходящуюся по координатно, т. е. такую последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, что одновременно существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k^{(0)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Этим обстоятельством мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Дадим теперь условия компактности множества в пространстве $C(K)$, где K — метрический компакт с метрикой r .

Т е о р е м а 4 (Арцела — Асколи). *Для того чтобы множество E непрерывных функций было относительно компактно в $C(K)$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

1) *функции множества E ограничены в совокупности, т. е. существует такая постоянная M , что*

$$|x(t)| \leq M, \quad x \in E, \quad t \in K;$$

2) *функции множества E равномерно непрерывны, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $r(t, t') < \delta$, то $|x(t) - x(t')| < \varepsilon$ для всех $x \in E$.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть E относительно компактно в $C(K)$. Согласно теореме 2 для множества E существует конечная ε -сеть. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — непрерывные функции, образующие эту сеть. Так как каждая из функций x_k ограничена, а для произвольного элемента $x \in E$ найдется x_k такое, что $\rho(x, x_k) < \varepsilon$, то

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_k(t)| + |x(t) - x_k(t)| \leq \\ &\leq \max_{t \in K} |x_k(t)| + \rho(x, x_k) < \max_{t \in K} |x_k(t)| + \varepsilon \end{aligned}$$

и, следовательно, условие 1) выполнено, если в качестве постоянной M взять увеличенную на ε общую верхнюю границу функций $|x_k(t)|$ ($k = 1, \dots, n; t \in K$).

Далее, для каждой из функций x_k найдется такое δ_k , что

$$|x_k(t') - x_k(t)| < \varepsilon \text{ при } r(t', t) < \delta_k.$$

Обозначим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. Возьмем произвольную функцию x из множества E . Пусть x_k — тот элемент, для которого $\rho(x, x_k) < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} |x(t') - x(t)| &\leq |x(t') - x_k(t')| + |x_k(t') - x_k(t)| + |x_k(t) - x(t)| \leq \\ &\leq \rho(x, x_k) + |x_k(t') - x_k(t)| + \rho(x, x_k) < 2\varepsilon + |x_k(t') - x_k(t)|. \end{aligned}$$

Если $r(t, t') < \delta$, то второе слагаемое здесь будет меньше ε , а потому в этом случае

$$|x(t') - x(t)| < 3\varepsilon.$$

Таким образом, функции множества E равномерно непрерывны.

Достаточность. Так как $C(K)$ — замкнутое подпространство в пространстве $l^\infty(K)$ всех ограниченных функций на K , то достаточно доказать, что E относительно компактно в $l^\infty(K)$. Так как пространство $l^\infty(K)$ полно, то по замечанию к теореме 3 достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ множество E имеет относительно компактную ε -сеть. По $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta > 0$ из условия равномерной непрерывности E . Так как K — метрический компакт, то по теореме Хаусдорфа существует конечная $\delta/3$ -сеть $\{t_k\}_{k=1}^n$ для K . Положим

$$\begin{aligned} C_1 &= K_{\delta/3}(t_1), \\ C_2 &= K_{\delta/3}(t_2) \setminus C_1, \\ &\dots \dots \dots \\ C_n &= K_{\delta/3}(t_n) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k. \end{aligned}$$

Так как $K = \bigcup_{k=1}^n K_{\delta/3}(t_k)$, то $K = \bigcup_{k=1}^n C_k$, причем $C_k \cap C_m = \emptyset$ при $k \neq m$, и при любом k , если $t, t' \in C_k$, то $r(t, t') < 2\delta/3$. Следовательно, в силу выбора δ , если $t, t' \in C_k$, то $|x(t) - x(t')| < \varepsilon$ для всех $x \in E$. Пусть x_k — характеристическая функция множества C_k , т. е. $x_k(t) = 1$, если $t \in C_k$, и $x_k(t) = 0$, если $t \notin C_k$. Рассмотрим множество H , состоящее из функций вида $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k(t)$, где числа λ_k таковы, что $|\lambda_k| \leq M$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Множество H компактно в $l^\infty(K)$, так как сходимость последовательности таких функций означает сходимость последовательностей соответствующих чисел λ_k .

Доказательство будет закончено, если мы покажем, что H является (2ε) -сетью для E . Пусть $x \in E$. В каждом множестве C_k зафиксируем по произвольной точке t_k . (Если $C_k = \emptyset$, то мы его пропускаем.) Функция $y(t) = \sum_{k=1}^n x(t_k) x_k(t)$ входит в H , так как $|x(t_k)| \leq M$ в силу условия 1). Возьмем произвольную точку $t \in K$. Так как $K = \bigcup_{k=1}^n C_k$, то t принадлежит некоторому множеству C_m . Тогда имеем

$$|x(t) - y(t)| = |x(t) - x(t_m)| < \varepsilon,$$

так как $\rho_k(t, t_m) < 2\delta/3 < \delta$ в силу построения C_m и условия 2). В силу произвольности t получаем

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in K} |x(t) - y(t)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon,$$

что и означает, что H есть (2ε) -сеть для E .

Проиллюстрируем доказанную теорему примерами.

Рассмотрим в промежутке $[0, \pi]$ совокупность функций $E = \{\sin nt\} (n = 1, 2, \dots)$. Условие ограниченности для E выполнено. Однако, поскольку $\sin n \frac{\pi}{2n} = 1$, то второе условие — равномерной непрерывности — нарушено. Множество E некомпактно в $C[0, 2\pi]$.

Рассмотрим теперь множество E функций, удовлетворяющих условию Гёльдера

$$|x(t') - x(t)| \leq M|t' - t|^\alpha, \quad x \in E, \quad t' \in [a, b], \quad 0 < \alpha \leq 1^*).$$

Если функции из множества E ограничены в совокупности, то E компактно. Действительно, $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha}$ обеспечивает равностепенную непрерывность функций множества E , и, следовательно, выполнены оба условия теоремы Арцела — Асколи.

Более общо: пусть E — ограниченное множество непрерывных функций, и пусть существует такая функция $\omega(\delta)$, что $\omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, причем модуль непрерывности $\omega(x; \delta)^{**})$ любой функ-

*) При $\alpha = 1$ получаем условие Липшица

$$|x(t') - x(t)| \leq M|t' - t|.$$

О функции, удовлетворяющей условию Гёльдера, часто говорят, что она удовлетворяет условию Липшица с показателем α . Класс всех таких функций обозначают $\text{Lip } \alpha$.

**) Напомним, что модулем непрерывности функции $x \in C[a, b]$ называется величина

$$\omega(x; \delta) = \max_{\substack{a \leq t, t' \leq b \\ |t' - t| \leq \delta}} |x(t') - x(t)|, \quad 0 < \delta \leq b - a.$$

ции $x \in E$ удовлетворяет неравенству $\omega(x; \delta) \leq \omega(\delta)$; тогда E компактно в пространстве $C[a, b]$.

Предоставляем читателю сформулировать критерий компактности множества в пространстве $C^{(n)}[a, b]$.

§ 6. Пространства с мерой

6.1. Классическое определение Римана позволяло определить интеграл на классе функций, лишь немного более широком, чем непрерывные функции на отрезке. Потребности анализа (в первую очередь теории тригонометрических рядов) привели к введению в 1902 году французским математиком А. Лебегом понятия меры и понятия интеграла от функций на отрезке, более общего, чем интеграл Римана. Дальнейшие обобщения, сделанные И. Радоном, М. Фреше, К. Каратеодори, привели к построению теории меры на произвольном множестве и построению интеграла по этой мере. Абстрактные пространства с мерой оказались весьма плодотворными в анализе, в теории уравнений, а также в теории вероятностей, где они позволили А. Н. Колмогорову развить современный аксиоматический подход в этой науке (1932 г.).

В этом параграфе мы приведем без доказательств основные факты теории меры и интеграла. От читателя все же требуется свободное владение хотя бы интегралом Лебега на отрезке (см. Натансон — II). Читатель, интересующийся в основном приложениями функционального анализа, изложенными в части II, может абстрактное пространство с мерой считать областью в $\mathbb{R}^n$ или отрезком на прямой с мерой Лебега. Подробное изложение приведенного в этом параграфе материала можно найти в следующих книгах: Акилов, Макаров, Хавин; Бурбаки — IV; Вулих — III; Данфорд, Шварц — I; Заанен — II; Колмогоров, Фомин; Халмош; Шилов, Гуревич. Наше изложение наиболее близко к Вулих — III.

6.2. Пусть T — произвольное множество. Неустая совокупность Σ некоторых его подмножеств называется *алгеброй*, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) если $A, B \in \Sigma$, то $A \cup B \in \Sigma$;
- 2) если $A \in \Sigma$, то и его дополнение $T \setminus A \in \Sigma$.

Из определения легко вывести, что алгебра вместе с любыми двумя множествами A и B содержит их пересечение $A \cap B$ и разность $A \setminus B$. Индукцией получаем, что алгебра замкнута относительно операций объединения и пересечения конечного числа множеств. Отметим также, что всегда $\emptyset \in \Sigma$ и $T \in \Sigma$.

Неустая совокупность Σ подмножеств множества T называется *σ -алгеброй*, если Σ — алгебра, замкнутая по отношению к объединению не только конечного, но и счетного числа множеств, т. е. если

3) из $A_n \in \Sigma$ ($n \in N$) следует, что $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Очевидно, что σ -алгебра замкнута и относительно образования счетного пересечения множеств.

Пусть $\bar{R} = (-\infty, +\infty]$, Σ — некоторая алгебра подмножеств множества T . Функция $\varphi: \Sigma \rightarrow \bar{R}$ называется *аддитивной функцией множества*, если для любой конечной совокупности попарно дизъюнктивных множеств $A_n \in \Sigma$ имеет место равенство

$$\varphi\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \varphi(A_n). \quad (1)$$

Кроме того, всегда предполагаем, что $\varphi(\emptyset) = 0$. Будем говорить, что φ неотрицательна и писать $\varphi \geq 0$, если $\varphi(A) \geq 0$ для любого $A \in \Sigma$.

Аддитивная функция множества $\varphi: \Sigma \rightarrow \bar{R}$, заданная на σ -алгебре Σ , называется *счетно-аддитивной*, если равенство (1) выполнено также для любой счетной совокупности попарно дизъюнктивных множеств $A_n \in \Sigma$.

Мерой на σ -алгебре Σ называется неотрицательная счетно-аддитивная функция множества μ , заданная на Σ .

Мера μ называется *конечной*, если $\mu(T) < \infty$, и *σ -конечной*, если множество T представимо в виде объединения счетной совокупности множеств $A_n \in \Sigma$ таких, что $\mu(A_n) < \infty$. Мера μ называется *полной*, если из $A \subset B \in \Sigma$, $\mu(B) = 0$ следует $A \in \Sigma$ (и, конечно, $\mu(A) = 0$).

Произвольную меру μ можно «пополнить». Именно, обозначим через Σ^* совокупность всех множеств вида $A \cup N$, где $A \in \Sigma$, а $N \subset B \in \Sigma$, $\mu(B) = 0$. Тогда Σ^* будет σ -алгеброй, причем, если область определения μ расширить до Σ^* , полагая $\mu(A \cup N) = \mu(A)$, то продолженная функция будет мерой на Σ^* .

Приведенная конструкция показывает, что обычно можно считать, что мера μ полная.

Мы будем говорить, что (T, Σ, μ) является *пространством с мерой* *), если T — множество, Σ — некоторая σ -алгебра его подмножеств, μ — полная мера на Σ , причем выполнены следующие условия:

1) если множество $A \subset T$ таково, что для любого множества $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$ выполнено $A \cap B \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$;

2) мера μ локально конечна, т. е. для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) > 0$ существует $B \in \Sigma$ такое, что $B \subset A$ и $0 < \mu(B) < \infty$.

Наложенные условия не являются обременительными. Действительно, выполнения условия 1) можно добиться, расширяя σ -алгебру Σ , включив туда множества A , удовлетворяющие 1). Если

*) Обычно в определении пространства с мерой на Σ и μ не накладываются никаких ограничений, но это часто ведет к патологиям (особенно в случае не σ -конечной меры).

же для множества A с $\mu(A) = +\infty$ не выполнено условие 2), то переопределяем меру множества A , полагая $\mu(A) = 0$.

Отметим, что для σ -конечной меры условия 1), 2) выполнены автоматически. Обозначим через $\Sigma(\mu)$ совокупность всех множеств из Σ , имеющих конечную меру. Из 1) и 2) получаем следующее свойство (T, Σ, μ) :

если множество $A \subset T$ таково, что для любого $B \in \Sigma(\mu)$ имеем $A \cap B \in \Sigma$ и $\mu(A \cap B) = 0$, то $A \in \Sigma$ и $\mu(A) = 0$.

6.3. Пусть Σ — алгебра подмножеств множества T , $\varphi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ — аддитивная функция множества. Функции, построенные по функции φ с помощью формул

$$\varphi_+(A) = \sup_{B \subset A, B \in \Sigma} \varphi(B), \quad \varphi_-(A) = \sup_{B \subset A, B \in \Sigma} \{-\varphi(B)\},$$

$$|\varphi|(A) = \varphi_+(A) + \varphi_-(A), \quad A \in \Sigma,$$

называются соответственно *положительной*, *отрицательной* и *полной вариациями* функции φ . Все три функции, φ_+ , φ_- и $|\varphi|$, суть неотрицательные аддитивные функции множества. Полная вариация функции φ может быть определена также по формуле

$$|\varphi|(A) = \sup_{i=1}^n |\varphi(A_i)|,$$

где супремум берется по всевозможным разбиениям множества A на конечное число попарно дизъюнктивных множеств $A_i \in \Sigma$. Если $\varphi(A)$ конечно для $A \in \Sigma$, то

$$|\varphi|(A) = \sup_{\substack{B_1, B_2 \subset A \\ B_1, B_2 \in \Sigma}} \{\varphi(B_1) - \varphi(B_2)\}.$$

Теорема 1. *Для любой конечной аддитивной функции множества φ , заданной на алгебре Σ , имеет место разложение Жордана*

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_-.$$

Отметим, что если Σ — σ -алгебра и функция φ счетно-аддитивна, то ее вариации φ_+ , φ_- и $|\varphi|$ тоже счетно-аддитивны. Для счетно-аддитивных функций имеет место более сильный факт.

Теорема 2 (о разложении в смысле Хана). *Пусть φ — счетно-аддитивная функция множества на σ -алгебре Σ . Тогда найдется такое $A_0 \in \Sigma$, что $\varphi(A) \geq 0$, если $A \in \Sigma$, $A \subset A_0$, и $\varphi(A) \leq 0$, если $A \in \Sigma$, $A \subset T \setminus A_0$.*

Заметим, что в условиях теоремы 2 для любого $A \in \Sigma$ имеем $\varphi_+(A) = \varphi(A \cap A_0)$, $\varphi_-(A) = -\varphi(A \cap (T \setminus A_0))$.

6.4. Пусть T — множество, Σ — некоторая σ -алгебра его подмножеств. Множества из Σ будем называть *измеримыми*. Вещественная функция $x(t)$, заданная на T , называется *измеримой* относительно σ -алгебры Σ , если для любого числа $a \in \mathbb{R}$ измери-

мы ее множества Лебега

$$\begin{aligned} \{t \in T: x(t) > a\}, \quad \{t \in T: x(t) < a\}, \\ \{t \in T: x(t) \geq a\}, \quad \{t \in T: x(t) \leq a\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Измеримой относительно Σ конечнозначной функцией называется функция вида

$$y(t) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{A_i}(t),$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \Sigma$ ($i = 1, 2, \dots, k$), причем множества A_i ($i = 1, 2, \dots, k$) попарно дизъюнкты.

Будем говорить, что последовательность функций $x_n(t)$ на T возрастает ($x_n \uparrow$), если $x_n(t) \leq x_m(t)$ ($t \in T$) при $m \geq n$. Пишем $x_n \uparrow x$, если последовательность $\{x_n\}$ возрастает и $x_n(t) \rightarrow x(t)$ при любом $t \in T$.

Теорема 3. Для любой ограниченной измеримой относительно σ -алгебры Σ функции x существует последовательность измеримых конечнозначных функций $\{x_n\}$, сходящаяся к x равномерно на T . Если $x(t) \geq 0$ ($t \in T$), то дополнительно можно считать, что $x_n \uparrow x$, $x_n(t) \geq 0$ ($t \in T$, $n \in \mathbb{N}$).

Доказательство. Предположим, что $x(t) \geq 0$ ($t \in T$). Пусть $M = \sup_{t \in T} x(t)$. Для $n = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$) и $i = 0, 1, \dots, n-1$ положим

$$A_i^n = \{t \in T: iM/n < x(t) \leq (i+1)M/n\}.$$

Очевидно, что $A_i^n \in \Sigma$. Определим конечнозначную функцию x_n по формуле

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{iM}{n} \chi_{A_i^n}(t).$$

Легко видеть, что $x_n \uparrow$. Действительно, если $m \geq n$ и $t \in T$, то или $x(t) = 0$, а тогда $x_n(t) = x_m(t) = 0$, или t принадлежит некоторому множеству A_i^m , а тогда, так как m и n — степени двойки, A_i^m содержится в некотором A_j^n и потому $i \geq j$. Следовательно, $x_m(t) = iM/m \geq jM/n = x_n(t)$.

Далее, если $t \in A_i^n$, то

$$|x(t) - x_n(t)| = |x(t) - iM/n| \leq M/n,$$

откуда при любом $t \in T$ имеем

$$|x(t) - x_n(t)| \leq M/n.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ равномерно сходится к x . Если функция x произвольна, то, полагая $x_+(t) = \max(x(t), 0)$,

и $x_-(t) = \max(-x(t), 0)$, получаем, что x_+ и x_- — неотрицательные измеримые ограниченные функции и $x = x_+ - x_-$. Применяя к x_+ и x_- доказанный результат, заключаем доказательство теоремы.

Следствие. Для любой измеримой функции x существует последовательность измеримых конечнозначных функций $\{x_n\}$ такая, что $x_n(t) \rightarrow x(t)$ и $|x_n(t)| \leq |x(t)|$ при всех $t \in T$. Если $x(t) \geq 0$ ($t \in T$), то можно считать, что $x_n \uparrow x$, $x_n(t) \geq 0$ ($t \in T$, $n \in \mathbb{N}$).

Доказательство. Рассмотрим «срезы» $[x]_n$ ($n \in \mathbb{N}$) функции $x(t)$, определяемые по формуле

$$[x]_n(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } |x(t)| \leq n, \\ 0, & \text{если } |x(t)| > n. \end{cases}$$

Функции $[x]_n$ измеримы и ограничены, поэтому, если $x(t) \geq 0$ ($t \in T$), то в силу теоремы 3 при каждом $n \in \mathbb{N}$ найдется такая измеримая конечнозначная функция $y_n(t)$, что $|[x]_n(t) - y_n(t)| < 1/n$, $0 \leq y_n(t) \leq [x]_n(t)$ для всех $t \in T$. Очевидно, что последовательность функций

$$x_n(t) = \max_{h=1}^n y_h(t)$$

является искомой. В общем случае, как и при доказательстве теоремы 3, представим $x = x_+ - x_-$. Если $0 \leq x'_n \uparrow x_+$ и $0 \leq y'_n \uparrow x_-$, где x'_n, y'_n — конечнозначные функции, то последовательность $x_n(t) = x'_n(t) - y'_n(t)$ — искомая.

Важнейшим понятием теории измеримых функций является понятие интеграла. Пусть даны σ -алгебра Σ подмножеств множества T и конечная счетно-аддитивная функция φ на Σ . Тогда из совокупности всех измеримых функций можно выделить класс функций, называемых *суммируемыми* (по функции φ), которым сопоставлено некоторое конечное число, называемое *интегралом* (Радона)*. Интеграл функции $x(t)$ (по множеству T) обозначается одним из следующих способов:

$$\int_T x(t) d\varphi(t), \quad \int_T x(t) d\varphi, \quad \int_T x d\varphi.$$

Аналогичным образом может рассматриваться интеграл по произвольному множеству $A \in \Sigma$.

Отметим важнейшие свойства интеграла.

*) Мы не будем приводить определение интеграла, отсылая к литературе, цитированной в начале параграфа.

1) Линейность *):

$$\int_A (\lambda x + \mu y) d\varphi = \lambda \int_A x d\varphi + \mu \int_A y d\varphi, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

$$2) \int_A x d\varphi = \int_A x d\varphi_+ - \int_A x d\varphi_-, \quad \left| \int_A x d\varphi \right| \leq \int_A |x| d|\varphi|.$$

3) Если φ — мера и $x(t) \geq 0$ ($t \in A$), то $\int_A x d\varphi \geq 0$. Если, кроме того, $\int_A x d\varphi = 0$, то $\varphi(\{t \in A: x(t) > 0\}) = 0$.

4) Если x — измеримая ограниченная функция, то существует $\int_A x d\varphi$ ($A \in \Sigma$).

5) Функция множества $v(A) = \int_A x d\varphi$ ($A \in \Sigma$) является счетно-аддитивной.

Имеется и много других важных свойств, с частью которых мы познакомимся дальше.

В том случае, когда φ — мера, расширим понятие интеграла, разрешив ему принимать и бесконечные значения.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с конечной мерой. Если измеримая функция $x(t) \geq 0$ ($t \in A$) не суммируема на множестве $A \in \Sigma$, то полагаем $\int_A x(t) d\mu = +\infty$.

Для произвольной измеримой функции $x(t)$, как и выше, определяем $x_+(t) = \max(x(t), 0)$, $x_-(t) = \max(-x(t), 0)$ и, если хотя бы один из двух интегралов $\int_A x_+ d\mu$, $\int_A x_- d\mu$ конечен, полагаем

$$\int_A x d\mu = \int_A x_+ d\mu - \int_A x_- d\mu. \quad (3)$$

Если оба вышеупомянутых интеграла бесконечны, то функция $x(t)$ интеграла не имеет.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с бесконечной мерой, $\Sigma(\mu)$ — совокупность всех множеств конечной меры. Используя условие 1) из 6.2, получаем, что функция $x(t)$ является измеримой тогда и только тогда, когда для любого $A \in \Sigma(\mu)$ функция $x(t)\chi_A(t)$ измерима.

Для множества A (бесконечной меры) и измеримой функции $x(t) \geq 0$ ($t \in A$) положим

$$\int_A x(t) d\mu = \sup \left\{ \int_B x(t) d\mu: B \in \Sigma(\mu), B \subset A \right\}, \quad A \in \Sigma$$

(эта формула тривиальным образом верна, если $A \in \Sigma(\mu)$).

*) По определению $(\lambda x + \mu y)(t) = \lambda x(t) + \mu y(t)$.

Для произвольной измеримой функции x интеграл определяем по формуле (3) с теми же соглашениями о его существовании, как и выше. Построенный интеграл обладает свойствами 1), 3), 5). Как и выше, функции, для которых конечен интеграл $\int_A x d\mu$, называются *суммируемыми на $A \in \Sigma$* , а если $A = T$, то — просто *суммируемыми*.

Рассмотрим теперь вопрос о перенесении изложенной теории на случай функций с комплексными значениями. Пусть $x: T \rightarrow \mathbb{C}$ — комплексная функция. Положим $y(t) = \operatorname{Re} x(t)$, $z(t) = \operatorname{Im} x(t)$. Функция $x(t)$ называется *измеримой (суммируемой)*, если измеримы (суммируемы) обе вещественные функции $y(t)$ и $z(t)$. Если $y(t)$ и $z(t)$ суммируемы, то полагаем

$$\int_A x(t) d\mu = \int_A y(t) d\mu + i \int_A z(t) d\mu.$$

Иногда бывает удобно иметь дело с функциями, принимающими и бесконечные значения. По-прежнему функция $x: T \rightarrow [-\infty, +\infty]$ называется *измеримой* относительно σ -алгебры Σ , если измеримы все ее множества Лебега (2).

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой. Если для измеримой функции $x: T \rightarrow [-\infty, +\infty]$ обозначить

$$A_{\infty}^{+} = \{t \in T: x(t) = +\infty\},$$

$$A_{\infty}^{-} = \{t \in T: x(t) = -\infty\}, \quad A_{\infty} = A_{\infty}^{+} \cup A_{\infty}^{-},$$

то в случае, когда $\mu(A_{\infty}) = 0$ и интеграл $\int_{T \setminus A_{\infty}} x d\mu$ определен,

полагаем $\int_T x d\mu = \int_{T \setminus A_{\infty}} x d\mu$; если $\mu(A_{\infty}^{+}) > 0$, $\mu(A_{\infty}^{-}) = 0$, полагаем

$\int_T x d\mu = +\infty$, и, наконец, если $\mu(A_{\infty}^{-}) > 0$, $\mu(A_{\infty}^{+}) = 0$, полагаем

$\int_T x d\mu = -\infty$. В остальных случаях интеграл не определен.

Как и прежде, функция $x(t)$ называется *суммируемой*, если $\int_T x d\mu$ конечен, т. е. когда $\mu(A_{\infty}) = 0$ и функция $x \chi_{T \setminus A_{\infty}}$ суммируема. Интеграл $\int_A x d\mu$ определяется аналогичным образом.

Если функция $x(t)$ задана лишь на множестве $T \setminus A$, где $\mu(A) = 0$, то она называется *измеримой (на T)*, если она изме-

рима на $T \setminus A$. Если определен $\int_{T \setminus A} x d\mu$, то полагаем $\int_{T \setminus A} x d\mu = \int_{T \setminus A} x d\mu$.

Во всех дальнейших определениях и теоремах этого параграфа мы предполагаем, что функции принимают значения в расширенной вещественной прямой или в поле комплексных чисел, с тем ограничением, что если по условию к функциям применен знак неравенства, то эти функции принимают значения в $[-\infty, +\infty]$.

6.5. Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой. Будем говорить, что некоторое свойство выполнено *почти всюду* (сокращенно — п. в.), если оно выполнено всюду, кроме, быть может, множества меры нуль. Например, если x и y — измеримые функции, то $x(t) \geq y(t)$ п. в. означает, что $\mu(\{t: x(t) < y(t)\}) = 0$. Измеримые функции x и y называются *эквивалентными*, если $x(t) = y(t)$ п. в. В силу условия 2) из 6.2 это равносильно тому, что для любого $A \in \Sigma(\mu)$ имеем $x(t) = y(t)$ при почти всех $t \in A$. Интеграл «не различает» свойства, выполненные почти всюду и всюду. Например, если $x(t) = y(t)$ п. в., то $\int x d\mu = \int y d\mu$.

Далее, в этом параграфе, если не оговорено противное, мы предполагаем все функции измеримыми и почти всюду конечными, т. е. $\mu(\{t \in T: x(t) = +\infty \text{ или } x(t) = -\infty\}) = 0$.

Пренебрегать множествами меры нуль часто можно не только при рассмотрении функций, но и при рассмотрении измеримых множеств из Σ . В связи с этим введем следующие обозначения. Запись $A \subset B \pmod{\mu}$ для $A, B \in \Sigma$ означает, что $\mu(A \setminus B) = 0$; $A = B \pmod{\mu}$ — что $A \subset B \pmod{\mu}$ и $B \subset A \pmod{\mu}$. Множества A и B называются (μ) -*дизъюнктными*, если $\mu(A \cap B) = 0$. С совокупность множеств $\{A_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$), $A_\xi \in \Sigma$, называется (μ) -*разбиением* множества T , если множества A_ξ попарно (μ) -дизъюнктны и $T = \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi \pmod{\mu}$.

Говорят, что последовательность измеримых функций $\{x_n(t)\}$ *почти всюду сходится* к функции $x(t)$, если $\mu(\{t: x_n(t) \not\rightarrow x(t)\}) = 0$. (Отметим, что даже если не предполагать с самого начала измеримость предельной функции $x(t)$, то ее измеримость легко доказывается.) Для сходимости почти всюду используем запись $x_n \rightarrow x$ п. в.

Пусть функции $x_n(t)$ ($n \in \mathbb{N}$) и $x(t)$ измеримы, $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$. Говорят, что последовательность $\{x_n(t)\}$ *сходится по мере* на множестве A к функции $x(t)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{t \in A: |x_n(t) - x(t)| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

В случае произвольной меры $\mu(A)$ говорят, что последовательность $\{x_n(t)\}$ *сходится по мере* на множестве A к функций

$x(t)$, если $\{x_n(t)\}$ сходится по мере к $x(t)$ на любом множестве $B \in \Sigma$, $B = A$, $\mu(B) < \infty$ *). Для сходимости по мере (на T) используем запись $x_n \rightarrow x(\mu)$. Аналогичным образом определяется сходимость по мере направления $\{x_\alpha(t)\}$ измеримых функций к измеримой функции $x(t)$ ($x_\alpha \rightarrow x(\mu)$). Связь между сходимостями почти всюду и по мере описывает

Теорема 4. 1) Если $x_n \rightarrow x$ п. в., то $x_n \rightarrow x(\mu)$.

2) Если (T, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой и $x_n \rightarrow x(\mu)$, то найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $x_{n_k} \rightarrow x$ п. в.

Из теоремы 4 вытекает, что операции сложения и умножения двух функций непрерывны относительно сходимости по мере.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой. Множество $A \in \Sigma$ называется атомом, если $\mu(A) \neq 0$, и из того, что $B \in \Sigma$, $B \subset A$, вытекает, что либо $\mu(A) = \mu(B)$, либо $\mu(B) = 0$. Условие 2) из 6.2 можно теперь выразить так: μ не имеет атомов бесконечной меры. Говорят, что (T, Σ, μ) — пространство с дискретной мерой, если $T = \bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha \cup N$, где $T_\alpha (\alpha \in A)$ — атомы, а $\mu(N) = 0$. Говорят, что (T, Σ, μ) — пространство с непрерывной мерой, если в нем нет атомов. Можно показать, что в пространстве с непрерывной мерой всегда существует последовательность измеримых функций $\{x_n\}$ такая, что $x_n \rightarrow x(\mu)$, но $x_n \not\rightarrow x$ п. в.

Различные факты о сходимости почти всюду собраны в следующей теореме.

Теорема 5. Пусть (T, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой.

1) (Теорема об устойчивости сходимости.) Если последовательность $x_n \rightarrow 0$ п. в., то существует такая возрастающая последовательность положительных чисел $\lambda_n \rightarrow +\infty$, что $\lambda_n x_n(t) \rightarrow 0$ п. в.

2) (Теорема о регуляторе сходимости.) Если последовательность $x_n \rightarrow 0$ п. в., то существуют такая измеримая, почти всюду конечная, неотрицательная функция $y(t)$ на T и такая последовательность положительных чисел $\epsilon_n \rightarrow 0$, что $|x_n(t)| \leq \epsilon_n y(t)$ п. в.

3) (Теорема о диагональной последовательности.) Если $x_{n_k} \rightarrow x_k$ п. в. при любом $k \in \mathbb{N}$ и $x_k \rightarrow x$ п. в., то существует последовательность $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ такая, что «диагональная» последовательность $x_{n_k k} \rightarrow x$ п. в.

4) (Теорема Егорова.) Если $\mu(T) < \infty$ и последовательность $x_n \rightarrow x$ п. в., то для любого $\epsilon > 0$ существует такое $A \in \Sigma$, что $\mu(A) < \epsilon$ и $x_n(t) \rightarrow x(t)$ равномерно на множестве $T \setminus A$.

*) В случае бесконечной меры приведенное определение отличается от общепринятого. Это объясняется патологическими свойствами обычной сходимости по мере в этом случае.

6.6. В этом пункте мы соберем различные теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой.

Теорема 6 (Лебег). Пусть $\{x_n(t)\}$ — последовательность суммируемых функций и $x_n \rightarrow x(\mu)$. Если существует такая неотрицательная суммируемая функция $y(t)$, что $|x_n(t)| \leq y(t)$ п. в. ($n \in \mathbb{N}$), то функция $x(t)$ тоже суммируема и

$$\lim \int_T x_n d\mu = \int_T x d\mu. \quad (4)$$

Теорема 7 (Б. Леви). Если $x_n(t) \geq 0$ п. в. и $x_n \uparrow x$ п. в., то выполнено (4).

Отметим, что теорема 7 верна и в том случае, если функция x не предполагается почти всюду конечной.

Следствие. Если функции $y_k(t) \geq 0$ п. в., суммируемы и $\sum_{k=1}^{\infty} \int_T y_k d\mu < +\infty$, то $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)$ почти всюду конечна и

$$\int_T x d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_T y_k d\mu.$$

Действительно, положим $x_n(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t)$. Тогда $x_n \uparrow x$ п. в., причем функция x может априори оказаться бесконечной на множестве положительной меры. В силу сделанного к теореме 7 замечания имеем $\int_T x d\mu = \lim \int_T x_n d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_T y_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_T y_k d\mu < \infty$.

Следовательно, функция x суммируема, а потому и почти всюду конечна.

Теорема 8 (Фату). Если $x_n(t) \geq 0$ п. в. и $x_n \rightarrow x(\mu)$, то

$$\int_T x d\mu \leq \sup_n \int_T x_n d\mu.$$

Отметим, что из теорем 6 и 8 легко получить их аналоги для направлений $x_\alpha \rightarrow x(\mu)$.

6.7. В этом пункте мы сформулируем теорему Радона — Инкодима, играющую фундаментальную роль в приложениях теории меры к функциональному анализу.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой, φ — счетно-аддитивная функция на Σ . Тогда φ называется абсолютно непрерывной относительно μ , если из $\mu(A) = 0$ следует $\varphi(A) = 0$. Функция φ называется сингулярной относительно μ , если существует такое множество $A_0 \in \Sigma$, что

$$\mu(A_0) = 0, \quad \varphi(A) = \varphi(A \cap A_0), \quad A \in \Sigma.$$

Теорема 9. Если φ — конечная счетно-аддитивная функция на Σ , то φ однозначно представима в виде суммы $\varphi(A) = \nu(A) + \lambda(A)$, $A \in \Sigma$, где ν и λ — счетно-аддитивные функции на Σ , причем ν абсолютно непрерывна, а λ сингулярна относительно μ .

Представление $\varphi = \nu + \lambda$ называется разложением в смысле Лебега. Очевидно, что если x — суммируемая функция, то функция множества $\nu(A) = \int_A x d\mu$ ($A \in \Sigma$) абсолютно непрерывна относительно μ .

Теорема Радона — Никодима показывает, что все абсолютно непрерывные функции получаются таким способом.

Теорема 10 (Радон — Никодим). Пусть (T, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой, ν — определенная на Σ конечная абсолютно непрерывная относительно μ функция множества. Тогда существует (единственная с точностью до меры нуль) суммируемая по мере μ функция $x(t)$ на T такая, что

$$\nu(A) = \int_A x d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

При этом функция множества ν неотрицательна тогда и только тогда, когда $x(t) \geq 0$ п. в.

6.8. Цель этого пункта — определить произведение пространств с мерой. Это понятие играет важную роль при исследовании интегральных операторов.

Пусть (S, Σ_s, ν) и (T, Σ_t, μ) — пространства с σ -конечной мерой. Через Σ_R^0 обозначим наименьшую σ -алгебру подмножеств множества $R = S \times T$, содержащую все множества вида $B \times A$, где $B \in \Sigma_s$, $A \in \Sigma_t$. Можно доказать, что на σ -алгебре Σ_R^0 существует единственная мера λ такая, что

$$\lambda(B \times A) = \nu(B)\mu(A)$$

для любых $B \in \Sigma_s$, $A \in \Sigma_t$. (Мы считаем, что $a \cdot (+\infty) = +\infty$, если $a \neq 0$, и $0 \cdot (+\infty) = 0$.) «Пополним» меру λ , как это описано в 6.2. Получившуюся σ -алгебру обозначим через Σ_R , а меру — через λ . Построенное пространство (R, Σ_R, λ) с полной σ -конечной мерой называется произведением пространств (S, Σ_s, ν) и (T, Σ_t, μ) , а мера λ — произведением мер ν и μ , что иногда будет обозначаться так: $\lambda = \nu \times \mu$.

Наиболее известный пример произведения мер получится, если в качестве сомножителей мы возьмем отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега. Произведением этих мер будет мера Лебега на единичном квадрате.

Для краткости функции, измеримые относительно соответственно Σ_s , Σ_t или Σ_R , мы будем называть соответственно ν -, μ - или λ -измеримыми.

Приведем две теоремы о вычислении интеграла относительно произведения мер при помощи двукратного взятия интегралов относительно каждой меры-сомножителя.

Теорема 11 (Фубини). Пусть функция $K(s, t) (s \in S, t \in T)$ суммируема относительно меры $\lambda = \nu \times \mu$. Тогда для почти всех относительно ν точек $s \in S$ функция $K_s(t) = K(s, t)$ суммируема по мере μ . Далее, функция $H(s) = \int_T K(s, t) d\mu(t)$ суммируема по мере ν и

$$\int_R K(s, t) d\lambda(s, t) = \int_S \left\{ \int_T K(s, t) d\mu(t) \right\} d\nu(s).$$

Для неотрицательных функций теорему Фубини можно усилить.

Теорема 12 (Тонелли). Пусть $K(s, t)$ — λ -измеримая неотрицательная функция на R . Тогда для почти всех относительно ν точек $s \in S$ функция $K_s(t) = K(s, t)$ μ -измерима. Кроме того, функция $H_s = \int_T K(s, t) d\mu(t)$ (принимаяющая бесконечные значения, быть может, на множестве положительной меры) ν -измерима и

$$\int_R K(s, t) d\lambda(s, t) = \int_S \left\{ \int_T K(s, t) d\mu(t) \right\} d\nu(s)$$

независимо от того, конечные или бесконечные значения принимают эти интегралы.

Отметим ещё некоторые свойства произведения пространств с мерой.

1) Если меры μ и ν конечны, то для любого множества $C \in \Sigma_R$ и всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется множество $C_1 = \bigcup_{k=1}^n (B_k \times A_k)$, где $B_k \in \Sigma_S$, $A_k \in \Sigma_T$, такое, что $\int_R |\chi_C(s, t) - \chi_{C_1}(s, t)| d\lambda(s, t) < \varepsilon$.

2) Если функция $K(s, t)$ λ -суммируема и для любых $A \in \Sigma_T(\mu)$, $B \in \Sigma_S(\nu)$ имеем

$$\int_{B \times A} K(s, t) d\lambda(s, t) \geq 0,$$

то $K(s, t) \geq 0$ λ -п. в.

6.9. Первоначально теория меры была тесно связана с топологией, и меры долго строились только на некоторых классах топологических пространств. Потом усилия ряда математиков (и прежде всего К. Каратеодори) привели к построению теории абстрактных пространств с мерой, краткую сводку результатов которой мы привели в предыдущих пунктах. Некоторые факты теории меры, связанные с топологией, мы приведем в этом пункте.

Пусть K — компакт. Наименьшая σ -алгебра $\mathcal{B}$, содержащая все замкнутые множества из K , называется борелевской σ -алгеброй компакта K , а множества из $\mathcal{B}$ — его борелевскими множествами.

Счетно-аддитивная конечная функция множества φ , определенная на некоторой σ -алгебре Σ подмножеств компакта K , содержащей все замкнутые множества, называется *регулярной*, если для любого $A \in \Sigma$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие замкнутое множество F и открытое множество G , что $F \subset A \subset G$ и $|\varphi|(G \setminus F) < \varepsilon$. Если φ регулярна, то регулярны и ее вариации φ_+ , φ_- , $|\varphi|$.

Пусть μ_0 — регулярная мера, заданная на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}$. Пополним ее так, как это было описано в 6.2. Полученную, более широкую, σ -алгебру обозначим через Σ , а продолженную меру — через μ . Таким способом получается, например, мера Лебега на компакте в $\mathbb{R}^n$ из меры Бореля. Меру Лебега множества A в $\mathbb{R}^n$ мы будем обозначать $\text{mes}(A)$. Итак, пусть μ и Σ обозначают то же, что и выше. Измеримость функций на K мы будем понимать относительно σ -алгебры Σ , а термин п. в. относительно меры μ . Очевидно, что любая непрерывная функция измерима. Следующая теорема показывает, что любая измеримая функция непрерывна на множествах, аппроксимирующих компакт K относительно меры μ .

Теорема 13 (Лузин). *Для п. в. конечной функции $x(t)$ на компакте K следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) $x(t)$ измерима;
- 2) для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $F \subset K$, что $\mu(K \setminus F) < \varepsilon$ и сужение функции $x(t)$ на F непрерывно;
- 3) для всякого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество $F \subset K$ и непрерывная функция $y(t)$ на K такие, что $\mu(K \setminus F) < \varepsilon$, $x(t) = y(t)$ при $t \in F$ и $\sup_{t \in F} |x(t)| = \sup_{t \in K} |y(t)|$.

Из теоремы Лузина легко получить теорему Фреше, утверждающую, что любая измеримая п. в. конечная функция $x(t)$ на K является пределом относительно сходимости п. в. последовательности непрерывных функций.

В заключение нашего обзора теории меры и интеграла остановимся на функциях множества с комплексными значениями. Точно так же, как в вещественном случае, для них можно определить аддитивность, счетную аддитивность, полную вариацию, а также понятие регулярности. Если $\varphi: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ счетно-аддитивна, то рассмотрим вещественные счетно-аддитивные функции $\varphi_1(A) = \text{Re } \varphi(A)$, $\varphi_2(A) = \text{Im } \varphi(A)$. Тогда интеграл можно ввести по формуле $\int_A x(t) d\varphi = \int_A x(t) d\varphi_1 + i \int_A x(t) d\varphi_2$. Комплексные функции множества будут нам нужны очень редко, поэтому, если не оговорено противное, все функции множества предполагаются вещественными.

6.10. Фундаментальную роль в этой книге будут играть различные пространства измеримых функций. Здесь мы рассмотрим свойства пространства всех измеримых функций.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой. Обозначим через $S(T, \Sigma, \mu)$ совокупность всех измеримых функций, заданных на T и почти всюду конечных. При этом мы условимся отождествлять друг с другом эквивалентные между собой функции, т. е. мы будем считать их одним и тем же элементом пространства $S(T, \Sigma, \mu)$. Таким образом, в дальнейшем элементы пространства $S(T, \Sigma, \mu)$ суть классы эквивалентных между собой функций и если $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ — класс эквивалентных функций, то через $x(t)$ будем обозначать любую измеримую функцию из этого класса (при этом всегда можно считать, что функция $x(t)$ принимает только конечные значения).

Если мера μ σ -конечна, то $S(T, \Sigma, \mu)$ можно превратить в метрическое пространство, в котором сходимость относительно метрики будет совпадать со сходимостью по мере.

Итак, пусть далее μ , если не оговорено противное, σ -конечна. Построим метрику в $S(T, \Sigma, \mu)$. Для этого возьмем измеримую функцию $f(t)$ на T , удовлетворяющую условиям

$$f(t) > 0 \text{ при любом } t \in T; \quad \int_T f(t) d\mu(t) = 1. \quad (5)$$

Такие функции $f(t)$ существуют. Действительно, так как мера μ σ -конечна, то $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, где множества T_n попарно дизъюнкты и $0 < \mu(T_n) < \infty$ ($n \in \mathbb{N}$). Положим

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(T_n)} \chi_{T_n}(t).$$

Тогда функция $f(t)$ удовлетворяет условиям (5). Если $\mu(T) < \infty$, то можно положить $f(t) = 1/\mu(T)$ ($t \in T$). Для любых элементов $x, y \in S(T, \Sigma, \mu)$ определим расстояние между ними по формуле

$$\rho(x, y) = \int_T \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} f(t) d\mu(t). \quad (6)$$

Интеграл в формуле (6) конечен, так как функция f суммируема, а первый сомножитель принимает значения между 0 и 1. Очевидно, что $\rho(x, y)$ не зависит от выбора эквивалентных функций $x(t)$ и $y(t)$ из соответствующих классов. Проверим выполнение аксиом метрического пространства (см. 3.1).

Так как подынтегральная функция в (6) неотрицательна, то $\rho(x, y) \geq 0$. Ясно также, что $\rho(x, x) = 0$.

Пусть $\rho(x, y) = 0$. Тогда почти всюду $\frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} = 0$, откуда $x(t) = y(t)$ п. в., а такие функции в пространстве $S(T, \Sigma, \mu)$ отождествляются. Следовательно, выполнено условие 1) из опре-

деления метрического пространства. Выполнение условия 2) очевидно. Из неравенства (2) § 3 получаем, что для любых $x, y, z \in S(T, \Sigma, \mu)$ и почти всех $t \in T$ имеем

$$\frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} \leq \frac{|x(t) - z(t)|}{1 + |x(t) - z(t)|} + \frac{|y(t) - z(t)|}{1 + |y(t) - z(t)|}. \quad (7)$$

Чтобы получить неравенство треугольника, надо умножить неравенство (7) на $f(t)$ и проинтегрировать получившееся неравенство.

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — две функции, удовлетворяющие условиям (5), и ρ_f и ρ_g — построенные по ним метрики (6). Если функции f и g не эквивалентны, то $\rho_f \neq \rho_g$. Однако, как показывает, например, нижеследующая теорема, топологии, порождаемые этими метриками, совпадают.

Теорема 14. Последовательность $\{x_n\} \subset S(T, \Sigma, \mu)$ сходится к $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ по метрике тогда и только тогда, когда $x_n \rightarrow x(\mu)$.

Доказательство. Пусть $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$. Для $\varepsilon > 0$ положим $A_n(\varepsilon) = \{t \in T: |x_n(t) - x(t)|f(t) \geq \varepsilon\}$. Пользуясь тем, что $\varphi(\lambda) = \lambda/(1 + \lambda)$ — возрастающая функция, будем иметь

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x) &= \int_T \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} f(t) d\mu(t) \geq \\ &\geq \int_{A_n(\varepsilon)} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} f(t) d\mu(t) \geq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \mu[A_n(\varepsilon)]. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mu[A_n(\varepsilon)] \rightarrow 0$, откуда $x_n f \rightarrow x f(\mu)$. Так как $f(t) > 0$ ($t \in T$), то $x_n = (x_n f)/f \rightarrow (x f)/f = x(\mu)$.

Наоборот, если $x_n \rightarrow x(\mu)$, то, очевидно,

$$\frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} f(t) \rightarrow 0(\mu).$$

Так как функция f суммируема, то по теореме Лебега допустим предельный переход под знаком интеграла:

$$\rho(x_n, x) = \int_T \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} f(t) d\mu(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Замечание. Аналогичное теореме 14 утверждение имеет место и для направлений.

Если $\rho(x_\alpha, x) \rightarrow 0$, то доказательство того, что $x_\alpha \rightarrow x(\mu)$, проводится так же как в теореме. Пусть $x_\alpha \rightarrow x(\mu)$, но $\rho(x_\alpha, x) \neq 0$. Тогда найдутся $\delta > 0$ и поднаправление $\{y_\beta\}$ такие, что $\rho(y_\beta, x) \geq \delta$ при любом β . Так как функция f суммируема, то найдется множество $A \in \Sigma(\mu)$, для которого $\int_{T \setminus A} f d\mu < \delta/2$. В силу того, что $y_\beta \rightarrow x(\mu)$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует β_n , для которого

$\mu(\{t \in A: |y_{\beta_n}(t) - x(t)| > 1/n\}) < 1/n$. Тогда, очевидно, $y_{\beta_n} \rightarrow x(\mu)$ на A и по теореме 14

$$\begin{aligned} \rho(y_{\beta_n}, x) &= \int_A \frac{|x_{\beta_n} - x|}{1 + |y_{\beta_n} - x|} f d\mu + \int_{T \setminus A} \frac{|y_{\beta_n} - x|}{1 + |y_{\beta_n} - x|} f d\mu < \\ &< \int_A \frac{|y_{\beta_n} - x|}{1 + |y_{\beta_n} - x|} f d\mu + \frac{\delta}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

что противоречит $\rho(y_{\beta_n}, x) \geq \delta > 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

Теорема 15. $S(T, \Sigma, \mu)$ — полное метрическое пространство.

Доказательство. Возьмем сходящуюся в себе последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства $S(T, \Sigma, \mu)$.

Пусть n_k таково, что при $n \geq n_k$ будет $\rho(x_n, x_{n_k}) < 2^{-k}$. Можно считать, что $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ и, следовательно, $n_k \rightarrow \infty$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_T \frac{|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|}{1 + |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|} f(t) d\mu(t),$$

очевидно, сходится. Но если сходится ряд интегралов от положительных функций, то в силу следствия теоремы 7 сходится почти всюду ряд из самих функций, т. е. почти всюду сходится

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)$, где

$$\alpha_k(t) = \frac{|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|}{1 + |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|}.$$

Если при некотором t указанный ряд сходится, то при достаточно больших k будет $|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| \leq 1$. Следовательно, для этих k справедливо неравенство $|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| \leq 2\alpha_k(t)$. Таким

образом, сходится почти всюду ряд $x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t))$.

Обозначим его сумму через $x_0(t)$. Это — измеримая функция. Так как в силу сходимости ряда почти всюду $x_{n_k}(t) \rightarrow x_0(t)$, то тем более имеет место сходимости по мере, что и означает сходимости в пространстве $S(T, \Sigma, \mu)$, и поэтому $\rho(x_{n_k}, x_0) \rightarrow 0$.

Мы получили сходимости частичной последовательности. Но так как при $k \rightarrow \infty$ и $n_k \rightarrow \infty$, то из неравенства $\rho(x_k, x_0) \leq \rho(x_k, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$ следует, что $\rho(x_k, x_0) \rightarrow 0$, т. е. $x_k \rightarrow x_0$ в $S(T, \Sigma, \mu)$.

Важные частные случаи мы получим, если в качестве (T, Σ, μ) возьмем отрезок $[a, b]$ с мерой Лебега, в этом случае $S(T, \Sigma, \mu)$

будем обозначать $S(a, b)$, или, когда множество $T = N$, σ -алгебра Σ есть совокупность всех подмножеств натурального ряда, а мера каждой точки из T равна единице, в этом случае мы получим пространство s , введенное в § 3.

Рассмотрим теперь вопрос о сепарабельности метрического пространства $S(T, \Sigma, \mu)$. Предварительно отметим, что в силу следствия теоремы 3 множество измеримых конечнозначных функций плотно в $S(T, \Sigma, \mu)$.

Определим на множестве Σ , в котором мы будем отождествлять множества A и B такие, что $A = B \pmod{\mu}$, метрику ρ_μ по формуле

$$\rho_\mu(A, B) = \rho(\chi_A, \chi_B); \quad A, B \in \Sigma.$$

Мера μ называется *сепарабельной*, если она σ -конечна и метрическое пространство (Σ, ρ_μ) сепарабельно.

Теорема 16. Пусть мера μ σ -конечна. Метрическое пространство $S(T, \Sigma, \mu)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда мера μ сепарабельна.

Доказательство. Пусть пространство $S(T, \Sigma, \mu)$ сепарабельно. Рассмотрим множество $H = \{\chi_A : A \in \Sigma\}$, которое можно отождествить с Σ . Так как метрики ρ и ρ_μ совпадают на Σ и в метрических пространствах сепарабельность наследственна (см. 4.4), то множество H (а тогда и Σ) сепарабельно.

Пусть, наоборот, мера μ сепарабельна. Обозначим через Σ_0 счетное всюду плотное множество в Σ . Рассмотрим множество

$$M = \left\{ \sum_{k=1}^m r_k \chi_{A_k} : A_k \in \Sigma_0, \quad m \in N \right\}, \text{ где } r_k \text{ — всевозможные рациональные числа.}$$

Множество M , очевидно, счетно. Покажем, что M плотно в $S(T, \Sigma, \mu)^*$. Как уже отмечалось, множество конечнозначных функций плотно в $S(T, \Sigma, \mu)$, а тогда, очевидно, и множество конечнозначных функций с рациональными коэффициентами — тоже. Итак, достаточно приблизить функциями из M функ-

цию вида $y(t) = \sum_{k=1}^m r_k \chi_{A_k}(t)$, где r_k рациональны, $A_k \in \Sigma$. Так

как Σ_0 плотно в Σ , то найдутся такие последовательности $\{A_k^n\}_{n=1}^\infty$ ($k = 1, 2, \dots, m$) в Σ_0 , что $\rho_\mu(A_k^n, A_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Тогда

$\rho(\chi_{A_k^n}, \chi_{A_k}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, откуда $M \ni \sum_{k=1}^m r_k \chi_{A_k^n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(t)(\mu)$, что и требовалось доказать.

* В комплексном случае надо рассмотреть

$$M = \left\{ \sum_{k=1}^m (r_k + i s_k) \chi_{A_k} : A_k \in \Sigma_0, \quad m \in N \right\},$$

где r_k и s_k — всевозможные рациональные числа.

Отметим, что мера Лебега на произвольном измеримом подмножестве в $\mathbb{R}^n$ сепарабельна. Действительно, если D — произвольное измеримое подмножество в $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега, то обозначим через $S(D)$ соответствующее пространство измеримых функций. Покажем, что $S(D)$ сепарабельно.

Пусть сначала D есть B_m — шар радиуса m в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле. Тогда B_m — метрический компакт. Как будет доказано ниже (см. теорему IV.4.3), пространство непрерывных функций $C(B_m)$ сепарабельно. Так как топология, индуцированная на $C(B_m)$ из $S(B_m)$, очевидно, слабее обычной топологии $C(B_m)$, то $C(B_m)$ в индуцированной топологии и подавно сепарабельно. Однако в силу замечания после теоремы 13 непрерывные функции плотны в $S(B_m)$, что и доказывает сепарабельность $S(B_m)$. Если $x \in S(\mathbb{R}^n)$, то $x_m(t) = x(t) \chi_{B_m}(t) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}^n$. Следовательно,

$\bigcup_{m=1}^{\infty} S(B_m)$ плотно в $S(\mathbb{R}^n)$, а тогда объединение счетных всюду плотных множеств из $S(B_m)$, взятое по $m \in \mathbb{N}$, плотно в $S(\mathbb{R}^n)$, чем доказана сепарабельность $S(\mathbb{R}^n)$. Если множество D произвольно, то $S(D)$ сепарабельно, так как его можно отождествить с подпространством в $S(\mathbb{R}^n)$.

Закончим мы этот параграф рассмотрением порядковых свойств вещественного пространства $S(T, \Sigma, \mu)$.

Введем в вещественном пространстве $S(T, \Sigma, \mu)$ упорядочение, полагая $x \leq y$ ($x, y \in S(T, \Sigma, \mu)$), если $x(t) \leq y(t)$ п. в.

Пусть M — ограниченное сверху подмножество в $S(T, \Sigma, \mu)$, т. е. существует такой элемент $y \in S(T, \Sigma, \mu)$, что $x \leq y$ для любого $x \in M$. Если множество M счетно, то, очевидно, существует $x_0 = \sup M$ в упорядоченном пространстве $S(T, \Sigma, \mu)$, причем x_0 является классом эквивалентных функций, куда входит функция

$$x_0(t) = \sup \{x(t) : x \in M\}, \quad t \in T. \quad (8)$$

Функция $x_0(t)$ зависит от того, какие функции $x(t)$ из классов $x \in M$ мы выберем, но так как множество M счетно, то по формуле (8) мы будем получать эквивалентные между собой функции. Если же M несчетно, то такое определение $\sup M$, вообще говоря, невозможно, поскольку в этом случае функция, определяемая формулой (8), может оказаться неизмеримой или, при разном выборе представителей $x(t)$ ($x \in M$) мы можем получить по формуле (8) две измеримые, но неэквивалентные функции. Если, например, A — неизмеримое по Лебегу подмножество отрезка $[0, 1]$, а M состоит из характеристических функций всех одноточечных подмножеств множества M , то $x_0(t) = \sup \{x(t) : x \in M\}$ есть характеристическая функция множества A и тем самым не измерима, однако $\sup M$, очевидно, есть класс функций, почти всюду равных нулю.

В силу (8) $(x \vee y)(t) = \max(x(t), y(t))$, $(x \wedge y)(t) = \min(x(t), y(t))$.

Теорема 17. Пусть мера μ σ -конечна, M — произвольное непустое, ограниченное сверху подмножество $S(T, \Sigma, \mu)$. Тогда

а) существует $x_0 = \sup M \in S(T, \Sigma, \mu)$;

б) существует счетное подмножество $\{x_n\} \subset M$ такое, что $\sup x_n = \sup M$.

Доказательство. Возьмем любую функцию $x'_1 \in M$ и рассмотрим множество M' , состоящее из всех функций вида $x \vee x'$, где $x \in M$. Очевидно, что $\sup M$ и $\sup M'$ должны существовать одновременно и быть равными. Далее рассмотрим множество M'' , состоящее из всех функций вида $x - x'$, где $x \in M'$. Это множество состоит из неотрицательных функций и ограничено сверху. Если мы докажем, что существует $y_0 = \sup M''$, то $\sup M = x' + y_0$. Таким образом, с самого начала, не нарушая общности, можно считать, что множество M состоит из неотрицательных функций и вместе с каждым функциями $x_1, x_2, \dots, x_p$ содержит и функцию $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_p$.

Для любого $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ положим $m(x) = \rho(x, 0)$. В силу того, что функция $\phi(\lambda) = \lambda/(1 + \lambda)$ возрастает на $[0, +\infty)$, из $0 \leq x_1 \leq x_2$ следует $m(x_1) \leq m(x_2)$.

Положим $m_0 = \sup \{m(x) : x \in M\} \leq 1$ и найдем такую последовательность $\{x_n\} \subset M$, что $m(x_n) \rightarrow m_0$. Заменяя в случае необходимости каждую x_n на $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$, можно сразу считать, что последовательность $\{x_n\}$ возрастает.

Пусть $x_0(t) = \sup x_n(t) = \lim x_n(t)$. Так как $x_0 \leq y$, то $x_0 \in S(T, \Sigma, \mu)$. По теореме Лебега $m(x_n) \rightarrow m(x_0)$, откуда $m(x_0) = m_0$. Если мы проверим, что $x_0 = \sup M$, то теорема 17 будет доказана.

Очевидно, что если y — верхняя граница множества M , то $y \geq x_0$. Нам осталось показать, что x_0 — верхняя граница для M . Возьмем любой элемент $x \in M$ и положим $x'_n = x_n \vee x$, $x'_0 = x_0 \vee x$. Так как $x_n \uparrow x_0$, то $x'_n \uparrow x'_0$. Поэтому $m(x'_n) \rightarrow m(x'_0)$. В силу свойств множества M имеем $x'_n \in M$, откуда $m(x'_0) \leq m_0$. С другой стороны, $x'_0 \geq x_0$, и поэтому $m(x'_0) \geq m(x_0) = m_0$, откуда $m(x'_0) = m_0$. Следовательно,

$$\int_T \left(\frac{x'_0}{1 + x'_0} - \frac{x_0}{1 + x_0} \right) d\mu = 0.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то $x'_0(t) = x_0(t)$ п. в., чем и доказано, что $x_0 = \sup M = \sup x_n$.

Следствие 1. Пусть мера μ σ -конечна, M — произвольное непустое, ограниченное снизу подмножество $S(T, \Sigma, \mu)$. Тогда

а') существует $x_0 = \inf M \in S(T, \Sigma, \mu)$;

б') существует счетное подмножество $\{x_n\} \subset M$ такое, что $\inf x_n = \inf M$.

Для доказательства следствия достаточно рассмотреть множество $-M = \{-x: x \in M\}$.

Из доказательства теоремы 17 несложно извлечь следующее более общее утверждение.

Следствие 2. Если M — подмножество в $S(T, \Sigma, \mu)$ такое, что $\sup \{x(t): x \in M\} < \infty$ п. в., то существует $x_0 = \sup M \in S(T, \Sigma, \mu)$. Более того, если M направлено по возрастанию, то можно выбрать последовательность $\{x_n\} \subset M$ такую, что $x_n \uparrow x_0$ п. в.

Утверждение б) теоремы 17 для любого ограниченного сверху множества M справедливо тогда и только тогда, когда мера μ σ -конечна. Утверждение а) справедливо в значительно более широком классе пространств с мерой.

Будем говорить, что пространство с мерой (T, Σ, μ) обладает свойством прямой суммы, если выполнено следующее условие:

Существует семейство попарно дизъюнктивных множеств $T_\xi \in \Sigma$ ($0 < \mu(T_\xi) < \infty$, $\xi \in \Xi$) такое, что для любого $A \in \Sigma$ ($\mu(A) < +\infty$) найдутся счетный набор индексов $\Xi_0 \subset \Xi$ и множество N меры нуль, для которых $A = \bigcup_{\xi \in \Xi_0} (A \cap T_\xi) \cup N$.

Очевидно, что $\bigcup_{\xi \in \Xi} T_\xi \in \Sigma$ и $\mu\left(T \setminus \bigcup_{\xi \in \Xi} T_\xi\right) = 0$. Из теоремы 17 легко получить, что если пространство (T, Σ, μ) обладает свойством прямой суммы, то в пространстве $S(T, \Sigma, \mu)$ выполнено утверждение а) теоремы 17.

Замечание. Если направление $x_\alpha \rightarrow x(\mu)$ на каждом множестве T_ξ ($\xi \in \Xi$), то $x_\alpha \rightarrow x(\mu)$.

Действительно, если $A \in \Sigma$, то по определению $\{T_\xi\}$ имеем $A = \bigcup_{\xi \in \Xi_0} (A \cap T_\xi) \cup N$, где $\mu(N) = 0$, а Ξ_0 счетно. Так как

$$\mu(A) = \sum_{\xi \in \Xi_0} \mu(A \cap T_\xi) < \infty,$$

то для любого $\delta > 0$ найдется конечное подмножество $\Xi_1 \subset \Xi_0$ такое, что

$$\sum_{\xi \in \Xi_0 \setminus \Xi_1} \mu(A \cap T_\xi) < \delta.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, если n — число элементов в Ξ_1 , то при $\alpha \geq \alpha_0$ имеем

$$\mu(\{t \in T_\xi: |x_\alpha(t) - x(t)| \geq \varepsilon\}) < \delta/n, \quad \xi \in \Xi_1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu(\{t \in A: |x_\alpha(t) - x(t)| \geq \varepsilon\}) &\leq \\ &\leq \sum_{\xi \in \Xi_1} \mu(\{t \in T_\xi: |x_\alpha(t) - x(t)| \geq \varepsilon\}) + \\ &\quad + \sum_{\xi \in \Xi_0 \setminus \Xi_1} \mu(A \cap T_\xi) < n\delta/n + \delta = 2\delta. \end{aligned}$$

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Основные определения

1.1. Векторное пространство над полем вещественных или комплексных чисел является естественным обобщением обычного трехмерного евклидова пространства. В нем определены две алгебраические операции: сложение векторов и умножение вектора на скаляр (число), подчиненные некоторым условиям.

Пусть K — поле вещественных или комплексных чисел (поле скаляров). Множество X называется *векторным* (или *линейным*) *пространством* над K , если для любых двух его элементов x и y определена их сумма $x + y$ — элемент того же множества, и для любых элемента $x \in X$ и числа $\lambda \in K$ определено произведение λx , являющееся также элементом множества X , причем эти операции удовлетворяют следующим аксиомам:

- 1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);
- 2) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);
- 3) в X существует такой элемент 0 , что для любого $x \in X$ будет $0 \cdot x = 0$;
- 4) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
- 5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ } (дистрибутивность);
- 6) $(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$ (ассоциативность умножения);
- 7) $1 \cdot x = x$.

Если в множестве X введены операции сложения и умножения на число так, что X превращено в векторное пространство, то говорят, что X наделено структурой векторного пространства. Векторное пространство над R называется *вещественным* векторным пространством, а векторное пространство над C — *комплексным* векторным пространством. Термин векторное пространство мы употребляем в том случае, когда поле скаляров не имеет для нас значения (так обычно и будет) или когда оно ясно из контекста.

Все введенные в гл. I пространства, $C(K)$, $C^n[a, b]$, $S(T, \Sigma, \mu)$, J , $l^\infty(T)$, являются векторными пространствами, если сумму двух элементов из них определить как функцию, равную сумме соответствующих функций, и аналогичным образом определить про-

изведение элемента на число. Роль нулевого элемента во всех этих множествах играет функция, тождественно равная нулю.

Другим примером векторного пространства является множество K^n всех n -мерных векторов (с координатами из поля K) с покомпонентными операциями сложения и умножения на число из K . Это векторное пространство служит основным предметом изучения в линейной алгебре.

1.2. Укажем на простейшие следствия из аксиом 1)–7) (x, y, z здесь означают элементы одного и того же векторного пространства X , а $\lambda, \mu \in K$).

а) $x + 0 = x$.

Действительно, $x + 0 = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0)x = 1 \cdot x = x$ (аксиомы 3), 4), 7)).

б) Каждому x отвечает единственный элемент x' такой, что $x + x' = 0$. Именно: $x' = (-1) \cdot x$. Элемент x' обозначается обычно $-x$ и называется *противоположным* (по отношению к x) элементом.

Как уже было указано, возьмем $x' = (-1) \cdot x$. Тогда опять по аксиомам 3), 4), 7) имеем $x + x' = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$. Если же имеется еще элемент $\bar{x}$, для которого также $x + \bar{x} = 0$, то в силу ассоциативности и коммутативности сложения, используя а), получаем

$$\begin{aligned} x' &= x' + 0 = x' + (x + \bar{x}) = (x' + x) + \bar{x} = \\ &= (x + x') + \bar{x} = 0 + \bar{x} = \bar{x} + 0 = \bar{x}. \end{aligned}$$

с) $-(\alpha x) = (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x)$.

В самом деле, по б) и 7) имеем

$$-(\alpha x) = (-1) \cdot (\alpha x) = (-\alpha) \cdot x = \alpha((-1) \cdot x) = \alpha \cdot (-x).$$

д) Каковы бы ни были x и y , существует единственный элемент z такой, что $z + y = x$; его называют *разностью* элементов x и y и обозначают $z = x - y$.

Положим $z = x + (-y)$. С помощью доказанного выше найдем $z + y = (x + (-y)) + y = x + (y + (-y)) = x + 0 = x$. Если бы существовал еще один элемент $\bar{z}$, удовлетворяющий указанному условию, то

$$\bar{z} = \bar{z} + 0 = \bar{z} + (y + (-y)) = (\bar{z} + y) + (-y) = x + (-y) = z.$$

е) $x = y$ эквивалентно $x - y = 0$.

Действительно, если $x = y$, то, очевидно,

$$x - y = x + (-y) = y + (-y) = 0.$$

Если же $x - y = 0$, то $y = y + (x - y) = [y + (-y)] + x = x + 0 = x$.

ф) $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$; $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$.

Вследствие дистрибутивности умножения с помощью b) и c) получаем

$$\lambda(x - y) = \lambda[x + (-y)] = \lambda x + \lambda(-y) = \lambda x + (-\lambda y) = \lambda x - \lambda y,$$

$$(\lambda - \mu)x = \lambda x + (-\mu)x = \lambda x + (-\mu x) = \lambda x - \mu x.$$

g) $\lambda \cdot 0 = 0$.

В самом деле, $\lambda 0 = \lambda(0 \cdot x) = (\lambda \cdot 0)x = 0 \cdot x = 0$.

h) Если $\lambda x = 0$ и $\lambda \neq 0$, то $x = 0$.

Действительно, $x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right)x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} 0 = 0$.

i) Если $\lambda x = \lambda y$ и $\lambda \neq 0$, то $x = y$.

Очевидным образом следует из предыдущего пункта и пункта e).

j) Если $\lambda x = 0$ и $x \neq 0$, то $\lambda = 0$.

В самом деле, если бы $\lambda \neq 0$, то согласно h) было бы $x = 0$.

k) Если $\lambda x = \mu x$ и $x \neq 0$, то $\lambda = \mu$.

Очевидно.

В заключение отметим, что благодаря ассоциативности сложения вместо суммы $(x + y) + z$ или суммы $x + (y + z)$ можно писать, опуская скобки, $x + y + z$ и аналогичным образом поступать при большем числе слагаемых.

1.3. Как и в случае метрических пространств, мы не будем различать векторные пространства X и Y , если между их элементами можно установить *линейный изоморфизм* — такое взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow y$, что $x_1 \leftrightarrow y_1$ и $x_2 \leftrightarrow y_2$ влечет за собой $\lambda x_1 + \mu x_2 \leftrightarrow \lambda y_1 + \mu y_2$.

Так, с этой точки зрения множество вещественных чисел и множество точек на прямой должны рассматриваться как одно и то же векторное пространство, что, как известно, и делается в анализе.

1.4. Рассмотрим множество X_0 , содержащееся в векторном пространстве X и такое, что если $x, y \in X_0$, то и линейная комбинация $\lambda x + \mu y \in X_0$. В X_0 определены, таким образом, операции сложения элементов и умножения элемента на число, приводящие к элементам из X_0 . При этом для X_0 выполнена аксиома 3) векторного пространства ($0 = 0 \cdot x$). Остальные аксиомы соблюдены для X_0 , поскольку они имеют место в X . Следовательно, X_0 естественным образом оказывается векторным пространством, которое называется *линейным подмножеством* (или *множеством*) в X .

Очевидно, пересечение любой совокупности линейных множеств в X является снова линейным множеством. Поэтому, если E — некоторое множество в X , то существует наименьшее линейное множество $\mathcal{L}(E)$, содержащее E . Это будет пересечение всех линейных множеств, содержащих E . Множество $\mathcal{L}(E)$ называется *линейной оболочкой* множества E .

Легко убедиться, что $\mathcal{L}(E)$ совпадает с множеством $\tilde{L}$ всех элементов вида $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — произвольный набор элементов из E , а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — произвольные числа. Эти элементы x называются *линейными комбинациями* элементов $x_1, \dots, x_n$.

В самом деле, $\tilde{L}$, очевидно, есть линейное множество и содержит E . С другой стороны, всякое линейное множество, содержащее E , должно содержать и всевозможные линейные комбинации элементов из E , т. е. должно содержать $\tilde{L}$. Следовательно, $\mathcal{L}(E) = \tilde{L}$.

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *линейно независимыми*, если соотношение вида $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$ возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. В противном случае элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *линейно зависимыми*. Так, например, элементы x и $-x$ линейно зависимы, так как $1 \cdot x + 1 \cdot (-x) = 0$. Если среди элементов $x_1, \dots, x_n$ есть элемент, равный нулю, то они линейно зависимы.

Бесконечная система элементов называется *линейно независимой*, если любой конечный набор различных элементов этой системы линейно независим.

Если элементы $\{x_i\}$ образуют линейно независимую систему, то ясно, что из равенства

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{\varepsilon_k} = \sum_{k=1}^n \mu_k x_{\varepsilon_k}$$

вытекает равенство

$$\lambda_k = \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Примером линейно независимой системы в пространстве $C[a, b]$ является система $\{x_n\}$ ($x_n(t) = t^n$).

Линейно независимая система $\{x_i\}$ называется *алгебраическим базисом* векторного пространства X , если $\mathcal{L}(\{x_i\}) = X$. Таким образом, всякий элемент $x \in X$ может быть представлен в форме линейной комбинации элементов алгебраического базиса и, как это следует из сказанного выше, единственным образом.

Среди всех векторных пространств с этой точки зрения наиболее простыми являются те, которые имеют конечный алгебраический базис. Такие пространства называются *конечномерными*, а число элементов, образующих базис, называется *размерностью* данного векторного пространства. Как нетрудно показать, размерность векторного пространства является его инвариантом, т. е. не зависит от выбора того или иного алгебраического базиса.

Пусть X — конечномерное векторное пространство (размерности n). Как уже отмечалось, каждый элемент $x \in X$ может быть единственным образом представлен в форме $x = \lambda_1 x_1 + \dots$

$\dots + \lambda_n x_n$, где $x_1, \dots, x_n$ — алгебраический базис. Соотнося элементу x вектор $\tilde{x} \in K^n$ с компонентами $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, мы установим взаимно однозначное соответствие между X и K^n , которое является линейным изоморфизмом, так как если $x \leftrightarrow \tilde{x}$ и $y \leftrightarrow \tilde{y}$, то $\lambda x + \mu y \leftrightarrow \lambda \tilde{x} + \mu \tilde{y}$. Согласно сделанному выше замечанию мы вправе отождествить множества X и K^n , рассматривая, таким образом, X как множество n -мерных векторов. По этой причине элементы (любого) векторного пространства часто называют *векторами*.

1.5. Приведем ряд обозначений, которые нам потребуются в дальнейшем.

Для любых $x \in X$ и $E \subset X$

$$x + E = \{x + y : y \in E\}.$$

Для любых $E_1 \subset X$ и $E_2 \subset X$

$$E_1 + E_2 = \{x + y : x \in E_1, y \in E_2\}.$$

Для любых $\lambda \in K$ и $E \subset X$

$$\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}.$$

Отметим, что, вообще говоря, $E + E \neq 2E$, а только $2E \subset E + E$.

1.6. Дадим определения нескольких операций, которые по одним векторным пространствам позволяют строить другие.

Векторное пространство X называется *алгебраической прямой суммой* векторных пространств X_1 и X_2 , если X_1 и X_2 — линейные подмножества в X и любой $x \in X$ однозначно представим в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

Если X_1 и X_2 — векторные пространства (над полем K), то прямое произведение $X = X_1 \times X_2$ становится векторным пространством, если операции в нем определить равенствами

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Пусть X — векторное пространство, X_0 — его линейное подмножество.

Объединим элементы из X в классы, относя два элемента x' и x'' в один класс, если $x' - x'' \in X_0$. При этом, очевидно, различные классы не содержат общих элементов и каждый элемент $x \in X$ входит в один (и только в один) класс. Пусть $\bar{x}$ — один из классов и $x \in \bar{x}$. Из самого определения следует, что $\bar{x} = x + X_0$. Наоборот, множество вида $x + X_0$ есть некоторый класс, именно класс, содержащий элемент x .

В множество X/X_0 всех классов можно ввести алгебраические операции, полагая

$$\bar{x} + \bar{y} = x + y + X_0, \quad \lambda \bar{x} = \lambda x + X_0,$$

$$\bar{x}, \bar{y} \in X/X_0, \quad x \in \bar{x}, \quad y \in \bar{y}.$$

Эти определения, как легко проверить, не зависят от выбора элементов x, y — представителей классов $\bar{x}, \bar{y}$. В силу данных определений X/X_0 становится векторным пространством, которое мы назовём *фактор-пространством*, причем роль нулевого элемента играет, очевидно, класс, содержащий нулевой элемент пространства X , т. е. подпространство X_0 .

§ 2. Линейные операторы и функционалы

2.1. Пусть X, Y — векторные пространства над K . Отображение $U: X \rightarrow Y$ называется *линейным отображением* или *линейным оператором*, если

$$U(\lambda x + \mu y) = \lambda U(x) + \mu U(y)$$

для всех $\lambda, \mu \in K$ и $x, y \in X$. Множество всех линейных отображений из X в Y , обозначаемое $L(X, Y)$, превращается в векторное пространство, если определить алгебраические операции следующим образом.

Пусть $U_1, U_2 \in L(X, Y)$. По определению $U = U_1 + U_2$ есть оператор из X в Y :

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x), \quad x \in X. \quad (1)$$

Очевидно, что $U \in L(X, Y)$. Если $U \in L(X, Y)$ ($\lambda \in K$), то $\bar{U} = \lambda U$ определяется так:

$$\bar{U}(x) = \lambda U(x), \quad x \in X. \quad (2)$$

Очевидно, что $\bar{U} \in L(X, Y)$. Предоставляем читателю проверить, что при таком определении алгебраических операций $L(X, Y)$ является векторным пространством над K . Отметим только, что роль нулевого элемента в $L(X, Y)$ будет играть отображение $U_0 = 0$, тождественно равное нулю:

$$U_0(x) = 0, \quad x \in X.$$

Отметим, что для любого $U \in L(X, Y)$ имеем $U(0) = 0$ и $U(-x) = -U(x)$ ($x \in X$). Ядром отображения $U \in L(X, Y)$ называется множество $\text{Ker } U = U^{-1}(0)$, являющееся, очевидно, линейным подмножеством в X . Легко видеть, что отображение U взаимно однозначно тогда и только тогда, когда $\text{Ker } U = \{0\}$.

Линейное отображение $U: X \rightarrow Y$, взаимно однозначно отображающее X на Y , называется *линейным изоморфизмом* X на Y , а сами пространства X и Y называются в этом случае *линейно изоморфными* (это определение, очевидно, согласуется с п. 1.3).

Линейное отображение f векторного пространства X в поле скаляров K называется *линейным функционалом*.

2.2. Все изложенное до сих пор относилось как к вещественным, так и к комплексным векторным пространствам. В связи с теоремой Хаана — Банаха, которую мы докажем ниже, а также

с дальнейшим рассмотрением теории операторов нам потребуется некоторый вспомогательный аппарат для комплексного случая.

Пусть X — произвольное векторное пространство. Формулы (1) и (2) превращают множество линейных функционалов в векторное пространство $L(X, K)$. Однако в случае комплексного пространства X умножение функционала f на комплексное число λ мы определим по формуле

$$(\lambda f)(x) = \bar{\lambda} f(x), \quad x \in X^*. \quad (3)$$

Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то мы получаем формулу (2). Легко видеть, что и при таком определении алгебраических операций $L(X, K)$ — векторное пространство, которое мы будем называть *алгебраическим сопряженным к X* и обозначать X^+ .

Замечание. В случае операторов, не являющихся функционалами, обычная формула (2) сохраняется и в комплексном случае.

Пусть X — комплексное векторное пространство. Если мы операцию сложения в X оставим прежней, а умножение на скаляр будем считать определенным только в случае вещественных скаляров, причем прежним образом, то мы получим вещественное векторное пространство $X_{\mathbb{R}}$, ассоциированное с X .

Вещественным линейным функционалом на X называется линейный функционал на $X_{\mathbb{R}}$.

Пусть f — линейный функционал на X . Рассмотрим функционал φ , заданный на $X_{\mathbb{R}}$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad x \in X. \quad (4)$$

Легко проверить, что φ — вещественный линейный функционал. Действительно, если $x_1, x_2 \in X$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2) &= \operatorname{Re} f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \operatorname{Re} [\lambda f(x_1) + \mu f(x_2)] = \\ &= \lambda \operatorname{Re} f(x_1) + \mu \operatorname{Re} f(x_2) = \lambda \varphi(x_1) + \mu \varphi(x_2). \end{aligned}$$

Покажем, что для любого $x \in X$

$$f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix), \quad (5)$$

где i — мнимая единица. Действительно,

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} if(x) = \\ &= \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) = \varphi(x) - i\varphi(ix), \end{aligned}$$

Итак, мы получили для функционала f на X представление (2). Обратно, если φ — некоторый вещественный линейный функционал на X , то f , определяемый по формуле (5), — линейный функционал на X , причем имеет место соотношение (4). (Проверка предоставляется читателю.)

*) Здесь и далее $\bar{\lambda}$ — число, комплексно сопряженное λ .

2.3. Пусть X — векторное пространство. Линейное множество H в X называется *гиперподпространством*, если $H \neq X$ и существует $x_0 \in X$ такой, что $X = \mathcal{L}(H, x_0)$.

Лемма 1. Пусть X — векторное пространство, H — гиперподпространство в X и $x_1 \in X \setminus H$. Тогда любой элемент $x \in X$ представим в виде $x = \lambda x_1 + h$, где $\lambda \in K$, $h \in H$, причем это представление единственно.

Доказательство. По определению гиперподпространства найдется $x_0 \in X$, для которого $X = \mathcal{L}(H, x_0)$. Следовательно, $x_1 = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_n h_n$, где $h_i \in H$ ($1 \leq i \leq n$). Если $h_0 = \lambda_0 x_0$, то $h_0 \in H$ и $x_1 = \lambda_0 x_0 + h_0$, причем $\lambda_0 \neq 0$, так как $x_1 \notin H$. Для произвольного $x \in X$ найдутся $\mu \in K$ и $h \in H$, для которых

$$x = \mu x_0 + h = \mu \frac{x_1 - h_0}{\lambda_0} + h = \frac{\mu}{\lambda_0} x_1 + \left(h - \frac{\mu}{\lambda_0} h_0 \right).$$

Так как $h - (\mu/\lambda_0)h_0 \in H$, то это — искомое представление. Докажем теперь единственность такого представления. Пусть $x = \lambda x_1 + h = \mu x_1 + g$ ($g \in H$). Тогда $(\lambda - \mu)x_1 = g - h \in H$, но $x_1 \notin H$, откуда $\lambda = \mu$ и, следовательно, $h = g$.

Из леммы 1 вытекает, что если линейное множество $X_0 \subset X$ содержит H , то $X_0 = H$ или X .

Гиперплоскостью в векторном пространстве X называется любое множество вида $x + H$, где $x \in X$ и H — гиперподпространство. Как показывают нижеследующие теоремы, гиперплоскости тесно связаны с линейными функционалами.

Теорема 1. Пусть f — линейный функционал, не равный тождественно нулю, на векторном пространстве X . Тогда:

1) $H = f^{-1}(0)$ — гиперподпространство;

2) для любого $\lambda \in K$ имеем $f^{-1}(\lambda) = x_\lambda + H$, где $f(x_\lambda) = \lambda$.

Доказательство. 1) Возьмем $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = \lambda_0 \neq 0$. Для любого $x \in X$ имеем

$$x = \frac{f(x)}{\lambda_0} x_0 + \left(x - \frac{f(x)}{\lambda_0} x_0 \right).$$

Тогда $h = x - \frac{f(x)}{\lambda_0} x_0 \in H$. Действительно, $f(h) = f(x) - \frac{f(x)}{\lambda_0} f(x_0) = 0$, откуда $h \in H$ и $x = \frac{f(x)}{\lambda_0} x_0 + h$, т. е. H — гиперподпространство.

2) Если $x_\lambda = \frac{\lambda}{\lambda_0} x_0$, то $f(x_\lambda) = \lambda$, т. е. такие x_λ существуют.

Пусть x_λ — произвольный элемент, удовлетворяющий $f(x_\lambda) = \lambda$. Если $y \in f^{-1}(\lambda)$, то $f(y) = \lambda$ и $y = x_\lambda + (y - x_\lambda)$. Очевидно, что $y - x_\lambda \in H$, откуда $y \in x_\lambda + H$. Обратно, если $z \in x_\lambda + H$, то $z =$

$= x_\lambda + h (h \in H)$, откуда $f(z) = \lambda$ и $z \in f^{-1}(\lambda)$. Следовательно, $f^{-1}(\lambda) = x_\lambda + H$.

Теорема 2. Пусть H — гиперподпространство в векторном пространстве X , $x_0 \notin H$, $\lambda \neq 0$. Тогда существует единственный линейный функционал f на X такой, что:

1) $f^{-1}(0) = H$; 2) $f(x_0) = \lambda$.

Доказательство. Так как H — гиперподпространство, то в силу леммы 1 для любого $x \in X$ имеем единственное представление вида $x = \mu x_0 + h (h \in H)$. Положим $f(x) = \mu \lambda$. Проверим, что f — линейный функционал. Если $y = \mu' x_0 + h' (h' \in H)$, то $x + y = (\mu + \mu') x_0 + (h + h')$, откуда $f(x + y) = (\mu + \mu') \lambda = f(x) + f(y)$. Если $\alpha \in K$, то $\alpha x = \alpha \mu x_0 + \alpha h$, откуда $f(\alpha x) = \alpha \mu \lambda = \alpha f(x)$.

Так $x_0 = 1 \cdot x_0 + 0$, то $f(x_0) = \lambda$. Для $x \in H$ имеем $x = 0 \cdot x_0 + x$, откуда $f(x) = 0$ и, следовательно, $f^{-1}(0) \supset H$. Так как $\lambda \neq 0$, то $f \neq 0$ на X . Тогда по теореме 1 $f^{-1}(0)$ — гиперподпространство. В силу замечания, сделанного после доказательства леммы 1, отсюда вытекает, что $f^{-1}(0) = H$.

Докажем единственность функционала f . Пусть линейный функционал g удовлетворяет 1), 2). Для любого $x = \mu x_0 + h (h \in H)$ имеем

$$g(x) = g(\mu x_0 + h) = \mu g(x_0) + g(h) = \mu \lambda = f(x).$$

Следствие. Если f и g — линейные функционалы на векторном пространстве X и $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$, то найдется $\alpha \in K$ такое, что $g = \alpha f$.

Доказательство. Если $f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = X$, то $f = g \equiv 0$. Пусть $f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = H$ — гиперподпространство. Возьмем $x_0 \in \in H$. Тогда $f(x_0) = \lambda \neq 0$, $g(x_0) = \mu \neq 0$. Если $\alpha = \mu/\lambda$, то $g^{-1}(0) = H$, $(\alpha f)^{-1}(0) = H$, $g(x_0) = \mu$, $(\alpha f)(x_0) = \mu$. В силу свойства единственности из теоремы 2 получаем $g = \alpha f$.

Теоремы 1, 2 и следствие теоремы 2 можно объединить в следующее утверждение.

Теорема 3. Подмножество $M \subset X$ является гиперплоскостью тогда и только тогда, когда $M = \{x \in X: f(x) = \lambda\}$ для некоторого $\lambda \in K$ и некоторого ненулевого линейного функционала f на X . При этом f и λ определяются M с точностью до общего множителя $\mu (\mu \in K, \mu \neq 0)$.

Остановимся в заключение на связи между вещественным и комплексным случаями.

Пусть X — комплексное векторное пространство, X_R — вещественное векторное пространство, ассоциированное с X . Вещественная гиперплоскость в X — это гиперплоскость в X_R . Легко видеть, что гиперплоскость M является вещественной тогда и только тогда, когда $M = \{x \in X: f(x) = \lambda\}$, где $\lambda \in R$ и f — вещественный линейный функционал на X .

Лемма 2. Пусть X — комплексное векторное пространство. Если M — вещественное гиперподпространство в X , то $M \cap (iM)$ — гиперподпространство в X . Любая гиперплоскость в X является пересечением двух вещественных гиперплоскостей.

Доказательство. Если M — вещественное гиперподпространство, то $M = \{x: g(x) = 0\}$, где g — вещественный линейный функционал. Для $f(x) = g(x) - ig(ix)$ имеем $M \cap (iM) = \{x: f(x) = 0\}$, откуда $M \cap (iM)$ — гиперподпространство.

Если H — гиперплоскость, то $H = \{x: f(x) = \lambda + i\mu\}$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, f — линейный функционал. Если $g(x) = \operatorname{Re} f(x)$, то $H = \{x: g(x) = \lambda\} \cap \{x: g(ix) = -\mu\}$.

§ 3. Выпуклые множества и полунормы

3.1. Пусть X — векторное пространство. Множество $E \subset X$ называется *выпуклым*, если для любой пары $x, y \in E$ все элементы вида $\lambda x + (1 - \lambda)y$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) также принадлежат E . Геометрический смысл этого понятия, как и в случае плоскости, заключается в том, что вместе с любыми двумя точками $x, y \in E$ множество E содержит и весь интервал $\{\lambda x + (1 - \lambda)y: 0 \leq \lambda \leq 1\}$, соединяющий x и y . Множество $E \subset X$ называется *уравновешенным*, если для любого $x \in E$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ такого, что $|\lambda| \leq 1$, имеем $\lambda x \in E$. Множество $E \subset X$ называется *абсолютно выпуклым*, если для любой пары $x, y \in E$ и любых $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ таких, что $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, имеем $\lambda x + \mu y \in E$.

Перечислим некоторые простые следствия из приведенных определений.

а) Множество E является абсолютно выпуклым тогда и только тогда, когда оно одновременно выпукло и уравновешено.

Действительно, очевидно, что абсолютно выпуклое множество выпукло и уравновешено. Обратно, предположим, что E — выпуклое уравновешенное множество, и пусть $x, y \in E$ и $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Если $\lambda = 0$ или $\mu = 0$, то, очевидно, $\lambda x + \mu y \in E$. Если же $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$, то

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} x \in E, \quad \frac{\mu}{|\mu|} y \in E, \quad \frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} = 1.$$

Следовательно,

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|) \left(\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \frac{\lambda x}{|\lambda|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \frac{\mu y}{|\mu|} \right) \in E.$$

б) Если E_1, E_2 — выпуклые подмножества X , $\lambda \in \mathbb{K}$, то множества $E_1 + E_2$ и λE_1 выпуклы. То же утверждение верно, если выпуклость заменить на абсолютную выпуклость.

в) Если E — непустое абсолютно выпуклое множество, то $0 \in E$, и если $|\lambda| \leq |\mu|$, то $\lambda E \subset \mu E$.

Элементарное доказательство утверждений b) и c) предоставляется читателю.

Если E — произвольное непустое подмножество в X , то множество всевозможных конечных линейных комбинаций $\sum \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$ и все $x_i \in E$, называется *выпуклой оболочкой* множества E и обозначается $co(E)$. Очевидно, что $co(E)$ является наименьшим выпуклым множеством, содержащим E . Множество всевозможных конечных линейных комбинаций $\sum \lambda_i x_i$, где $\sum |\lambda_i| \leq 1$ и $x_i \in E$, называется *абсолютно выпуклой оболочкой* множества E и обозначается $abs\ co(E)$. Очевидно, что $abs\ co(E)$ является наименьшим абсолютно выпуклым множеством, содержащим E .

Подмножество E векторного пространства X называется *поглощающим*, если для любого $x \in X$ существует такое $\lambda > 0$, что $x \in \mu E$ для всех μ , $|\mu| \geq \lambda$. Геометрически это свойство означает, что на любом луче, исходящем из нуля, имеется интервал с концом в нулевой точке, целиком содержащийся в E . В силу c), если E абсолютно выпуклое, то оно будет поглощающим тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ существует такое $\lambda > 0$, что $x \in \lambda E$, т. е. когда $X = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda E$, и даже (опять-таки

в силу c)) когда $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nE$.

3.2. Пусть X — векторное пространство. Вещественная функция p , определенная на X , называется:

полуаддитивной, если для любой пары элементов $x_1, x_2 \in X$

$$p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2);$$

положительно однородной, если для $\lambda \geq 0$

$$p(\lambda x) = \lambda p(x);$$

однородной, если для любого λ

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

Полуаддитивная, положительно однородная функция называется *калибровочной функцией*. Однородная калибровочная функция p называется *полунормой*. Отметим некоторые свойства введенных функций.

a) $p(0) = 0$ для любой калибровочной функции p .

b) Если p — полунорма, то $p(x) \geq 0$ для любого $x \in X$.

Это вытекает из соотношения $0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x)$.

c) Если p — полунорма, то

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y).$$

Действительно, в силу полуаддитивности p имеем $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$. Меняя x и y местами и воспользовавшись тем, что $p(x - y) = p(y - x)$, получаем требуемое.

с'). Если p — калибровочная функция, то аналогично получаем $|p(x) - p(y)| \leq \max(p(x - y), p(y - x))$.

В силу а) для любой полунормы $p(0) = 0$, однако может случиться, что $p(x) = 0$ для $x \neq 0$. Полунорма, для которой $p(x) = 0$ влечет $x = 0$, называется *нормой*.

Связь между введенными классами функций и выпуклыми множествами описывается в следующей лемме.

Л е м м а . 1. 1) Пусть p — неотрицательная калибровочная функция. Тогда для любого $\lambda > 0$ множества $\{x: p(x) < \lambda\}$ и $\{x: p(x) \leq \lambda\}$ — выпуклые и поглощающие. Если p — полунорма, то эти множества абсолютно выпуклы.

2) Каждому выпуклому поглощающему множеству $U \subset X$ соответствует неотрицательная калибровочная функция p_U , называемая функционалом Минковского (множества U) и определяемая по формуле

$$p_U(x) = \inf \{\lambda: \lambda > 0, x \in \lambda U\},$$

причем

$$\{x: p_U(x) < 1\} \subset U \subset \{x: p_U(x) \leq 1\}. \quad (1)$$

Если U , кроме того, абсолютно выпукло, то p_U — полунорма.

Доказательство. 1) Мы докажем только, что множество $E_\lambda = \{x: p(x) < \lambda\}$ — поглощающее, предоставляя элементарную проверку остальных утверждений читателю. Если $m = \max(p(x), p(-x))$, то при $|\mu| \geq (m + 1)/\lambda$ имеем

$$p(x/\mu) = 1/|\mu| p(\text{sign } \mu \cdot x) \leq \lambda/(m + 1) p(\text{sign } \mu \cdot x) < \lambda^*,$$

откуда $x \in \mu E_\lambda$. Следовательно, E_λ — поглощающее множество.

2) Так как множество U — поглощающее, то $p_U(x) < +\infty$. Очевидно, что $p_U(0) = 0$. Тогда при проверке положительной однородности можно считать, что $\lambda > 0$. Используя, что $\lambda x \in \mu U$ тогда и только тогда, когда $x \in (\mu/\lambda)U$, получаем

$$\begin{aligned} p_U(\lambda x) &= \inf \{\mu > 0: \lambda x \in \mu U\} = \\ &= \lambda \inf \{(\mu/\lambda): \mu > 0, x \in (\mu/\lambda)U\} = \lambda p_U(x). \end{aligned}$$

Если U абсолютно выпукло, то в силу уравновешенности U $\lambda x \in \mu U$ тогда и только тогда, когда $x \in (\mu/|\lambda|)U$, откуда

$$\begin{aligned} p_U(\lambda x) &= \inf \{\mu > 0: \lambda x \in \mu U\} = \\ &= |\lambda| \inf \{(\mu/|\lambda|): \mu > 0, x \in (\mu/|\lambda|)U\} = |\lambda| p_U(x). \end{aligned}$$

*) Если $\mu \in \mathbb{C}$, то $\text{sign } \mu = \begin{cases} \mu/|\mu|, & \text{если } \mu \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mu = 0. \end{cases}$

Теперь нам осталось проверить полуаддитивность p_U . Пусть $x, y \in X$; $\varepsilon > 0$. Найдутся $\lambda, \mu > 0$ такие, что

$$p_U(x) < \lambda < p_U(x) + \varepsilon, \quad p_U(y) < \mu < p_U(y) + \varepsilon.$$

Получаем $x/\lambda, y/\mu \in U$. На основании выпуклости множества U

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{y}{\mu} \in U,$$

откуда

$$p_U(x+y) \leq \lambda + \mu < p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon.$$

Итак, ввиду произвольности ε получаем $p_U(x+y) \leq p_U(x) + p_U(y)$. Выполнение (1) очевидно. Доказательство леммы 1 полностью закончено.

§ 4. Теорема Хана — Банаха

4.1. В этом параграфе мы изложим так называемую аналитическую форму теоремы Хана — Банаха (см. Банах) о продолжении непрерывных функционалов *). Эта теорема имеет многочисленные приложения в теории топологических векторных и нормированных пространств и их применениях.

Теорема 1 (аналитическая форма теоремы Хана — Банаха). Пусть в вещественном векторном пространстве X задана калибровочная функция p . Пусть f_0 — линейный функционал, заданный на линейном множестве $X_0 \subset X$, такой, что

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in X_0. \quad (1)$$

Тогда существует линейный функционал f , определенный на всем X , совпадающий с f_0 на X_0 и удовлетворяющий на X условию

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in X. \quad (2)$$

Доказательство. Существование искомого функционала f мы получим при помощи леммы Цорна. Для ее применения мы рассмотрим множество $\mathfrak{M}$, состоящее из всех пар (L, g) , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) L — линейное множество в X , $L \supset X_0$;
- 2) g — линейный функционал, заданный на L , являющийся продолжением f_0 ;
- 3) $g(x) \leq p(x)$ для любого $x \in L$.

Множество $\mathfrak{M}$ непусто, так как $(X_0, f_0) \in \mathfrak{M}$. Введем в $\mathfrak{M}$ упорядочение, считая $(L_1, g_1) \leq (L_2, g_2)$, если $L_2 \supset L_1$ и g_2 является продолжением g_1 .

Покажем, что в упорядоченном множестве $\mathfrak{M}$ выполнены условия леммы Цорна, и поэтому в $\mathfrak{M}$ существует максимальный

*) Напомним, что если $X_0 \subset X$ и f_0 — некоторая функция на X_0 , то функция f , определенная на X , называется *продолжением* (или *распространением*) f_0 , если $f_0(x) = f(x)$ для любого $x \in X_0$.

элемент. Пусть $\mathfrak{M}_0$ — совершенно упорядоченное подмножество в $\mathfrak{M}$. Пусть $L_0 = \bigcup \{L: (L, g) \in \mathfrak{M}_0\}$. Покажем, что L_0 — линейное множество. Если $x, y \in L_0$, то в силу определения L_0 найдутся множества L_1, L_2 такие, что $x \in L_1, y \in L_2$ и $(L_1, g_1), (L_2, g_2) \in \mathfrak{M}_0$. Так как множество $\mathfrak{M}_0$ совершенно упорядочено, то элементы (L_1, g_1) и (L_2, g_2) сравнимы. Предположим для определенности, что $(L_1, g_1) \geq (L_2, g_2)$. Тогда $L_1 \supset L_2$ и тем самым $x, y \in L_1$, откуда $\lambda x + \mu y \in L_1 \subset L_0$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Любой элемент $x \in L_0$ входит в некоторое множество L такое, что $(L, g) \in \mathfrak{M}_0$. Положим $g_0(x) = g(x)$. Определив таким образом $g_0(x)$ для всех $x \in L_0$, аналогично вышеизложенному получаем, что наше определение корректно и g_0 — линейный функционал на L_0 . Очевидно, что $(L_0, g_0) \in \mathfrak{M}_0$ и (L_0, g_1) — верхняя граница для множества $\mathfrak{M}_0$. По лемме Цорна в $\mathfrak{M}$ существует максимальный элемент $(L_{\max}, f_{\max}) \in \mathfrak{M}$. Если мы покажем, что $L_{\max} = X$, то функционал $f_{\max}$ будет, очевидно, искомым.

Предположим противное, т. е. что $L_{\max} \neq X$. Если мы покажем, что для любого $(L, g) \in \mathfrak{M}$, для которого $x_0 \notin L$, существует $(L_1, g_1) \in \mathfrak{M}$, где L_1 — линейная оболочка множества L и элемента x_0 , то мы, очевидно, получим противоречие с максимальностью $L_{\max}$, и тем самым доказательство теоремы будет закончено. Поэтому можно считать, что X есть элементарное расширение множества X_0 , т. е. считать, что каждый элемент $x \in X$ может быть представлен в форме

$$x = \lambda x_0 + x', \quad x' \in X_0. \quad (3)$$

Если $x', x'' \in X_0$, то с помощью (1) находим

$$\begin{aligned} f_0(x') + f_0(x'') &= f_0(x' + x'') \leq p(x_0 + x') + (-x_0 + x'') \leq \\ &\leq p(x_0 + x') + p(-x_0 + x''), \end{aligned}$$

откуда

$$f_0(x'') - p(-x_0 + x'') \leq -f_0(x') + p(x_0 + x'),$$

и, следовательно (поскольку x' и x'' здесь произвольны),

$$A = \sup_{x'' \in X_0} [f_0(x'') - p(-x_0 + x'')] \leq \inf_{x' \in X_0} [-f_0(x') + p(x_0 + x')] = B.$$

Пусть $A \leq t_0 \leq B$. Определим на X функционал f формулой

$$f(x) = \lambda t_0 + f_0(x'), \quad x = \lambda x_0 + x', \quad x' \in X_0.$$

Ясно, что f — аддитивный и однородный функционал, причем f — продолжение f_0 . Покажем, что имеет место (2). Будем считать, что в представлении (3) $\lambda \neq 0$. Допустим, что $\lambda > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda t_0 + f_0(x') \leq \lambda B + f_0(x') \leq \lambda \left[-f_0\left(\frac{x'}{\lambda}\right) + p\left(x_0 + \frac{x'}{\lambda}\right) \right] + \\ &+ f_0(x') = -f_0(x') + p(\lambda x_0 + x') + f_0(x') = p(x). \end{aligned}$$

Точно так же (с использованием неравенства $t_0 \geq A$) исчерпывается случай $\lambda < 0$. Теорема доказана.

Следствие. Если функционал p удовлетворяет условиям теоремы, то существует аддитивный и однородный функционал f , заданный на X и такой, что

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in X. \quad (4)$$

Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно на множестве $X_0 = \{0\}$ рассмотреть функционал f_0 ($f_0(0) = 0$) и затем применить к нему теорему.

Отметим, что f удовлетворяет соотношению

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x). \quad (5)$$

Действительно, из (4) получаем

$$f(x) = -f(-x) \geq -p(-x).$$

Конструкция элементарного расширения использовала вещественность функционала f . Однако и для комплексных пространств теорема Хаана — Банаха верна, хотя и в несколько менее общей форме.

Теорема 2. Пусть p — полунорма в произвольном векторном пространстве X . Пусть f_0 — линейный функционал, заданный на линейном множестве $X_0 \subset X$, такой, что

$$|f(x)| \leq p(x), \quad x \in X_0. \quad (6)$$

Тогда существует линейный функционал f , определенный на всем X , совпадающий с f_0 на X_0 и удовлетворяющий на X условию

$$|f(x)| \leq p(x), \quad x \in X. \quad (7)$$

Доказательство. Если X — вещественное векторное пространство, то требуемое вытекает из следствия теоремы 1 и неравенства (5).

Пусть X — комплексное векторное пространство. Если $X_{\mathbb{R}}$ — вещественное векторное пространство, ассоциированное с X , то $(X_0)_{\mathbb{R}}$ — линейное множество в $X_{\mathbb{R}}$. Положив $\varphi_0(x) = \operatorname{Re} f_0(x)$ ($x \in X$), мы получаем вещественный линейный функционал φ_0 на $(X_0)_{\mathbb{R}}$, причем в силу формулы (2) § 2 для любого $x \in X_0$ имеем

$$f_0(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix). \quad (8)$$

В силу (6) имеем $|\varphi_0(x)| = |\operatorname{Re} f_0(x)| \leq |f_0(x)| \leq p(x)$ для $x \in X_0$. Как уже было доказано, существует вещественный функционал φ на X , являющийся продолжением φ_0 , для которого

$$|\varphi(x)| \leq p(x), \quad x \in X. \quad (9)$$

Положим $f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ при любом $x \in X$. Как было отмечено в § 2, f — линейный функционал на X , причем $\operatorname{Re} f(x) = \varphi(x)$ ($x \in X$). Отсюда в силу (8) получаем, что f есть продолжение f_0 . Нам осталось проверить неравенство (7).

Для любого $x \in X$ найдется $\theta \in \mathbb{R}$ такое, что

$$e^{i\theta} f(x) = |f(x)| \geq 0.$$

Следовательно, $f(e^{i\theta} x) = e^{i\theta} f(x)$ вещественно, откуда $f(e^{i\theta} x) = \varphi(e^{i\theta} x)$. Теперь из (9) получаем

$$|f(x)| = e^{i\theta} f(x) = f(e^{i\theta} x) = \varphi(e^{i\theta} x) \leq p(e^{i\theta} x) = |e^{i\theta}| p(x) = p(x),$$

чем и доказано (7).

4.2. Теорема 1 находит себе изящное применение в теории интеграла и теории меры *).

Подставим следующую задачу; связать с каждой вещественной ограниченной периодической (периода 1) функцией $x(t)$ «интеграл» по проме-

жутку $[0, 1]$ — число $\int_0^1 x(t) dt$ так, чтобы были выполнены условия:

$$1) \int_0^1 [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] dt = \alpha \int_0^1 x_1(t) dt + \beta \int_0^1 x_2(t) dt \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R});$$

$$2) \text{ если } x(t) \geq 0 \text{ в } [0, 1], \text{ то } \int_0^1 x(t) dt \geq 0;$$

$$3) \int_0^1 x(t + t_0) dt = \int_0^1 x(t) dt \quad (t_0 - \text{любое вещественное});$$

$$4) \int_0^1 x(1-t) dt = \int_0^1 x(t) dt;$$

$$5) \text{ если } x_0(t) \equiv 1, \text{ то } \int_0^1 x_0(t) dt = 1.$$

Теорема 3. Поставленная задача имеет по крайней мере одно решение.

Доказательство. Обозначим через M множество всех ограниченных периодических (периода 1) функций. Ясно, что M — векторное пространство.

Пусть $x \in M$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — произвольный набор вещественных чисел. Обозначим

$$\pi(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sup_{-\infty < t < \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(t + \alpha_k)$$

и положим

$$p(x) = \inf \pi(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

где точная нижняя граница берется по всевозможным конечным наборам чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Докажем, что p удовлетворяет условиям теоремы 1. Очевидно, в доказательстве нуждается только полуаддитивность p .

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ — такие совокупности чисел, что $\pi(x_1; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) < p(x_1) + \varepsilon$ и $\pi(x_2; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) < p(x_2) + \varepsilon$. Обозначим $\gamma_{j,k} = \alpha_j + \beta_k$. Тогда, с одной стороны,

$$p(x_1 + x_2) \leq \pi(x_1 + x_2; \gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{mn}). \quad (10)$$

*). См. Банах.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \pi(x_1 + x_2; \gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{mn}) = \\ &= \frac{1}{mn} \sup_{-\infty < t < \infty} \sum_{j,k} [x_1(t + \gamma_{jk}) + x_2(t + \gamma_{jk})] \leq \\ &\leq \frac{1}{mn} \sup_{-\infty < t < \infty} \sum_{j,k} x_1(t + \gamma_{jk}) + \frac{1}{mn} \sup_{-\infty < t < \infty} \sum_{j,k} x_2(t + \gamma_{jk}) \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sup_{j=1}^m \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_1(t + \beta_k + \alpha_j) + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sup_{k=1}^n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_2(t + \alpha_j + \beta_k) = \\ &= \pi(x_1; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) + \pi(x_2; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) < p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Сопоставляя это с (10) и учитывая произвольность ε , получим

$$p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2).$$

Пусть f — функционал, существование которого утверждается в следствии из теоремы 1. Если $x(t) \geq 0$, то $p(x) \geq 0$, $p(-x) \leq 0$, откуда на основании (5) $f(x) \geq 0$. Далее, если положить $x'(t) = x(t + t_0) - x(t)$, то, взяв $\alpha_k = (k-1)t_0$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$), получим

$$\begin{aligned} p(x') &\leq \pi(x'; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sup_{-\infty < t < \infty} [x(t + (n+1)t_0) - x(t)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $p(x') \leq 0$, и точно так же $p(-x') \leq 0$. Отсюда, снова на основании (5), $f(x') = 0$.

Наконец, если $x_0(t) \equiv 1$, то, очевидно $p(x_0) = 1$, $p(-x_0) = -1$. А тогда $f(x_0) = 1$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно положить

$$\int_0^1 x(t) dt = \frac{1}{2} [f(x) + f(\tilde{x})], \quad \tilde{x}(t) = x(1-t). \quad (11)$$

Замечание. Нетрудно доказать, что построенный интеграл совпадает с интегралом Римана всякий раз, когда последний существует. По отношению к интегралу Лебега этого, вообще говоря, сказать нельзя. Однако функционал f может быть выбран таким образом, что интеграл (11) для всякой измеримой функции совпадает с лебеговым.

С помощью обобщенного интеграла (11) можно построить обобщенную меру для множеств промежутка $E_0 = [0, 1]$. Именно, справедлива

Теорема 4. Каждому множеству $e \subset E_0 = [0, 1]$ может быть сопоставлено число $\mu(e)$ — «мера» множества e — так, что будут выполнены условия:

- 1) $\mu(e_1 \cup e_2) = \mu(e_1) + \mu(e_2)$, если $e_1 \cap e_2 = \emptyset$;
- 2) $\mu(e) \geq 0$;
- 3) если e_1 конгруэнтно e_2 , то $\mu(e_1) = \mu(e_2)$;
- 4) $\mu(E_0) = 1$.

Доказательство. Пусть $\chi_e(\tau)$ — характеристическая функция множества $e \subset E_0$. Если положить

$$\mu(e) = \int_0^1 \chi_e(t) dt,$$

то свойства 1)–4) без труда получаются из свойств обобщенного интеграла.

З а м е ч а н и е. Обобщенная мера, удовлетворяющая условиям 1)–4), может быть определена и для всех подмножеств квадрата $[0, 1; 0, 1]$. Следует, однако, отметить, что эта задача для трехмерного куба уже не имеет решения *).

4.3. Аналогично обобщенному интегралу может быть определен обобщенный предел для любой ограниченной последовательности.

Рассмотрим векторное пространство l^∞ ограниченных вещественных последовательностей. Пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^\infty$. Обозначим

$$\pi(x; n_1, n_2, \dots, n_k) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \xi_{n+n_j},$$

$$p(x) = \inf \pi(x; n_1, n_2, \dots, n_k),$$

где точная нижняя граница берется по всевозможным совокупностям натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Как и в доказательстве теоремы 3, можно установить, что p — полуаддитивный и положительно однородный функционал. Следовательно, существует линейный функционал f , удовлетворяющий условию (5). Если положить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = f(x),$$

то, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 3, можно установить следующие свойства найденного функционала:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha \xi'_n + \beta \xi''_n] = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \xi'_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \xi''_n$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \geq 0$, если $\xi_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$);
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^{(0)} = 1$, если $\xi_n^{(0)} = 1$ ($n = 1, 2, \dots$);
- 5) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$.

Из последнего соотношения явствует, что если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$, то должно быть $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$. Принимая, кроме того, во внимание остальные четыре свойства числа $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$, естественно называть это число *обобщенным пределом* (Банаха) последовательности $\{\xi_n\}$.

*) Доказательство см.: Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Гостехиздат, 1950. — 277 с.

Г л а в а III

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В большинстве случаев, когда рассматривается конкретное векторное пространство X , в нем уже имеется некоторая «естественная» сходимости, которая определяет топологию в X , причем эта топология и алгебраические операции разумным образом согласованы. Нас в этой книге будет прежде всего интересовать случай, когда эта топология может быть задана при помощи нормы, т. е. когда X является нормированным пространством. Мы, однако, рассмотрим сначала более общий случай топологических векторных пространств. Это мотивируется, с одной стороны, тем, что многие вопросы нормированных пространств естественно решаются уже на этой степени общности, а с другой стороны, тем, что исследование собственно нормированных пространств требует привлечения так называемой слабой топологии, которая в бесконечномерном случае ненормируема. Излагаемое ниже введение в элементарную теорию топологических векторных пространств преследует только вышеизложенные цели и, таким образом, не претендует на полноту и законченность (мы не останавливаемся даже на важнейших понятиях бочечности, борнотопичности, ядерности). По поводу подробного изложения теории топологических векторных пространств см. Бурбаки — III; Данфорд и Шварц — I; Иосида; А. Робертсон и В. Робертсон; Шефер — I; Эдвардс.

§ 1. Общие определения

1.1. Пусть X — векторное и одновременно топологическое пространство. Множество X называется *топологическим векторным пространством* (сокращенно ТВП), если алгебраические операции непрерывны в топологии X , т. е.:

1) для каждой пары элементов $x, y \in X$ и окрестности V_{x+y} элемента $x+y$ найдутся окрестность V_x элемента x и окрестность V_y элемента y такие, что

$$V_x + V_y \subset V_{x+y};$$

2) каковы бы ни были элемент $x \in X$, число λ и окрестность $V_{\lambda x}$ элемента λx , найдутся окрестность V_x элемента x и число

$\delta > 0$ такие, что при любом μ , для которого $|\mu - \lambda| < \delta$, имеем

$$\mu V_x \subset V_{\lambda}.$$

Нетрудно проверить, что линейное подмножество ТВП X само является ТВП, если мы рассмотрим в нем топологию и алгебраические операции, индуцированные из X . Это ТВП мы будем называть *подпространством ТВП X* .

Укажем на некоторые простые следствия из определения ТВП.

I. Если $G \subset X$ — открытое множество, то $x_0 + G$ — также открытое множество.

Действительно, пусть $x \in x_0 + G$, так что $x = x_0 + x'$, где $x' \in G$. Пусть $V_{x'}$ — окрестность точки x' , содержащаяся в G . Поскольку $x' = x + (-x_0)$, то по условию 1) найдутся окрестности V_x точки x и окрестность V_{-x_0} точки $(-x_0)$ такие, что $V_x + V_{-x_0} \subset V_{x'}$. Так как $-x_0 \in V_{-x_0}$, то $-x_0 + V_x \subset V_{x'} \subset G$ и, следовательно, $V_x \subset x_0 + G$, т. е. x — внутренняя точка множества $x_0 + G$.

Аналогично доказывается

II. Если G — открытое множество и $\lambda \neq 0$, то и λG — открытое множество.

Подобные утверждения имеют место и для замкнутых множеств.

Из предложения I вытекает

III. Каждая окрестность точки $x \in X$ имеет вид $x + V$, где V — окрестность нулевого элемента пространства X . При этом, если V пробегает фундаментальную систему окрестностей нуля, то $x + V$ пробегает фундаментальную систему окрестностей точки x .

Сформулированное предложение позволяет ограничиться рассмотрением только окрестностей нулевого элемента.

Теорема 1. *Существует фундаментальная система $\mathfrak{B}$ окрестностей нуля ТВП X , обладающая свойствами:*

1) *каковы бы ни были $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}$, существует $V_3 \in \mathfrak{B}$ такая, что $V_3 \subset V_1 \cap V_2$;*

2) *каждая $V \in \mathfrak{B}$ — уравновешенное множество;*

3) *каждая $V \in \mathfrak{B}$ — поглощающее множество;*

4) *какова бы ни была $V \in \mathfrak{B}$, существует $U \in \mathfrak{B}$ такая, что $U + U \subset V$.*

Обратно, если X — линейное множество, в котором выделено семейство $\mathfrak{B}$ подмножеств, удовлетворяющее условиям 1)–4), то, принимая за окрестности элемента $x \in X$ любые множества вида $x + V$ ($V \in \mathfrak{B}$), мы превратим X в ТВП, в котором семейство $\mathfrak{B}$ будет фундаментальной системой окрестностей нуля.

Доказательство. Если $\mathfrak{B}$ — фундаментальная система окрестностей нуля ТВП X , то условие 1), очевидно, выполнено. Точно так же, поскольку $0 + 0 = 0$, то соблюдено условие 4).

Докажем, что любая окрестность нуля V есть поглощающее множество. Действительно, так как $0 \cdot x = 0$, то по определению

ТВП найдутся окрестность V_x точки x и число $\delta > 0$ такие, что $\lambda V_x \subset V$ при $|\lambda| \leq \delta$. В частности, $x \in \frac{1}{\lambda} V$ при $\left| \frac{1}{\lambda} \right| \geq \frac{1}{\delta}$.

Чтобы завершить доказательство первой части теоремы, достаточно установить, что уравновешенные окрестности образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Пусть V — произвольная окрестность нуля. Ввиду того, что $0 \cdot 0 = 0$, найдутся окрестность V_1 нуля и число $\delta > 0$ такие, что $\lambda V_1 \subset V$ при $|\lambda| \leq \delta$. Обозначим $V_0 = \bigcup_{|\lambda| < \delta} \lambda V_1$. Так как $V_0 \supset \delta V_1$, а по свойству III δV_1 является окрестностью нуля, то окрестностью нуля будет и множество V_0 . Если $|\alpha| \leq 1$, то $\alpha V_0 = \bigcup_{|\lambda| < \delta} \alpha \lambda V_1 \subset V_0$ и V_0 — уравновешенная окрестность. Остается заметить, что $V_0 \subset V$.

Переходим к доказательству второй части теоремы.

Проверим прежде всего, что при указанном в формулировке теоремы способе определения окрестностей в множестве X оно обращается в топологическое пространство (см. теорему I.2.4).

1) Каждая окрестность точки x содержит точку x . Действительно, любое множество $V \in \mathfrak{B}$, будучи уравновешенным, содержит нуль, поэтому $x \in x + V$.

2) Пересечение двух окрестностей точки x содержит третью окрестность этой же точки. Это сразу же следует из условия 1) теоремы.

3) Какова бы ни была окрестность V_x точки x , существует такая окрестность V'_x этой же точки, что V_x содержит окрестность любой точки $y \in V'_x$. Ограничимся рассмотрением случая, когда $x = 0$. Пусть $V \in \mathfrak{B}$ — произвольная окрестность нуля, а $U \in \mathfrak{B}$ — окрестность нуля, существование которой обусловлено условием 4) теоремы. Можно принять $V'_x = U$. Действительно, если $y \in U$, то $y + U$ является окрестностью точки y и $y + U \subset U + U \subset V$.

Итак, X — топологическое пространство. Проверим, что алгебраические операции непрерывны в X . Непрерывность операции сложения легко получается из условия 4). Прежде чем переходить к операции умножения, отметим одно следствие условий 2) и 4). Для любого множества $E \subset X$ имеем $2E \subset E + E$, поэтому согласно условию 4) для каждой окрестности $V \in \mathfrak{B}$ найдется $V' \in \mathfrak{B}$ такая, что $2V' \subset V$, и подобным же образом, каково бы ни было натуральное число n , существует $V^{(n)} \in \mathfrak{B}$ такая, что $2^n V^{(n)} \subset V$. Пусть λ — произвольное число. Обозначим через n столь большое натуральное число, что $|\lambda| \leq 2^n$. Так как $V^{(n)}$ — уравновешенное множество, то уравновешенным будет и $2^n V^{(n)}$, поэтому

$$\lambda V^{(n)} = \frac{\lambda}{2^n} (2^n V^{(n)}) \subset 2^n V^{(n)} \subset V.$$

Теперь уже нетрудно доказать, что операция умножения непрерывна. Пусть $x \in X$ и λ — числовой множитель. Имеем

$$\mu y - \lambda x = (\mu - \lambda)(y - x) + (\mu - \lambda)x + \lambda(y - x).$$

Учитывая это соотношение и принимая во внимание условие 4), достаточно установить три факта:

1) какова бы ни была $V \in \mathfrak{B}$, найдутся такие $V_1 \in \mathfrak{B}$ и число $\delta > 0$, что $\alpha V_1 \subset V$ ($|\alpha| \leq \delta$);

2) какова бы ни была $V \in \mathfrak{B}$, найдется такое $\delta > 0$, что $\alpha x \in V$ при $|\alpha| \leq \delta$;

3) какова бы ни была $V \in \mathfrak{B}$, найдется такое $V_1 \in \mathfrak{B}$, что $\lambda V_1 \subset V$.

Справедливость первого утверждения вытекает из того, что множество V — уравновешенное, поэтому можно принять $V_1 = V$, $\delta = 1$.

Второе утверждение также верно. В самом деле, V — уравновешенное и поглощающее множество, поэтому найдется $\lambda' > 0$ такое, что $x \in \lambda' V$. Если положить $\delta = 1/\lambda'$, то для $|\alpha| \leq \delta$ будет

$$\alpha(\lambda' V) = (\alpha\lambda') V \subset V,$$

так как $|\alpha\lambda'| \leq 1$. Отсюда следует, что $\alpha x \in V$ ($|\alpha| \leq \delta$).

Наконец, справедливость третьего утверждения была уже отмечена. Теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Всякое ТВП обладает фундаментальной системой замкнутых уравновешенных окрестностей.*

Действительно, достаточно установить, что нулевой элемент обладает такой системой окрестностей. Такую систему образуют замыкания окрестностей из произвольной фундаментальной системы $\mathfrak{B}$ уравновешенных окрестностей нуля. В самом деле, если $V \in \mathfrak{B}$ и окрестность $U \in \mathfrak{B}$ такова, что $U + U \subset V$, то $\bar{U} \subset V$, так как если $x_0 \notin V$, то окрестность $x_0 + U$ точки x_0 и множество U не пересекаются. Для окончания доказательства достаточно заметить, что при переходе к замыканию свойство уравновешенности сохраняется.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{B}$ — базис окрестностей нуля в ТВП X . Для хаусдорфовости X необходимо и достаточно, чтобы*

$$\bigcap_{V \in \mathfrak{B}} V = \{0\}. \quad (1)$$

Действительно, если X отделимо и $x \neq 0$, то существует $V \in \mathfrak{B}$, не содержащая x , откуда получаем (1). Обратно, если (1) выполнено и $x \neq y$, то существует $V \in \mathfrak{B}$, не содержащая $x - y$. В силу теоремы 1 найдется уравновешенная окрестность нуля U такая, что $U + U \subset V$. Тогда $x + U$ и $y + U$ — непересекающиеся окрестности точек x и y , так как из $z \in (x + U) \cap (y + U)$ вытекает $x - y = (z - y) - (z - x) \in U - U = U + U \subset V$. Следовательно, X отделимо.

Далее все ТВП мы будем предполагать хаусдорфовыми.

1.2. Сформулируем еще несколько предложений, имеющих место в ТВП X .

I. Замыкание линейного множества X_0 в пространстве X есть линейное множество.

В самом деле, пусть $x, y \in \bar{X}_0$ и α, β — произвольные числовые множители. Пусть, далее, V_z — окрестность точки $z = \alpha x + \beta y$. Найдутся окрестности V_x точки x и V_y точки y такие, что $\alpha V_x + \beta V_y \subset V_z$. В окрестности V_x имеются точки множества X_0 ; обозначим через x' одну из таких точек. Аналогично, пусть $y' \in V_y \cap X_0$. Поскольку $z' = \alpha x' + \beta y' \in X_0$ и одновременно $z' \in \alpha V_x + \beta V_y \subset V_z$, то пересечение $V_z \cap X_0$ непусто, что ввиду произвольности окрестности V_z дает $z \in \bar{X}_0$.

Подобным же образом доказывается

II. Замыкание выпуклого множества выпукло. Замыкание абсолютно выпуклого множества абсолютно выпукло.

Пусть E — произвольное непустое подмножество ТВП X . Замыкание линейной оболочки множества E называется *замкнутой линейной оболочкой* множества E и обозначает $\bar{\mathcal{L}}(E)$. В силу I $\bar{\mathcal{L}}(E)$ есть наименьшее замкнутое линейное подмножество в X , содержащее E . Замыкание выпуклой (соответственно абсолютно выпуклой) оболочки множества E называется *замкнутой выпуклой* (соответственно *абсолютно выпуклой*) *оболочкой* множества E и обозначается $\overline{\text{co}}(E)$ (соответственно $\overline{\text{abs co}}(E)$). В силу II $\overline{\text{co}}(E)$ (соответственно $\overline{\text{abs co}}(E)$) есть наименьшее замкнутое выпуклое (соответственно абсолютно выпуклое) подмножество в X , содержащее E .

Из предложения III предыдущего пункта легко получаем

III. Для того чтобы направление $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) сходилась к $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы $x_\alpha - x \rightarrow 0$.

Несколько сложнее доказывается следующее предложение.

IV. Пусть K_1 и K_2 — компактные множества ТВП X . Тогда множество $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$ также компактно.

Действительно, в силу 1.2.8 в произведении $X \times X$ множество $K = K_1 \times K_2$ компактно. Отображение φ :

$$\varphi(x, y) = \lambda_1 x + \lambda_2 y, \quad x, y \in X,$$

пространства $X \times X$ в X непрерывно, и на основании 1.2.5 множество $\varphi(K) = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$ компактно в пространстве X .

Пусть X и Y — ТВП. Отображение $f: X \rightarrow Y$, являющееся одновременно изоморфизмом векторных пространств X и Y и гомеоморфизмом топологических пространств X и Y , называется *изоморфизмом* ТВП X и Y , а сами ТВП X и Y называются в этом случае *изоморфными*. Сохраняя прежнюю точку зрения, мы будем отождествлять изоморфные ТВП.

ТВП X называется *метризуемым*, если его топология может быть задана при помощи метрики.

1.3. Приведем некоторые примеры ТВП.

1) Пространство измеримых функций $S(T, \Sigma, \mu)$.

Для всякого множества $A \in \Sigma$ конечной меры и любого числа $\varepsilon > 0$ положим

$$V(A, \varepsilon) = \left\{ x \in S(T, \Sigma, \mu) : \int_A \frac{|x|}{1+|x|} d\mu < \varepsilon \right\}.$$

Легко показать, что система всех множеств вида $V(A, \varepsilon)$ образует фундаментальную систему окрестностей нуля некоторой топологии на $S(T, \Sigma, \mu)$. Из теоремы 1.6.14 вытекает, что направление $x_\alpha \rightarrow x$ в этом топологическом пространстве тогда и только тогда, когда $x_\alpha \rightarrow x(\mu)$. Так как в топологии сходимости по мере алгебраические операции непрерывны, то мы превратили $S(T, \Sigma, \mu)$ в ТВП. Как показано в 1.6.10, это ТВП метризуемо, если мера μ σ -конечна.

Если мера μ не σ -конечна, то $S(T, \Sigma, \mu)$ не метризуемо. Действительно, совокупность всех множеств конечной меры, упорядоченная по включению, образует направление, которое порождает направление $\{x_\alpha\}$ характеристических функций этих множеств. Очевидно, что $x_\alpha \rightarrow 1(\mu)$, где 1 — функция, тождественно равная единице на T . Если бы $S(T, \Sigma, \mu)$ было метризуемо, то нашлась бы последовательность $x_{\alpha_n} \rightarrow 1(\mu)$. Пусть x_{α_n} — характеристическая функция множества A_n . Положим $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Так как мера μ не σ -конечна, то $\mu(T \setminus B) \neq 0$, а так как мера μ не имеет атомов бесконечной меры, то найдется $A \in \Sigma$ такое, что $A \subset T \setminus B$, $0 < \mu(A) < \infty$. На множестве A имеем $x_{\alpha_n} = 0$, что противоречит $x_{\alpha_n} \rightarrow 1(\mu)$.

Как обобщение пространства s , можно рассмотреть пространство $s(T)$, состоящее из всех вещественных функций, заданных на абстрактном множестве T . Фундаментальная система $\mathfrak{B}$ окрестностей нуля в пространстве $s(T)$ состоит из всех множеств $V_{t_1, t_2, \dots, t_n; \varepsilon}$, определяемых произвольным набором $t_1, t_2, \dots, t_n$ элементов из T и произвольным положительным числом ε : $x \in V_{t_1, t_2, \dots, t_n; \varepsilon}$ означает, что

$$|x(t_k)| \leq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Предоставляем читателю проверить, что указанная система удовлетворяет условиям теоремы 1, так что $s(T)$ оказывается отдельным ТВП, которое совпадает с s , если T — счетное множество.

Как мы отметили в пункте 1.6.10, пространство s является частным случаем пространства $S(T, \Sigma, \mu)$. Точно так же пространство $s(T)$ является частным случаем $S(T, \Sigma, \mu)$. Предостав-

ляем читателю проверку того, что соответствующие векторные пространства изоморфны как ТВП. В силу доказанного $s(T)$ является метризуемым ТВП тогда и только тогда, когда множество T счетно, т. е. $s(T) = s$.

Если $T = \{1, 2, \dots, n\}$, то $s(T)$ можно отождествить с n -мерным пространством K^n и рассматривать K^n как ТВП. Мы, однако, отложим рассмотрение конечномерных ТВП до следующей главы.

2) В качестве следующего примера рассмотрим пространство $C(R^1)$, элементами которого являются всевозможные непрерывные функции, заданные на всей числовой прямой. Топология в $C(R^1)$ вводится посредством фундаментальной системы окрестностей нуля, состоящей из множеств $V_{n;\varepsilon}$, где n — натуральное число, а $\varepsilon > 0$. При этом $x \in V_{n;\varepsilon}$ означает

$$|x(t)| \leq \varepsilon, \quad |t| \leq n.$$

И здесь проверку условий теоремы 1, а также отделимости пространства $C(R^1)$ предоставляем читателю.

3) В теории обобщенных функций большую роль играет пространство $D[a, b]$ всевозможных бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне промежутка $[a, b]$. Фундаментальная система окрестностей нуля в этом пространстве состоит из множеств $V_{n;\varepsilon}$, определяемых произвольным натуральным числом n и произвольным положительным числом ε . Окрестность $V_{n;\varepsilon}$ состоит из всех x , удовлетворяющих условиям

$$|x^{(k)}(t)| \leq \varepsilon, \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad t \in [a, b].$$

4) Приведем еще один пример ТВП. Обозначим через L_∞ совокупность всех измеримых функций, заданных на $[0, 1]$ и суммируемых с любой степенью. Окрестность нуля $V_{p;\varepsilon}$ в L_∞ определяется произвольным числом $p > 1$ и произвольным $\varepsilon > 0$. Именно, $x \in V_{p;\varepsilon}$, если

$$\left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Как будет показано ниже, пространства $C(R^1)$, $D[a, b]$ и L_∞ — метризуемые ТВП.

1.4. Подмножество E ТВП X называется ограниченным, если для любой окрестности нуля V в X существует число λ такое, что $E \subset \lambda V$. Ясно, что для проверки ограниченности множества E достаточно рассмотреть окрестности из некоторой фундаментальной системы окрестностей нуля.

Подмножество G ТВП X называется вполне ограниченным, если для любой окрестности нуля V в X существует конечное подмножество $\{x_k\}_{k=1}^n \subset G$ такое, что $G \subset \bigcup_{k=1}^n (x_k + V)$.

Отметим некоторые простые факты, относящиеся к понятиям ограниченного и вполне ограниченного множеств.

I. Пусть E_1 и E_2 — ограниченные (соответственно вполне ограниченные) подмножества ТВП X . Тогда ограничены (соответственно вполне ограничены) в X следующие множества: $E_1 \cup E_2$, $E_1 + E_2$, λE_1 (λ — число).

Для $E_1 \cup E_2$ и λE_1 утверждение очевидно. Утверждение для $E_1 + E_2$ получаем, заметив, что в силу пункта 4) теоремы 1 множества вида $V + V$ образуют базис окрестностей нуля, когда V пробегает базис окрестностей нуля.

Из I получаем, что конечное множество (вполне) ограничено. II. Всякое вполне ограниченное множество ограничено.

Если E вполне ограничено, то для любой окрестности V , которую мы считаем уравновешенной, найдутся $x_k \in E$ такие, что $E \subset \bigcup_{k=1}^h (x_k + V)$. Как уже было отмечено, конечное множество

$\{x_k\}_{k=1}^n$ ограничено, откуда найдется λ_1 , удовлетворяющее $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \lambda_1 V$, откуда $E \subset \lambda_1 V + V \subset \max(|\lambda_1|, 1) (V + V)$. В силу теоремы 1 множества вида $V + V$ образуют базис окрестностей нуля V , когда V пробегает базис окрестностей нуля.

Поскольку фундаментальную систему окрестностей нуля можно составить из замкнутых окрестностей (следствие 1 теоремы 1), то

III. Замыкание ограниченного (соответственно вполне ограниченного) множества ограничено (соответственно вполне ограничено).

Теорема 2. Для того чтобы подмножество E ТВП X было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы, каковы бы ни были последовательность $\{x_n\} \subset E$ и последовательность $\{\lambda_n\}$ вещественных чисел, $\lambda_n \rightarrow 0$, было $\lambda_n x_n \rightarrow 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ — последовательности указанного вида и V — произвольная уравновешенная окрестность нуля. Существует $\lambda > 0$ такое, что $E \subset \lambda V$. В частности, $x_n \in \lambda V$ ($n = 1, 2, \dots$). Таким образом, если n настолько велико, что $|\lambda_n| \leq 1/\lambda$, то $\lambda_n x_n \in \lambda_n \lambda V \subset V$, т. е. $\lambda_n x_n \rightarrow 0$.

Достаточность. Если бы в условиях теоремы множество E не было ограниченным, то нашлась бы окрестность нуля V , для которой при любом $\lambda > 0$ множество $E \setminus \lambda V$ непусто. Полагая последовательно $\lambda = 1, 2, \dots$, мы получили бы последовательность элементов

$$x_n \in E \setminus nV, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как, с одной стороны, $x_n \in E$ ($n = 1, 2, \dots$), а с другой, $\frac{1}{n} x_n \notin V$, то это противоречило бы условию теоремы.

Далее нам потребуется следующая лемма об ограниченных множествах в $S(T, \Sigma, \mu)$.

Лемма 1. Если $\{x_n\}$ — последовательность вещественных функций, ограниченная в ТВП $S(T, \Sigma, \mu)$, причем $0 \leq x_1(t) \leq x_2(t) \leq x_n(t) \leq x_{n+1}(t) \leq \dots$ п. в., то найдется функция $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ такая, что $x_n(t) \rightarrow x(t)$ п. в.

Доказательство. Достаточно проверить, что при $t \in T$ л. в. предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ конечен. Предположим, что существует множество $A \in \Sigma(\mu)$, для которого $\mu(A) > 0$ и $x_n(t) \rightarrow +\infty$ при любом $t \in A$. Так как множество $\{x_n\}$ ограничено, то окрестность $U(A, \varepsilon/2)$, где $\varepsilon = \mu(A)$, поглощает последовательность $\{x_n\}$, т. е. найдется число $\lambda > 0$ такое, что

$$\int_A \frac{|\lambda x_n(t)|}{1 + |\lambda x_n(t)|} d\mu(t) < \varepsilon/2, \quad n \in N. \quad (2)$$

Так как $x_n(t) \uparrow +\infty$ при $t \in A$, то

$$\frac{|\lambda x_n(t)|}{1 + |\lambda x_n(t)|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

откуда по теореме Лебега (теорема II.6.6) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \frac{|\lambda x_n(t)|}{1 + |\lambda x_n(t)|} d\mu(t) = \int_A d\mu(t) = \varepsilon,$$

что противоречит неравенству (2). Итак, при почти всех $t \in T$ имеем $x_n(t) \uparrow x(t) < +\infty$.

1.5. Остановимся на понятии полноты ТВП. Рассмотрим направление $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$). Обозначим через A^2 совокупность всевозможных пар (α', α'') , где $\alpha', \alpha'' \in A$. Если мы введем в A^2 упорядочение $(\alpha'_1, \alpha''_1) \geq (\alpha'_2, \alpha''_2)$ тогда и только тогда, когда одновременно $\alpha'_1 \geq \alpha'_2$ и $\alpha''_1 \geq \alpha''_2$, то A^2 становится направленным по возрастанию множеством.

Направление (x_α) в ТВП X называется *сходящимся в себе* (или *направлением Коши*), если направление $\{x_{(\alpha', \alpha'')}\}$ ($\alpha \in A^2$), где $x_{(\alpha', \alpha'')} = x_{\alpha'} - x_{\alpha''}$, сходится к нулю в X , т. е. для любой окрестности нуля U найдется $\alpha_0 \in A$ такое, что при $\alpha', \alpha'' > \alpha_0$ имеем $x_{\alpha'} - x_{\alpha''} \in U$. Подмножество E ТВП X называется *полным*, если любое направление Коши элементов этого множества сходится к элементу этого множества. В соответствии с этой терминологией ТВП X называется *полным*, если любое направление Коши в нем сходится. Если при этом рассматривать лишь ограниченные направления, то ТВП называется *квазиполным*; если же принимать во внимание лишь обычные последовательности, то ТВП называется *секвенциально полным*. Отметим, что замкнутое подмножество полного пространства является полным.

Поскольку множество элементов направления Коши не обязательно ограничено, то требование полноты является более сильным, чем требование квазиполноты (то, что оно существенно сильнее, мы увидим ниже на примерах). С другой стороны, последовательность Коши, как это нетрудно доказать, ограничена, поэтому квазиполнота влечет секвенциальную полноту. В метри-

зуюмом ТВП все три вида полноты совпадают, как ясно из следующей теоремы.

Теорема 3. *Сквенциально полное ТВП X , в котором имеется счетная фундаментальная система окрестностей нуля*), полно.*

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — направление Коши элементов пространства X . Обозначим через $\{V_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), счетную фундаментальную систему окрестностей нуля. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ найдется такая пара $(\alpha'_n, \alpha''_n) \in A^2$, что

$$x_{\alpha'} - x_{\alpha''} \in V_n, \text{ при } (\alpha', \alpha'') \geq (\alpha'_n, \alpha''_n). \quad (3)$$

Обозначим через α_n элемент из A , для которого $\alpha_n \geq \alpha'_n, \alpha_n \geq \alpha''_n$. Можно считать, что $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots$. Рассмотрим последовательность $\{x_{\alpha_n}\}$. Поскольку она, очевидно, сходится в себе, то по условию существует $x \in X$ такое, что $x_{\alpha_n} \rightarrow x$. Докажем сходимость $x_\alpha \rightarrow x$. Возьмем произвольную окрестность V_m и найдем окрестность V_k такую, что $V_k + V_k \subset V_m$. Можно указать такой номер $n \geq k$, что

$$x_{\alpha_n} - x \in V_k.$$

С другой стороны, из (3) для $\alpha \geq \alpha_n$ имеем

$$x_\alpha - x_{\alpha_n} \in V_k.$$

Поэтому

$$x_\alpha - x = (x_\alpha - x_{\alpha_n}) + (x_{\alpha_n} - x) \in V_k + V_k \subset V_m.$$

Теорема доказана.

В случае метризуемого ТВП X имеем два понятия полноты — полнота X как ТВП и полнота X как метрического пространства. В общем случае это разные понятия. Однако, если метрика ρ , задающая топологию в X , удовлетворяет соотношению $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0)$ для всех $x, y \in X$, то, очевидно, оба понятия полноты совпадают. Во всех конкретных ТВП, которые мы рассматриваем в этой книге, метрика обладает вышеуказанным свойством. Подробнее о понятии полноты см. Бурбаки — IV и Келли.

Каждое ТВП X может быть пополнено. Иначе говоря, существует полное ТВП $\hat{X}$ такое, что X является подпространством $\hat{X}$ и X плотно в $\hat{X}$. Соответствующая теорема доказывается по образцу теоремы I.4.1 с заменой классов эквивалентных последовательностей Коши на классы направлений (проверка того, что $\hat{X}$ при этом будет векторным пространством, проводится аналогично IV.1.4). Пространство $\hat{X}$ называется *пополнением* ТВП X . Пополнения ТВП нам в дальнейшем не понадобятся.

*) На самом деле это условие эквивалентно метризуемости ТВП X (см. Шефер, I.6.1).

При помощи теоремы 3 легко доказывается, что ТВП $S(\mathbf{R}^1)$ и $D[a, b]$ полны. Полнота метризуемого ТВП L_∞ легко доказывается после результатов главы IV о полноте пространств L^p . Полнота метризуемого ТВП $S(T, \Sigma, \mu)$ в случае σ -конечной меры установлена в теореме 1.6.15. Из этого результата несложно получить, что ТВП $S(T, \Sigma, \mu)$ полно, если пространство (T, Σ, μ) обладает свойством прямой суммы (см. 1.6.10).

Перейдем теперь к изучению связи между вполне ограниченными и компактными множествами. Следующую теорему можно рассматривать как аналог теоремы Хаусдорфа (см. 1.5.1) о компактных множествах в метрических пространствах. На самом деле обе эти теоремы являются следствием более общего результата для так называемых равномерных пространств (см. Бурбаки — II).

Теорема 4. *Подмножество ТВП X компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и полно.*

Доказательство. Пусть множество K компактно. Покажем сначала, что оно вполне ограничено. Для этого возьмем произвольную открытую окрестность нуля V . Очевидно, что семейство открытых множеств $\{x + V\} (x \in K)$ образует покрытие K , откуда, воспользовавшись определением компактности, получаем вполне ограниченность K .

Докажем теперь, что K полно. Пусть $\{x_\alpha\} (\alpha \in A)$ — направление Коши элементов из K . В силу теоремы 1.2.3 существует поднаправление $\{y_\beta\} (\beta \in B)$, сходящееся к $x \in K$. Покажем, что $x_\alpha \rightarrow x$. Возьмем произвольную окрестность нуля V . Тогда найдется окрестность нуля U такая, что $U + U \subset V$. Так как $\{x_\alpha\}$ — направление Коши, то существует $\alpha_0 \in A$ такое, что $x_\alpha - x_{\alpha'} \in U$ при $\alpha, \alpha' \geq \alpha_0$. С другой стороны, так как $y_\beta \rightarrow x$, то существует $\beta_0 \in B$ такое, что $x - y_\beta \in U$ при $\beta \geq \beta_0$. В силу определения поднаправления для α_0 найдется индекс $\beta(\alpha_0) \in B$ такой, что для любого $\beta' \in B$, $\beta' \geq \beta(\alpha_0)$, найдется индекс $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \alpha_0$, удовлетворяющий $x_{\alpha'} = y_{\beta'}$. Возьмем $\beta' \geq \beta(\alpha_0)$, β_0 и соответствующий индекс α' . Итак, при $\alpha \geq \alpha_0$ имеем

$$x_\alpha - x = (x_\alpha - x_{\alpha'}) + (y_{\beta'} - x) \in U + U \subset V,$$

откуда $x_\alpha \rightarrow x$.

Пусть, обратно, множество K вполне ограничено и полно. Для проверки компактности K опять воспользуемся теоремой 1.2.3. Пусть $\{x_\alpha\} (\alpha \in A)$ — произвольное направление элементов множества K . Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех центрированных семейств $\mathfrak{F}$ подмножеств E множества K таких, что направление $\{x_\alpha\}$ часто встречается (см. 1.2.7) с каждым $E \in \mathfrak{F}$. Множество $\mathfrak{M}$ непусто, так как семейство, состоящее из одного K , входит в $\mathfrak{M}$. Упорядочим множество $\mathfrak{M}$ по включению. По лемме Цорна существует максимальное семейство $\mathfrak{F}_0$ в множестве $\mathfrak{M}$ (применение леммы Цорна аналогично доказательству теоремы II.4.1). Из максимальной $\mathfrak{F}_0$ следует, что

- 1) $K \in \mathfrak{F}_0$;
 2) если множества $A_1, A_2, \dots, A_n$ часто встречаются с $\{x_\alpha\}$
 и $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{F}_0$, то $A_i \in \mathfrak{F}_0$ при некотором i .

Утверждение 1) очевидно. Предположим, что 2) неверно. Если при добавлении некоторого множества A_i к семейству $\mathfrak{F}_0$ получившееся семейство окажется центрированным, то в силу максимальности $\mathfrak{F}_0$ оно совпадет с $\mathfrak{F}_0$, откуда $A_i \in \mathfrak{F}_0$. Итак, раз мы предположили, что 2) неверно, то для каждого A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) найдется конечный набор множеств $B_i^{(k)} \in \mathfrak{F}_0$ ($k = 1, 2, \dots, k_i$ таких, что

$$A_i \cap B_i^{(1)} \cap B_i^{(2)} \cap \dots \cap B_i^{(k_i)} = \emptyset.$$

Тогда $C = \bigcap_{i=1}^n A_i \cap \bigcap_{i=1}^n (B_i^{(1)} \cap B_i^{(2)} \cap \dots \cap B_i^{(k_i)}) = \emptyset$. Однако по условию $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{F}_0$, $B_i^{(k)} \in \mathfrak{F}_0$ и семейство $\mathfrak{F}_0$ центрировано, откуда получаем, что это множество C непусто. Полученное противоречие доказывает 2).

Рассмотрим множество B всех пар (E, α) , где $E \in \mathfrak{F}_0$ и $\alpha \in A$ удовлетворяет $x_\alpha \in E$. В множестве B введем порядок следующим образом: $(E_1, \alpha_1) \geq (E_2, \alpha_2)$ тогда и только тогда, когда $E_1 \subset E_2$ и $\alpha_1 \geq \alpha_2$ в Λ . Используя то, что семейство $\mathfrak{F}_0$ центрировано и $\{x_\alpha\}$ часто встречается с каждым элементом $\mathfrak{F}_0$, получаем, что B является направленным по возрастанию множеством. Для $(E, \alpha) \in B$ положим $y_{(E, \alpha)} = x_\alpha$. Тогда $\{y_{(E, \alpha)}\} ((E, \alpha) \in B)$ — поднаправление в $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$). Действительно, для любого $\alpha \in A$ возьмем элемент $(K, \alpha) \in B$. Если $(E, \alpha') \in B$, $(E, \alpha') \geq (K, \alpha)$, то $\alpha' \geq \alpha$ и $x_{\alpha'} = y_{(E, \alpha')}$, что и доказывает требуемое.

Покажем, что $\{y_{(E, \alpha)}\} ((E, \alpha) \in B)$ — направление Конни, чем в силу полноты K и будет закончено доказательство теоремы.

Возьмем произвольную окрестность нуля V . Тогда найдется уравновешенная окрестность нуля U такая, что $U + U \subset V$. Так как множество K вполне ограничено, то можно найти точки $z_1, z_2, \dots, z_n \in K$ такие, что $K \subset \bigcup_{i=1}^n (z_i + U)$. Если мы положим

$$A_i = (z_i + U) \cap K, \text{ то } K = \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{F}_0, \text{ откуда в силу 2) некоторое}$$

$A_i \in \mathfrak{F}_0$. Возьмем произвольный индекс $\alpha \in A$ такой, что $x_\alpha \in A_i$. Если $(E_1, \alpha_1), (E_2, \alpha_2) \in B$ и $(E_1, \alpha_1), (E_2, \alpha_2) \geq (A_i, \alpha)$, то, так как $E_1, E_2 \subset A_i$, имеем

$$\begin{aligned} y_{(E_1, \alpha_1)} - y_{(E_2, \alpha_2)} &= x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in E_1 - E_2 \subset A_i - A_i \subset \\ &\subset (z_i + U) - (z_i + U) \subset U + U \subset V. \end{aligned}$$

Мы получили, что построенное поднаправление в $\{x_\alpha\}$ является направлением Коши, на чем доказательство теоремы полностью заканчивается.

Теорема 4 оправдывает то, что вполне ограниченные множества часто называют *предкомпактными*.

§ 2. Локально выпуклые пространства

2.1. Отделимое ТВП X (над K) называется *локально выпуклым пространством* (сокращенно ЛВП), если в нем существует фундаментальная система выпуклых окрестностей нуля. Теория ЛВП значительно богаче результатами, чем теория ТВП, в первую очередь в силу того, что на ЛВП всегда имеется много линейных непрерывных функционалов. Кроме того, почти все конкретные пространства, встречающиеся в функциональном анализе, локально выпуклы.

Теорема 1.1 в применении к ЛВП значительно упрощается. В силу теоремы 1.1 ЛВП имеет базис замкнутых абсолютно выпуклых окрестностей нуля.

Теорема 1. Пусть в векторном пространстве X выделена система $\mathfrak{B}$, поглощающих абсолютно выпуклых множеств, удовлетворяющая следующему условию:

для любого $x \neq 0$ найдутся $V \in \mathfrak{B}$, и $\lambda > 0$ такие, что $x \notin \lambda V$. (1)

Обозначим через $\mathfrak{B}$ систему множеств вида

$$\varepsilon \bigcap_{i=1}^n V_i, \quad \varepsilon > 0, \quad V_i \in \mathfrak{B}_0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Тогда система $\mathfrak{B}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1; при этом X превращается в ЛВП (с фундаментальной системой окрестностей нуля $\mathfrak{B}$).

Доказательство. Условия 1)–3) теоремы 1.1 для $\mathfrak{B}$ очевидны, а 4) вытекает из того, что для любого выпуклого множества E имеем $(1/2)E + (1/2)E = E$. Итак, X — ТВП. Следствие 2 теоремы 1.1 показывает, что из условия (1) вытекает хаусдорфовость X . Так как множества вида (2) абсолютно выпуклы, то X — ЛВП.

Лемма 1. Пусть X — ТВП.

1) Калибровочная функция p непрерывна на X тогда и только тогда, когда она непрерывна в нуле.

2) Функционал Минковского p_U выпуклого поглощающего множества U непрерывен тогда и только тогда, когда U — окрестность. В этом случае внутренность $\overset{\circ}{U} = \{x: p_U(x) < 1\}$, а замыкание $\bar{U} = \{x: p_U(x) \leq 1\}$.

Доказательство. 1) Если p непрерывна в нуле, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется уравновешенная окрестность нуля U , для всех точек x которой $p(x) < \varepsilon$. Если точка $y \in X$ произ-

вольна, то для всех $x \in y + U$ имеем $x - y, y - x \in U$, откуда в силу неравенства II.3.2(с') получаем $|p(x) - p(y)| \leq \max(p(x - y), p(y - x)) < \varepsilon$.

2) По лемме II.3.1 p_U — калпбровочная функция. Если U — окрестность, то для всякого $\varepsilon > 0$ из $x \in \varepsilon U$ следует $p_U(x) \leq \varepsilon$ в силу определения функционала Минковского, откуда p_U непрерывна в нуле, а следовательно, и на всем X .

Обратно, если p_U непрерывна, то множество $V = \{x: p(x) < 1\} = p^{-1}((-1, 1))$ открыто. Так как $V \subset U$, то U — окрестность.

Пусть $x \in \overset{\circ}{U}$. Предположим, что $p_U(x) = 1$, и покажем, что любая окрестность V точки x содержит точки $y \notin U$, чем получим противоречие с $x \in \overset{\circ}{U}$. Действительно, так как V — окрестность точки x , то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $y = (1 + \varepsilon)x \in V$. Тогда $p_U(y) = (1 + \varepsilon)p_U(x) = 1 + \varepsilon > 1$, откуда $y \notin U$.

Пусть $p_U(x) \leq 1$. Тогда существует последовательность $\lambda_n \rightarrow 1$ такая, что $x \in \lambda_n U$ при любом n . Следовательно, $y_n = x/\lambda_n \in U$ и $y_n \rightarrow x \in \overset{\circ}{U}$. Лемма полностью доказана.

Следствие. Если E — выпуклое множество в ТВП X , то его внутренность $\overset{\circ}{E}$ — выпуклое множество. Если $\overset{\circ}{E} \neq \emptyset$, то замыкание $\overset{\circ}{E}$ есть $\bar{E}$.

Доказательство. Можно считать, что $\overset{\circ}{E} \neq \emptyset$. Возьмем $x \in \overset{\circ}{E}$. Тогда множество $U = x - E$ — выпуклая окрестность нуля, причем $\overset{\circ}{U} = x - \overset{\circ}{E}$. В силу леммы 1 множество $\overset{\circ}{U} = \{x: p_U(x) < 1\}$ выпукло, а тогда выпукло и $\overset{\circ}{E}$.

Докажем второе утверждение. Так как $\bar{\overset{\circ}{U}} = x - \bar{\overset{\circ}{E}}$, то его достаточно доказать для $\overset{\circ}{U}$, а для этого достаточно проверить, что $\bar{\overset{\circ}{U}} \supset U$. Возьмем $x \in U$ и рассмотрим $y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x$. Так как $p_U(y_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)p_U(x) < 1$, то $y_n \in \overset{\circ}{U}$. С другой стороны, $y_n \rightarrow x$, откуда $x \in \bar{\overset{\circ}{U}}$.

Топологию ЛВП на векторном пространстве X можно задать при помощи произвольной системы полунорм $\{p_i\}$ ($\xi \in \Xi$), удовлетворяющей условию:

для любого $x \in X$ существует $\xi \in \Xi$, для которого $p_i(x) \neq 0$. (3)

Пусть $\mathfrak{B}_0$ состоит из всех множеств V_ξ вида

$$V_\xi = \{x \in X: p_i(x) \leq 1\}, \quad \xi \in \Xi.$$

В силу леммы II.3.1 множества V_ξ абсолютно выпуклые и поглощающие. Из (3) вытекает, что система $\mathfrak{B}_0$ удовлетворяет (1). Тогда топологию на X определяем, как описано в теореме 1.

Система множеств (2) имеет вид

$$\{x \in X: \max_{1 \leq i \leq n} p_{\xi_i}(x) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0; \quad \xi_1, \dots, \xi_n \in E.$$

Полученная топология, превращающая X в ЛВП, называется топологией, порожденной семейством $\{p_{\xi}\}$ ($\xi \in E$). Если X — ЛВП, топология которого порождается некоторым набором полунорм $\{p_{\xi}\}$ ($\xi \in E$), то говорят, что семейство полунорм $\{p_{\xi}\}$ является порождающим или определяющим для топологии ЛВП X . В силу леммы 1 все полунормы из определяющего набора непрерывны.

Топология всякого ЛВП X порождается некоторым набором полунорм. Действительно, возьмем систему $\mathfrak{B}_0$ абсолютно выпуклых окрестностей нуля такую, что множества вида (2) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в X (например, базис абсолютно выпуклых окрестностей нуля). Условие (1) при этом будет выполнено автоматически в силу отделимости X . Тогда исходная топология ЛВП X порождается семейством полунорм $\{p_V\}$ ($V \in \mathfrak{B}_0$), где p_V — функционал Минковского окрестности V .

Порождающий набор полунорм определен, конечно, неоднозначно. Например, если полунорма p принадлежит некоторому такому набору Q , то либо полунорма $q(x) = 2p(x)$ входит в Q , либо не входит. В первом случае выбросим q из Q , во втором случае, наоборот, добавим q в Q . И в том и другом случае получаем порождающий набор полунорм, отличный от Q .

Теорема 2. Для того чтобы ЛВП X было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было отделимо и обладало счетным порождающим набором полунорм.

Доказательство. Необходимость. Если X метризуемо, то в X имеется счетный базис окрестностей нуля. Функционалы Минковского абсолютно выпуклых оболочек окрестностей из этого базиса образуют, очевидно, счетный порождающий набор полунорм.

Достаточность. Пусть $\{p_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) — порождающий набор полунорм. Это означает, что семейство множеств

$$V_n = \{x \in X: \max_{1 \leq k \leq n} p_k(x) \leq n^{-1}\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

образует счетный базис окрестностей нуля в X . Для любых $x, y \in X$ положим

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1 + p_k(x-y)}. \quad (4)$$

Легко проверить, что функция $\rho(x, y)$, определяемая формулой (4), является метрикой. Докажем, что топология, порожаемая этой метрикой, совпадает с исходной топологией ЛВП X . Так как ЛВП X имеет счетный базис окрестностей нуля, то для

этого достаточно проверить, что последовательность $x_m \rightarrow 0$ в X тогда и только тогда, когда $\rho(x_m, 0) \rightarrow 0$. Последовательности $\xi_m = \{p_n(x_m)\}_{n=1}^{\infty}$ ($m \in \mathbb{N}$) можно отождествить с элементами пространства s . Так как расстояние от ξ_m до 0 в пространстве s совпадает с $\rho(x_m, 0)$, а сходимость в s есть координатная сходимость (см. I.3.2), то $\rho(x_m, 0) \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $p_n(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Из вида множеств V_n вытекает, что сходимость $x_m \rightarrow 0$ в X означает то же самое. Теорема доказана.

В терминах порождающего набора полунорм многие понятия, относящиеся к ЛВП, приобретают простой и наглядный смысл. Пусть $\{p_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — семейство полунорм, порождающее топологию ЛВП X . Следующие утверждения вытекают непосредственно из определений.

I. Направление $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) сходится к элементу x в ЛВП X тогда и только тогда, когда при любом $\xi \in \Xi$ имеем $p_\xi(x_\alpha - x) \xrightarrow{A} 0$.

II. Ограниченность множества $E \subset X$ равносильна ограниченности при любом $\xi \in \Xi$ числовых множеств $\{p_\xi(x): x \in E\}$.

Введенные в 1.3 пространства $s(T)$, $C(\mathbb{R}^1)$, $D[a, b]$, L_∞ являются ЛВП. С пространством $S(T, \Sigma, \mu)$ дело обстоит сложнее. Если (T, Σ, μ) не является пространством с дискретной мерой, то ТВП $S(T, \Sigma, \mu)$ не локально выпукло (ниже мы это докажем в частном случае $S(0, 1)$); если же мера μ дискретна, то $S(T, \Sigma, \mu)$ является ЛВП. Пусть мера μ дискретна, T^* — множество атомов. Тогда ТВП $S(T, \Sigma, \mu)$ изоморфно ТВП $s(T^*)$; однако, очевидно, что $s(T^*)$ — ЛВП, откуда $S(T, \Sigma, \mu)$ в этом случае — ЛВП.

В заключение этого пункта докажем одно утверждение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Теорема 3. В любом ЛВП выпуклая оболочка и абсолютно выпуклая оболочка вполне ограниченного подмножества вполне ограничены.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай абсолютно выпуклой оболочки. Пусть E — вполне ограниченное множество, E_1 — его абсолютно выпуклая оболочка. Если V — произвольная абсолютно выпуклая окрестность нуля в X , то найдутся элементы $x_i \in E$ ($1 \leq i \leq n$), для которых $E \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V)$. Отождествим конечномерное пространство $\mathcal{L}(\{x_i\}_{i=1}^n)$ с K^n при $m \leq n$ (см. II.1.4). Абсолютно выпуклая оболочка A конечногo множества $\{x_i\}_{i=1}^n$, очевидно, ограничена и замкнута, а тогда и компактна в евклидовом пространстве K^n . Так как сходимость в K^n означает покоординатную сходимость, а алгебраические операции непрерывны в X , то тождественное вложение $K^n \rightarrow X$ непрерывно, а тогда множество A компактно в X , и потому вполне ограничено (теорема 1.4).

Имеем $E_1 \subset A + V$, так как $A + V$ абсолютно выпукло и содержит E . В силу того, что A вполне ограничено, существуют элементы $y_j \in A$ ($1 \leq j \leq j_0$), для которых $A \subset \bigcup_{j=1}^{j_0} (y_j + V)$. Окон-

чательно получаем $E_1 \subset A + V \subset \bigcup_{j=1}^{j_0} (y_j + 2V)$, откуда E_1 вполне ограничено. Теорема доказана.

Из теоремы 3, используя теорему 1.4, получаем

Следствие. В квазіполном ЛВП замкнутая выпуклая оболочка и замкнутая абсолютно выпуклая оболочки любого предкомпактного множества компактны.

2.2. В этом пункте мы рассмотрим приложения теоремы Хана — Бахаха в ее аналитической форме к теории ЛВП. В частности, доказывается важнейшее свойство ЛВП, заключающееся в том, что в ЛВП имеется много линейных непрерывных функционалов.

Отметим прежде всего, что линейный функционал f непрерывен на ТВП X тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле. Действительно, пусть f непрерывен в нуле и направление $x_\alpha \rightarrow x$ в X . Тогда $f(x_\alpha) - f(x) = f(x_\alpha - x) \rightarrow 0$.

Лемма 2. Всякая гиперплоскость M в ТВП X либо замкнута, либо плотна в X . Гиперплоскость $M = \{x: f(x) = \lambda\}$ замкнута тогда и только тогда, когда функционал f непрерывен.

Доказательство. Пусть $M = x + H$, где H — гиперподпространство. Если гиперподпространство H незамкнуто, то оно должно быть плотно в X , так как замыкание $\bar{H}$ является линейным множеством, содержащим H (см. лемму Н.2.1). В силу равенства $\bar{M} = x + \bar{H}$ получаем первое утверждение. В силу теоремы Н.2.1 для доказательства второго утверждения достаточно проверить, что $f^{-1}(0)$ замкнуто тогда и только тогда, когда функционал f непрерывен. Если f непрерывен, то $f^{-1}(0)$ замкнуто, так как множество $\{0\}$ замкнуто в K . Обратно, предположим, что $H = f^{-1}(0)$ замкнуто. Достаточно доказать, что функционал f непрерывен в нуле. Пусть $f \neq 0$ (иначе $f = 0$ непрерывен); $V = \{x: |f(x)| < \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$). Если мы покажем, что V — окрестность нуля в X , то мы получим непрерывность f в нуле. Так как $f \neq 0$, то найдется точка $x_0 \in X$, в которой $f(x_0) = \varepsilon$. В силу замкнутости H существует уравновешенная окрестность нуля U такая, что $(x_0 + U) \cap H = \emptyset$. Покажем, что $U \subset V$, откуда получим, что V — окрестность нуля. Предположим противное, т. е. найдется $x \in U$, для которого $|f(x)| \geq \varepsilon$. Тогда $y = -\varepsilon x / f(x) \in U$ и $f(x_0 + y) = f(x_0) - \varepsilon = 0$, откуда $y \in (x_0 + U) \cap H$, и получено противоречие.

Теорема 4 (геометрическая форма теоремы Хана — Бахаха). Пусть X — ТВП, E — линейное подмножество в X , $x_0 \in X$. Если U — непустое выпуклое открытое подмножество X , не пересекаю-

щееся с $x_0 + E$, то в X существует замкнутая гиперплоскость Π , содержащая $x_0 + E$ и не пересекающаяся с U .

Доказательство. Пусть сначала X — вещественное пространство. Используя, если надо, сдвиг, мы можем считать, что $0 \in U$, т. е. U — окрестность нуля. Обозначим через p функционал Минковского множества U . Рассмотрим линейное множество $F = \mathcal{L}(x_0, E)$ в X . Тогда E — гиперплоскость в F и по теореме II.2.2 существует линейный функционал f_0 на F такой, что $f_0^{-1}(0) = E$ и $f_0(x_0) = 1$. Проверим, что для любого $x = \lambda x_0 + y$ ($y \in E$) имеем $f_0(x) \leq p(x)$, или, что то же самое, $\lambda \leq p(\lambda x_0 + y)$. Так как при $\lambda \leq 0$ последнее неравенство очевидно, то достаточно доказать, что при любом $\lambda > 0$ выполнено

$$p\left(\frac{\lambda x_0 + y}{\lambda}\right) \geq 1.$$

В силу леммы 1 последнее неравенство означает, что $x_0 + y/\lambda \notin U$. Так как $y/\lambda \in E$, то это соотношение выполнено.

В силу теоремы Хаана — Бахаха в аналитической форме (см. теорему II.4.1) существует линейный функционал f на X , являющийся продолжением f_0 и удовлетворяющий неравенству $f(x) \leq p(x)$ при любом $x \in X$. Так как $-p(-x) \leq f(x) \leq p(x)$ и U — окрестность нуля, то функционал f непрерывен на X . Тогда по лемме 2 $H = f^{-1}(1)$ — замкнутая гиперплоскость в X . Очевидно, что $H \supset x_0 + E$. Проверим, что $H \cap U = \emptyset$. Действительно, если $x \in U$, то $p(x) < 1$, а если $x \in H$, то $1 = f(x) \leq p(x)$. Тем самым теорема доказана для вещественного пространства X .

Пусть теперь X — комплексное пространство. Используя, если надо, сдвиг, мы можем считать, что $0 \in x_0 + E$, т. е. $x_0 + E$ — линейное множество. По доказанному существует замкнутое вещественное гиперподпространство H_1 такое, что $H_1 \supset x_0 + E$, $H_1 \cap U = \emptyset$. По лемме II.2.2 $H = H_1 \cap (iH_1)$ — гиперподпространство, причем очевидно, что H удовлетворяет требованиям теоремы.

Теорема 4 справедлива в любом ТВП, но для ее применения необходимо наличие открытых выпуклых множеств, а их-то как раз много в ЛВП. Приложение теоремы 4 мы отложим до следующего пункта, а сейчас приведем ряд следствий из теоремы Хаана — Бахаха в аналитической форме.

Пусть X — ЛВП, X_0 — линейное множество в X . В индуцированной из X топологии X_0 становится, очевидно, ЛВП.

Следствие 1. Пусть f_0 — непрерывный линейный функционал на X_0 . Существует непрерывный линейный функционал f на X , являющийся распространением функционала f_0 .

Доказательство. В силу непрерывности f_0 найдется абсолютно выпуклая окрестность нуля U такая, что $|f(x)| \leq 1$ на $U \cap X_0$. Тогда $|f(x)| \leq p_U(x)$ на X_0 . По теореме II.4.2

f_0 обладает продолжением f на все X таким, что $|f(x)| \leq p(x)$, и, следовательно, непрерывным.

Следствие 2. Для любой точки x_0 векторного пространства X и полунормы p существует линейный функционал f на X , для которого $|f(x)| \leq p(x)$ и $f(x_0) = p(x_0)$.

Доказательство. На одномерном векторном пространстве X_0 , порожденном точкой x_0 , положим $f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$, а затем продолжим f_0 на X в силу теоремы II.4.2.

Следствие 3. Пусть X — ЛВП. Если $f(x) = 0$ для любого непрерывного линейного функционала f на X , то $x = 0$.

Доказательство. Если $x \neq 0$, то в силу (3) найдется непрерывная полунорма p , для которой $p(x) > 0$. Тогда по следствию 2 найдется f , для которого $f(x) \neq 0$.

Следствие 3 устанавливает важнейшее свойство ЛВП — наличие достаточного множества непрерывных линейных функционалов. Рассмотрения, связанные с этим фактом, мы отложим до следующего параграфа. Множество всех непрерывных линейных функционалов на ТВП X обозначается X^* и называется *топологическим сопряженным* (к X). Очевидно, что X^* является линейным подмножеством в алгебраическом сопряженном. Мы доказали, что если X — ЛВП, то X^* разделяет точки на X . В случае ТВП может оказаться, что $X^* = \{0\}$ (но бывает, что X^* разделяет точки на X и в случае ТВП, не являющегося ЛВП).

Покажем, что в ТВП $S(0, 1)$ любой непрерывный линейный функционал равен нулю. Пусть $f \in (S(0, 1))^*$, $f \neq 0$. Так как совокупность линейных комбинаций характеристических функций интервалов плотна в $S(0, 1)$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется интервал Δ_n длины, меньшей, чем $1/n$, для которого $f(\chi_{\Delta_n}) = \delta_n \neq 0$. Если $x_n = \chi_{\Delta_n}/\delta_n$, то $x_n \rightarrow 0$ по мере, откуда в силу непрерывности f имеем $f(x_n) \rightarrow 0$. С другой стороны, $f(x_n) = 1$, чем получено противоречие.

В заключение этого пункта введем еще одно обозначение. Если X — ЛВП, то через X_R^* обозначим множество всех непрерывных вещественных линейных функционалов на X . Если X вещественно, то $X_R^* = X^*$.

2.3. Здесь мы приведем две важные теоремы об отделении выпуклых множеств линейным непрерывным функционалом, которые находят многочисленные применения в выпуклом анализе с его приложениями к математической экономике (см. Гольштейн; Ицффе, Тихомиров; Никайдо).

Пусть E и F — подмножества ЛВП X . Мы будем говорить, что они *отделимы*, если существует функционал $f \in X_R^*$ такой, что

$$\sup \{f(x) : x \in E\} \leq \inf \{f(x) : x \in F\}. \quad (5)$$

Если в (5) стоит знак строгого неравенства, то говорят, что E и F *строго отделимы*. Несимметрия этого определения относи-

тельно E и F лишь кажущаяся — достаточно перейти к функционалу — f , чтобы E и F поменялись местами.

Лемма 3. Если E — открытое множество в ЛВП X , $f \in X^*$, $f \neq 0$, то $f(E)$ открыто.

Доказательство. Если $x \in E$, то $E - x$ — окрестность нуля, а потому поглощающее множество. Так как $f \neq 0$, то найдется $x_0 \in X$, для которого $f(x_0) = 1$. Следовательно, существует такое $\lambda > 0$, что при $|\mu| \leq \lambda$ имеем $\mu x_0 \in E - x$. Тогда $f(x) + \mu \in f(E)$ при $|\mu| \leq \lambda$, что и означает, что $f(E)$ открыто.

Теорема 5. Пусть E — выпуклое подмножество с непустой внутренностью $\overset{\circ}{E}$ в ЛВП X , F — непустое выпуклое подмножество X , $\overset{\circ}{E} \cap F = \emptyset$. Тогда E и F отделимы. Если E и F открыты, то они строго отделимы.

Доказательство. В силу следствия леммы 1 множество $\overset{\circ}{E}$ выпукло. Следовательно, выпукло множество $U = \overset{\circ}{E} - F$, которое открыто и не содержит нуля, так как $\overset{\circ}{E} \cap F = \emptyset$. Тогда по теореме 4 пайдется замкнутое вещественное гиперподпространство H такое, что $0 \in H$ и $(\overset{\circ}{E} - F) \cap H = \emptyset$. Пусть $H = \{x: f(x) = 0\}$, где $f \in X_R^*$. Множество $f(\overset{\circ}{E} - F)$ выпукло и, следовательно, является интервалом в $\mathbb{R}$; $0 \notin f(\overset{\circ}{E} - F)$. Сменив, если надо, знак, можно считать, что $f(\overset{\circ}{E} - F) < 0$. Таким образом, $\sup \{f(x): x \in \overset{\circ}{E}\} \leq \inf \{f(x): x \in F\}$. Используя то, что $\overset{\circ}{E}$ плотно в E (см. следствие леммы 1) и функционал f непрерывен, получаем, что E и F отделимы.

Если E и F — открытые множества, то по лемме 3 $f(E)$ и $f(F)$ — открытые интервалы в $\mathbb{R}$, откуда получаем строгую отделимость.

Замкнутое выпуклое множество в ЛВП X с непустой внутренностью называется *выпуклым телом*. Пусть E — подмножество ЛВП X . Тогда вещественный функционал $f \in X_R^*$ называется *опорным к E в точке $x_0 \in E$* , если существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $f(x_0) = \lambda$ и E содержится в $\{x: f(x) \leq \lambda\}$ или в $\{x: f(x) \geq \lambda\}$. При этом вещественная гиперплоскость $\{x: f(x) = \lambda\}$ называется *опорной к E в точке x_0* .

Следствие. Если C — выпуклое тело в X , то для любой граничной точки C существует опорный функционал.

Доказательство. Если x_0 — граничная точка C , то следствие получается из теоремы 5, если принять в ней $E = C$, $F = \{x_0\}$.

Теорема 6. Пусть E и F — непустые выпуклые непересекающиеся подмножества ЛВП X , причем E замкнуто, а F компактно. Тогда E и F строго отделимы.

Доказательство. Покажем, что существует выпуклая открытая окрестность нуля U такая, что множества $E + U$ и $F + U$ не пересекаются. Так как эти множества открыты и выпуклы, то утверждение будет следовать из теоремы 5.

Достаточно доказать существование абсолютно выпуклой открытой окрестности нуля V , для которой $(E + V) \cap F = \emptyset$, так как тогда для $U = (1/2)V$ имеем $(E + U) \cap (F + U) = \emptyset$. Действительно, если $x = a + (1/2)v_1 = b + (1/2)v_2$, где $a \in E$, $b \in F$, $v_1, v_2 \in V$, то $b = x - (1/2)v_2 \in (E + V) \cap F$.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ базис всех открытых абсолютно выпуклых окрестностей нуля в X . Предположим, что для всех $V \in \mathfrak{B}$ имеем $(E + V) \cap F \neq \emptyset$. Тогда $\{(E + V) \cap F : V \in \mathfrak{B}\}$ — центрированная система замкнутых подмножеств компакта $\overline{F}$. Следовательно, существует точка $x_0 \in F$ такая, что $x_0 \in \overline{E + V} \subset E + 2V$ для любого $V \in \mathfrak{B}$. Следовательно, x_0 — предельная точка для E , а так как E замкнуто, то $x_0 \in E$. Но по предположению $E \cap F = \emptyset$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. Если E — абсолютно выпуклое подмножество ЛВП X и $x_0 \notin \overline{E}$, то существует $f \in X^*$ такое, что $|f(x)| \leq 1$ для всех $x \in E$ и $\operatorname{Re} f(x_0) > 1$.

Доказательство. Так как одноточечное множество $\{x_0\}$ компактно, то по теореме 6 существует вещественный функционал $g \in X_{\mathbb{R}}^*$, для которого $g(x) \leq 1$ при $x \in E$ и $g(x_0) > 1$. Так как множество E абсолютно выпукло, то $|g(x)| \leq 1$ при $x \in E$. Если X — комплексное пространство, то положим $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Воспользуемся еще раз приемом, применявшимся при доказательстве теоремы II.4.2. Для любого $x \in X$ найдется $\theta \in \mathbb{R}$, для которого $|f(x)| = e^{i\theta} f(x) = f(e^{i\theta} x)$. Следовательно, $f(e^{i\theta} x) = g(e^{i\theta} x)$ и $e^{i\theta} x \in E$, откуда $|f(x)| = g(e^{i\theta} x) \leq 1$.

При помощи теорем отделимости можно доказать теорему Крейна — Мильмана.

Точка x_0 выпуклого подмножества E ЛВП X называется *экстремальной*, или *крайней*, если из соотношения $x_0 = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $x, y \in E$, $0 < \lambda < 1$, вытекает $x = y = x_0$. Другими словами, точка x_0 является экстремальной точкой множества E , если она не является внутренней точкой никакого интервала с концами из E . Например, у квадрата на плоскости вершины являются экстремальными точками, а любые другие граничные точки — нет.

Теорема 7. (Крейн — Мильман). Всякое непустое компактное выпуклое подмножество ЛВП X является замкнутой выпуклой оболочкой своих экстремальных точек.

Доказательство теоремы 7 можно найти, например, в учебнике Шеффера — I. Различные приложения и уточнения теоремы Крейна — Мильмана собраны в книге Фелпса. Понятие экстремальной точки имеет большое значение в оптимальном программировании и его приложениях к экономическим задачам.

§ 3. Двойственность

В этом параграфе рассматриваются соотношения между ЛВП и пространством линейных функционалов в нем.

3.1. Пусть X — векторное пространство над K , X^+ — его алгебраическое сопряженное. Подмножество Y в X^+ называется *тотальным* на X , если из $f(x) = 0$ для всех $f \in Y$ вытекает $x = 0$. Зафиксируем тотальное линейное подмножество Y в X^+ . В этом случае говорят, что $\langle X, Y \rangle$ — *пара векторных пространств в двойственности*, или *дуальная пара*. Примерами таких пар являются $\langle X, X^+ \rangle$ и $\langle X, X^* \rangle$, если X — ЛВП.

Пусть X — ЛВП. Говорят, что его топология *согласуется с двойственностью* $\langle X, Y \rangle$, если $X^* = Y$. Одной из основных задач данного параграфа является задача об описании всевозможных локально выпуклых топологий, согласующихся с данной двойственностью.

В этом параграфе мы введем так называемую слабую топологию, которая будет играть важную роль на протяжении большей части книги при исследовании нормированных пространств.

Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара. Локально выпуклую топологию на X , порожденную семейством полунорм $p(x) = |f(x)|$, где f пробегает все Y , называют *слабой топологией* в X , определяемой Y , и обозначают $\sigma(X, Y)$ (в силу тотальности Y это семейство полунорм удовлетворяет условию (3) § 2). Множества

$$\{x: \sup_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)| \leq 1\}, \quad f_i \in Y,$$

образуют базис замкнутых окрестностей нуля в топологии $\sigma(X, Y)$. Пространство X , наделенное слабой топологией, будем обозначать $(X, \sigma(X, Y))$. Покажем, что топология $\sigma(X, Y)$ согласуется с двойственностью $\langle X, Y \rangle$.

Лемма 1. Если $f_1, f_2, \dots, f_n$ — линейно независимая система линейных функционалов на векторном пространстве X , то для нее существует совокупность элементов $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, удовлетворяющая соотношениям

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots, n,$$

которая называется *биортогональной к $\{f_k\}_{k=1}^n$* .

Доказательство. Существование требуемой системы докажем по индукции. Если $n = 1$, то, поскольку $f_1 \neq 0$, найдется $x_1 \in X$ такое, что $f_1(x_1) = 1$. Элемент x_1 и образует искомую систему.

Рассмотрим случай, когда $n > 1$. Предположим, что биортогональную систему элементов можно построить, если число функционалов меньше n . Докажем в этом предположении существо-

вание такого элемента $x_1 \in X$, что

$$f_1(x_1) = 1, \quad f_2(x_1) = \dots = f_n(x_1) = 0. \quad (1)$$

Для этого рассмотрим систему элементов $x'_2, \dots, x'_n \in X$, биортогональную по отношению к функционалам $f_2, \dots, f_n$. Для каждого $x \in X$ имеет место представление

$$x = \sum_{k=2}^n \alpha_k x'_k + x', \quad (2)$$

где $x' \perp$ такой элемент, что $f_2(x') = \dots = f_n(x') = 0$. Действительно, полагая

$$\alpha_k = f_k(x), \quad k = 2, \dots, n, \quad (3)$$

будем иметь для элемента $x' = x - \sum_{k=2}^n \alpha_k x'_k$

$$f_j(x') = f_j(x) - \sum_{k=2}^n \alpha_k f_j(x'_k) = \alpha_j - \alpha_j = 0, \quad j = 2, \dots, n.$$

Отметим, что коэффициенты α_k определяются элементом x однозначно; чтобы убедиться в этом, достаточно применить к обеим частям (2) функционал f_j ($j = 2, \dots, n$).

Предположим теперь, что элемента $x_1 \in X$, удовлетворяющего (1), не существует. Это означает, что для $x' \in X$, для которого $f_2(x') = \dots = f_n(x') = 0$, также и $f_1(x') = 0$. Учитывая это обстоятельство, а также (3), получаем из (2) для произвольного $x \in X$

$$f_1(x) = \sum_{k=2}^n \alpha_k f_1(x'_k) + f_1(x') = \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(x),$$

где $\lambda_k = f_1(x'_k)$ ($k = 2, \dots, n$). Таким образом, $f_1 = \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k$, что противоречит линейной независимости функционалов $f_1, f_2, \dots, f_n$. Итак, элемент x_1 существует. Подобным же образом доказывается существование элементов $x_2, \dots, x_n \in X$ таких, что

$$f_k(x_k) = 1, \quad f_j(x_k) = 0,$$

$$j \neq k; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 2, \dots, n,$$

что и завершает доказательство леммы.

Теорема 1. Слабая топология $\sigma(X, Y)$ согласуется с двойственностью $\langle X, Y \rangle$, т. е. $(X, \sigma(X, Y))^* = Y$.

Доказательство. По самому способу определения слабой топологии $\sigma(X, Y)$ ясно, что каждый функционал $f \in Y$ есть линейный непрерывный функционал в пространстве $(X, \sigma(X, Y))$.

Пусть, наоборот, f — линейный функционал в пространстве $(X, \sigma(X, Y))$. Множество $V = f^{-1}([-1, 1])^*$ является окрестностью нуля в $(X, \sigma(X, Y))$. Это означает, что существуют функционалы $f_1, f_2, \dots, f_n \in Y$ такие, что

$$V \supset \bigcap_{k=1}^n V_{f_k}, \quad V_{f_k} = f_k^{-1}([-1, 1]); \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

При этом можно считать, что функционалы $f_1, f_2, \dots, f_n$ линейно независимы.

Действительно, если один из функционалов, например f_n , есть линейная комбинация остальных:

$$f_n = \sum_{j=1}^m \alpha_j f_{k_j}, \quad \alpha_j \neq 0; \quad k_j \neq n; \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

то

$$V_n \supset \bigcap_{j=1}^m \frac{1}{|\alpha_j|^m} V_{k_j}$$

и, следовательно, в пересечении (4) можно обойтись без V_n . В соответствии с леммой 1 найдем элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, такие, что

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Для каждого элемента $x \in X$ имеем представление

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k + x', \quad (5)$$

где

$$\alpha_k = f_k(x), \quad f_k(x') = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Применяя к обеим частям (5) функционал f , получим

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x) + f(x'), \quad \beta_k = f(x_k); \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Докажем, что $f(x') = 0$. Если бы оказалось $f(x') \neq 0$, то для достаточно большого $\alpha > 0$ было бы $|f(\alpha x')| > 1$, т. е. $\alpha x' \notin V$ и, следовательно, ввиду (4) хотя бы при одном k было бы $\alpha x' \notin V_{f_k}$, что противоречит соотношению (6).

Итак, (7) дает $f = \sum_{k=1}^n \beta_k f_k$. Поскольку $f_k \in Y$ ($k = 1, 2, \dots, n$), отсюда вытекает $f \in Y$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Из доказанной теоремы следует, что если в Y выделено тотальное линейное множество $\bar{Y}$, отличное от всего Y , то топология $\sigma(X, \bar{Y})$ существенно слабее топологии $\sigma(X, Y)$.

*) В случае комплексного поля скаляров здесь и ниже вместо $[-1, 1]$ надо взять $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$.

В этом смысле слабая топология $\sigma(X, Y)$ определяет множество Y однозначно.

Пусть X — ЛВП с топологией τ . Ясно, что слабая топология $\sigma(X, X^*)$ слабее топологии τ , а потому каждое слабо замкнутое множество, т. е. множество, замкнутое в пространстве $(X, \sigma(X, X^*))$, будет замкнутым и в пространстве X . Обратное, вообще говоря, неверно. Однако справедлива

Теорема 2. *В любом ЛВП X замыкание в топологии τ и слабое замыкание произвольного выпуклого множества совпадают.*

Доказательство. Достаточно доказать, что любое τ -замкнутое выпуклое множество E слабо замкнуто. По теореме 2.6 для любого $x \notin E$ найдется непрерывный вещественный функционал g_x на X , для которого $\sup \{g_x(y) : y \in E\} = \alpha_x < g_x(x)$. Тогда $E = \bigcap_{x \notin E} \{y \in X : g_x(y) \leq \alpha_x\}$. Очевидно, что каждое множество $\{y \in X : g_x(y) \leq \alpha_x\}$ слабо замкнуто, а тогда и E слабо замкнуто.

Следствие 1. *Замыкания выпуклых множеств во всех локально выпуклых топологиях, согласующихся с данной двойственностью, совпадают.*

Следствие 2. *Пусть τ_1 и τ_2 — две локально выпуклые топологии, согласующиеся с одной и той же двойственностью. Тогда, если направление $x_\alpha \rightarrow x$ в топологии τ_1 , то найдется направление $\{y_\beta\}$, элементы которого являются выпуклыми комбинациями элементов x_α , причем $y_\beta \rightarrow x$ в топологии τ_2 .*

Доказательство. Точка x , очевидно, входит в τ_1 -замкнутую выпуклую оболочку E множества $\{x_\alpha\}$. В силу следствия 1 E есть τ_2 -замыкание выпуклой оболочки $\{x_\alpha\}$. Тогда x является τ_2 -предельной точкой для $\text{co}(\{x_\alpha\})$.

Следствие 3. *Пусть X — ЛВП, X_0 — подпространство в X . Тогда:*

1) *слабая топология $\sigma(X_0, X_0^*)$ совпадает с топологией, индуцированной на X_0 из пространства $(X, \sigma(X, X^*))$;*

2) *пусть X_1 замкнуто в X ; если множество E относительно компактно в $(X, \sigma(X, X^*))$, то множество $E \cap X_0$ является относительно компактным и в $(X_0, \sigma(X_0, X_0^*))$.*

Доказательство. 1) Так как сужение функционала $f \in X^*$ на X_0 опять непрерывно, то на X_0 имеем $\sigma(X, X^*) \leq \sigma(X_0, X_0^*)$. Обратное неравенство следует из теоремы Хана — Бахаха (см. теорему 2), в силу которой любой функционал $f_0 \in X_0^*$ можно продолжить до функционала $f \in X^*$.

2) Так как в силу следствия 1 подпространство X_0 $\sigma(X, X^*)$ -замкнуто, то замыкание множества $E \cap X_0$ в $(X, \sigma(X, X^*))$ содержится в X_0 . Из утверждения 1) получаем, что это замыкание является и $\sigma(X_0, X_0^*)$ -компактным.

Множество, ограниченное в слабой топологии, называется **слабо ограниченным**.

Теорема 3. *Ограниченные множества в ЛВП X и $(X, \sigma(X, X^*))$ одни и те же.*

Мы не будем доказывать теорему 3 (см. Шефер — I). Далее в главе VIII мы установим ее в важнейшем частном случае, когда X — нормированное пространство.

3.2. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара. Для $E \subset X$ определим

$$E^\circ = \{f \in Y: |f(x)| \leq 1 \text{ для всех } x \in E\}.$$

Подмножество $E^\circ \subset Y$ называется *полярной* множества E .

Дадим еще одно определение. Для произвольного множества $E \subset X$ его *аннулятором* $E^\perp$ называется множество всех функционалов $f \in Y$, обращающихся в нуль на E . Очевидно, что аннулятор является $\sigma(Y, X)$ -замкнутым линейным множеством. Простейшие свойства поляр собраны в следующую лемму, доказательство которой мы предоставляем читателю.

Лемма 2. 1) Если $E_1 \subset E_2$, то $E_2^\circ \subset E_1^\circ$.

2) Если $\lambda \neq 0$, то $(\lambda E)^\circ = \lambda^{-1} E^\circ$.

3) $(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} E_i)^\circ = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} E_i^\circ$.

4) Если E — линейное множество в X , то E° совпадает с аннулятором $E^\perp$.

Прежде чем рассмотреть более глубокие свойства поляр, сделаем одно замечание, весьма важное для дальнейшего. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара. Каждый элемент $x \in X$ мы можем рассматривать как линейный функционал F_x , заданный на Y формулой

$$F_x(f) = \overline{f(x)}, \quad f \in Y^*.$$

Так как Y тотально на X , то отображение $\pi_Y: x \in X \rightarrow F_x$ является линейным изоморфизмом X на некоторое линейное подмножество в Y^+ . Отображение π_Y , называемое *каноническим*, или *естественным вложением* X в Y^+ , далее будет играть важную роль при определении рефлексивного нормированного пространства. Сейчас же мы заметим, что изложенное позволяет нам рассматривать X как тотальное векторное пространство функционалов на Y и тем самым $\langle Y, X \rangle$ — также дуальная пара, поэтому на Y определена слабая топология $\sigma(Y, X)$, к которой применимы все результаты, полученные выше.

Лемма 3. Если $E \subset X$, то E° абсолютно выпукло и $\sigma(Y, X)$ -замкнуто.

Доказательство. Абсолютная выпуклость очевидна, а слабая замкнутость вытекает из формулы

$$E^\circ = \bigcap_{x \in E} \{f \in Y: |f(x)| \leq 1\}.$$

*) См. определение умножения функционала на число в II.2.2.

Пусть $\langle X, Y \rangle$ и $\langle Y, Z \rangle$ — дуальные пары, причем $X \subset Z \subset Y^+$. Если $E \subset X$, то поляр $E^{\circ\circ}$ в Z поляр E° называется *биполярной* множества E в Z .

Теорема 4. *Биполяр $E^{\circ\circ}$ в Z множества $E \subset X$ совпадает с $\sigma(Z, Y)$ -замкнутой абсолютно выпуклой оболочкой множества E .*

Доказательство. Очевидно, $E \subset E^{\circ\circ}$. Обозначим через G $\sigma(Z, Y)$ -замкнутую абсолютно выпуклую оболочку множества E . В силу леммы 3 $E^{\circ\circ} \supset G$. Если $F_0 \in Z$, $F_0 \notin G$, то по следствию из теоремы 2.6 существует функционал $\phi \in (Z, \sigma(Z, Y))^*$, для которого $\operatorname{Re} \phi(F_0) > 1$ и $|\phi(F)| \leq 1$ для $F \in G$. По теореме 1 найдется $f \in Y$, для которого $\phi(F) = f(F)$ при любом $F \in Z$. Так как $E \subset G$, то $f \in E^{\circ}$. С другой стороны, $|f(F_0)| \geq \operatorname{Re} f(F_0) > 1$, откуда $F_0 \notin E^{\circ\circ}$. Следовательно, $E^{\circ\circ} \subset G$ и, значит, $E^{\circ\circ} = G$.

Теорема 4 называется теоремой о биполяре. Ее важнейшие частные случаи получаются, если $Z = X$ или $Z = Y^+$. Из теорем 2 и 4 получаем

Следствие 1. *Если X — ЛВП, поляр E° множества $E \subset X$ берется в X^* , а биполяр $E^{\circ\circ}$ — в X , то $E^{\circ\circ}$ совпадает с замкнутой абсолютно выпуклой оболочкой E .*

Пусть X — ЛВП. Подмножество E в X называется *фундаментальным*, если $\overline{\mathcal{L}}(E) = X$. Покажем, что E фундаментально тогда и только тогда, когда $E^{\perp} = \{0\}$.

Следствие 2. *Пусть E — произвольное подмножество ЛВП X . Тогда для того, чтобы элемент $x \in X$ принадлежал $\mathcal{L}(E)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$ для любого $f \in E^{\perp}$, где $E^{\perp}$ — аннулятор в X^* .*

Доказательство. В силу леммы 2 $\mathcal{L}(E)^{\circ} = \mathcal{L}(E)^{\perp}$. По следствию 1 $\mathcal{L}(E)^{\circ\circ} = \overline{\mathcal{L}}(E)$. Так как $\mathcal{L}(E)^{\perp}$ — линейное множество, то $\mathcal{L}(E)^{\circ\circ} = \mathcal{L}(E)^{\perp\circ} = \mathcal{L}(E)^{\perp\perp}$. Легко видеть, что $E^{\perp} = \mathcal{L}(E)^{\perp}$. Отсюда заключаем $E^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{L}}(E)$, что и требовалось доказать.

Пусть по-прежнему $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара. Свойства E в X связаны со свойствами поляр E° .

Теорема 5. *Для того чтобы поляр E° множества $E \subset X$ была поглощающим множеством в Y , необходимо и достаточно, чтобы E было ограничено в пространстве $(X, \sigma(X, Y))$.*

Доказательство. **Необходимость.** Рассмотрим окрестность нуля V в пространстве $(X, \sigma(X, Y))$. Можно считать, что $V = f^{-1}(D)$ ($f \in Y$), где $D = \{z \in K: |z| \leq 1\}$. Множество V является полярной к множеству, состоящему из одного функционала f , т. е. $V = \{f\}^{\circ}$. Так как E — поглощающее множество, то для достаточно малого $\lambda > 0$ будет $\lambda f \in E$, откуда, переходя к поляр, находим

$$\frac{1}{\lambda} V = \frac{1}{\lambda} \{f\}^{\circ} = \{\lambda f\}^{\circ} \supset E^{\circ\circ}.$$

Это соотношение показывает, что E^{**} — ограниченное множество и тем более ограничено множество $E \subset E^{**}$.

Достаточность. Пусть $f \in Y$. Рассмотрим окрестность $V = f^{-1}(D)$. Если $E \subset X$ — ограниченное множество, то существует $\lambda > 0$ такое, что $\lambda E \subset V$. Переходя к полярам, будем иметь

$$\frac{1}{\lambda} E^{\circ} = (\lambda E)^{\circ} \supset V^{\circ}.$$

Но $f \in V^{\circ}$, так что $\lambda f \in E^{\circ}$. Тем самым доказано, что E° — поглощающее множество.

3.3. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара. Рассмотрим вопрос о топологизации множества X . Аппарат поляр связывает множества в Y с множествами в X , вследствие чего представляется целесообразным использовать этот аппарат для указанной цели. А именно, в качестве системы окрестностей, порождающей топологию ЛВП, мы будем брать совокупность поляр к некоторым множествам из Y . Для того чтобы построенная система удовлетворяла условиям теоремы 2.1, надо, учитывая результат теоремы 5, потребовать ограниченность указанных множеств из Y .

Итак, пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная совокупность $\sigma(Y, X)$ -ограниченных множеств из Y , причем выполнено условие

I) множество $\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$ фундаментально в $(Y, \sigma(Y, X))$.

Обозначим через $\mathfrak{B}_0$ совокупность поляр в X к множествам из $\mathfrak{A}$. Покажем, что $\mathfrak{B}_0$ удовлетворяет условию (1) теоремы 2.1. Возьмем $x \in X$ и предположим, что для него это условие не выполнено. Тогда для любого $V \in \mathfrak{B}_0$ и любого $\lambda > 0$ имеем $x \notin \lambda V$. Так как $V = A^{\circ}$, где $A \in \mathfrak{A}$, то $|f(nx)| \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) для $f \in A$. Откуда $f(x) = 0$, если $f \in \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$. Тогда в силу следствия 2 теоремы 4 $x = 0$.

Итак, система $\mathfrak{B}_0$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1, ввиду чего X становится ЛВП. Полученная топология на X называется *топологией равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{A}$* , или *топологией $\mathfrak{A}$ -сходимости*.

Если $\mathfrak{A}$ удовлетворяет также условиям:

II) если $A, B \in \mathfrak{A}$, то существует $C \in \mathfrak{A}$, для которого $A \cup B \subset C$;

III) если $A \in \mathfrak{A}$, то $\lambda A \in \mathfrak{A}$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$,

то легко показать, что $\mathfrak{B}_0$ — базис окрестностей нуля топологии равномерной сходимости. Эта топология легко описывается также в терминах полунорм. Для любого $A \in \mathfrak{A}$ положим

$$p_A(x) = \sup \{ |f(x)| : f \in A \}.$$

Тогда p_A — функционал Минковского множества A° и семейство полунорм $\{p_A : A \in \mathfrak{A}\}$ определяет $\mathfrak{A}$ -топологию.

Из всего мыслимого многообразия топологий в X укажем пока две, в известном смысле крайние. Во-первых, в качестве $\mathfrak{A}$ можно

взять всевозможные одноточечные множества. При этом топология $\mathfrak{A}$ -сходимости есть слабая топология $\sigma(X, Y)$. Во-вторых, за $\mathfrak{A}$ можно принять систему всех $\sigma(Y, X)$ -ограниченных множеств. Соответствующая топология называется сильной и обозначается $\beta(X, Y)$. Как мы уже знаем, пространство, сопряженное к $(X, \sigma(X, Y))$, есть Y , тогда как пространство, сопряженное к $(X, \beta(X, Y))$, может быть и более широким подпространством в X^+ . Естественной возникающая задача об описании всех топологий $\mathfrak{A}$ -сходимости, согласующихся с двойственностью $\langle X, Y \rangle$, будет решена нами в следующем пункте. А пока сделаем еще несколько замечаний. Очевидно, X и Y можно поменять местами и наделять топологиями равномерной сходимости пространство Y .

Пусть X — ЛВП. Подмножество $G \subset X^*$ называется *равностепенно непрерывным*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность нуля U в X такая, что $|f(x)| < \varepsilon$ для любых $x \in U, f \in G$. Очевидно, что множество в X^* является равностепенно непрерывным тогда и только тогда, когда оно содержится в поляре к некоторой окрестности нуля из X .

Теорема 6. *Каждая локально выпуклая топология является топологией равномерной сходимости на равностепенно непрерывных подмножествах сопряженного пространства.*

Доказательство. В любом ЛВП X существует базис $\mathfrak{B}$ замкнутых абсолютно выпуклых окрестностей нуля. Множества U° ($U \in \mathfrak{B}$) равностепенно непрерывны, а $U^{\circ\circ} = U$ по теореме о биполяре (см. следствие 1 теоремы 4), что и доказывает теорему.

Теорема 6 показывает универсальность вышеописанного метода задания локально выпуклой топологии.

3.4. Итак, перейдем к описанию всех топологий, согласующихся с данной двойственностью.

Лемма 4. *Пусть X — векторное пространство. Тогда пространство X^+ полно в топологии $\sigma(X^+, X)$.*

Доказательство. Пусть $\{f_\alpha\}$ — направление Копи в X^+ . Тогда для любого $x \in X$ $\{f_\alpha(x)\}$ — числовое направление Копи, и поэтому для любого $x \in X$ существует $f(x) = \lim f_\alpha(x)$. Очевидно, $f \in X^+$ и $f_\alpha \rightarrow f$ в слабой топологии.

Сделаем одно замечание о конечномерных пространствах, которое пригодится нам при доказательстве следующей леммы. Если мы рассмотрим конечномерное ЛВП K^n (см. 1.3), то совокупность множеств вида

$$V_m = \{ \{\xi_i\}_{i=1}^n \in K^n : \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| \leq m^{-1} \}, \quad m = 1, 2, \dots$$

является базисом окрестностей нуля. Тогда очевидно, что множество E ограничено в K^n тогда и только тогда, когда найдется константа $c > 0$ такая, что $|\xi_i| \leq c$ при всех $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n \in E$ и $i = 1, 2, \dots, n$. Напомним, что по теореме Больцано — Вейерштрасса ограниченные в K^n множества относительно компактны.

Лемма 5. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара. Тогда любое $\sigma(X, Y)$ -ограниченное множество E является вполне ограниченным в $(X, \sigma(X, Y))$.

Доказательство. Пусть E — $\sigma(X, Y)$ -ограниченное множество, $U = \{x \in X: |f_i(x)| \leq 1, f_i \in Y, f_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ — произвольная окрестность нуля в $(X, \sigma(X, Y))$. Каждому $x \in X$ сопоставим элемент $\omega(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ n -мерного пространства K^n . Если $Q = V_1$, то, очевидно, $\omega^{-1}(Q) = U$.

Если $z \in \omega(X)$, то $\omega^{-1}(z + Q) = x + U$, где в качестве x можно взять любой элемент из $\omega^{-1}(z)$. Так как множество E слабо ограничено, то множество $\tilde{E} = \omega(E)$ ограничено в K^n и, следовательно, относительно компактно. Тогда по теореме Хаусдорфа (или, что то же самое, по теореме 1.4) существуют $z_1, \dots, z_m \in \tilde{E}$, для которых $\tilde{E} \subset \bigcup_{k=1}^m (z_k + Q)$. Но тогда, обозначая через x_k такие элементы из E , что $\omega(x_k) = z_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$), получим в силу сказанного выше

$$E \subset \omega^{-1}(\tilde{E}) \subset \omega^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^m (z_k + Q)\right) = \bigcup_{k=1}^m \omega^{-1}(z_k + Q) = \bigcap_{k=1}^m (x_k + U),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 7 (Алаоглу — Бурбаки). Если X — ЛВП, то полара U° каждой окрестности нуля U $\sigma(X^*, X)$ -компактна.

Доказательство. Рассмотрим на X^+ топологию $\sigma(X^+, X)$. Так как U — поглощающее множество в X , то по теореме 5 U° ограничено в X^+ , а потому и вполне ограничено (лемма 5). В силу леммы 4 X^+ полно, а по лемме 3 U° замкнуто. Тогда U° полно и по теореме 1.4 U° компактно. Очевидно, что $U^\circ \subset X^*$, а топологии $\sigma(X^+, X)$ и $\sigma(X^*, X)$ на X^* совпадают. Следовательно, U° $\sigma(X^*, X)$ -компактно.

Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара. Обозначим через $\tau(X, Y)$ топологию равномерной сходимости на всех абсолютно выпуклых $\sigma(Y, X)$ -компактных множествах из Y . В силу изложенного в 3.3 $(X, \tau(X, Y))$ — ЛВП. Топология $\tau(X, Y)$ называется *топологией Макки*.

Теорема 8 (Макки — Аренс). Локально выпуклая топология τ на X согласуется с двойственностью $\langle X, Y \rangle$ (т. е. $(X, \tau)^* = Y$) тогда и только тогда, когда $\sigma(X, Y) \leq \tau \leq \tau(X, Y)$. При этом τ является топологией равномерной сходимости на некоторой совокупности абсолютно выпуклых $\sigma(Y, X)$ -компактных множеств из X .

Доказательство. Если $(X, \tau)^* = Y$, то τ есть топология равномерной сходимости на совокупности множеств U° , где U — всевозможные окрестности нуля в топологии τ . Каждое U° абсолютно выпукло, а по теореме 7 и $\sigma(Y, X)$ -компактно. Отсюда $\tau \leq \tau(X, Y)$. Так как $\sigma(X, Y)$ — слабейшая из топологий равно-

мерной сходимости (согласующихся с данной двойственностью), то $\sigma(X, Y) \leq \tau$.

Для доказательства теоремы нам осталось проверить, что топология Макки $\tau(X, Y)$ согласуется с двойственностью $\langle X, Y \rangle$. Обозначим $(X, \tau(X, Y))^*$ через X^* . Очевидно, что $X^* \supset Y$. Докажем обратное включение. Отметим, что если E — компакт в $(Y, \sigma(Y, X))$, то E — компакт и в большем пространстве $(X^*, \sigma(X^*, X))$. В дальнейшем поляры множеств из X берутся в пространстве X^* , а поляры множеств из X^* — в X .

Рассмотрим функционал $\varphi \in X^*$. Множество $V = \varphi^{-1}(D)$, где $D = \{z \in K: |z| \leq 1\}$, является окрестностью нуля в пространстве $(X, \tau(X, Y))$. Тогда по определению топологии Макки найдется абсолютно выпуклое $\sigma(Y, X)$ -компактное множество A в Y такое, что $V \supset A^\circ$, откуда $V^\circ \subset A^{\circ\circ}$. В силу теоремы 4 $A^{\circ\circ}$ есть $\sigma(X^*, X)$ -замыкание A . Однако A $\sigma(Y, X)$ -компактно, а тогда, как уже было замечено, и $\sigma(X^*, X)$ -компактно, откуда $A = A^{\circ\circ}$. Так как $\varphi \in V^\circ$, то $\varphi \in A$ и тем более $\varphi \in Y$. Итак, $X^* = Y$, и теорема полностью доказана.

С теоремы Макки — Арелса обычно начинаются более тонкие рассмотрения теории ЛВП, связанные прежде всего с понятиями борнологического и бочечного ЛВП и рефлексивного ЛВП. Закончим на этом рассмотрение общей теории ТВП и обратимся к подробному изучению нормированных пространств — класса ЛВП, наиболее важных в приложениях функционального анализа в рамках нашей книги. Справедливости ради отметим, что многие приложения функционального анализа связаны с рассмотрением ЛВП, не являющихся нормированными пространствами. Это прежде всего пространства обобщенных функций или распределений, находящие себе различные приложения в математической физике (см. Бирман и др.; Гельфанд, Виленькин; Гельфанд и Шилев; Рудин; Хёрмандер; Шварц; Шилев — II; Эдвардс).

Г л а в а IV

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Основные определения и простейшие свойства нормированных пространств *)

1.1. Теория нормированных пространств с ее многочисленными приложениями и ответвлениями является наиболее обширным разделом функционального анализа, поэтому в этой книге мы сможем затронуть лишь некоторые аспекты этого раздела, сделав особенный упор на приложения к решению функциональных уравнений.

Напомним, что *нормой* на векторном пространстве X называется неотрицательный функционал $\|\cdot\|$, который каждому элементу $x \in X$ сопоставляет число $\|x\| \geq 0$, называемое *нормой элемента x* **), удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $\|x\| = 0$ эквивалентно $x = 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in K$ (о *порядности* нормы);
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Векторное пространство X с фиксированной нормой на нем называется *нормированным пространством*. Если мы наделим его топологией, порожденной этой нормой (т. е. набором полунорм, состоящим только из одной нормы, см. III.2.1), то X превращается в ЛВП. Эта топология называется *нормированной топологией* пространства X . Рассмотрим теперь, как трансформируются некоторые понятия и факты теории ЛВП для этого важнейшего частного случая.

1) Нормированное пространство X является метризуемым ЛВП.

Действительно, если мы для любых $x, y \in X$ положим

$$\rho(x, y) = \|x - y\|,$$

то ρ — метрика на X . В самом деле, $\rho(x, y) = 0$ означает $\|x - y\| = 0$, что по условию 1) равносильно равенству $x - y = 0$, а это

*) Основные понятия теории нормированных пространств были введены Банахом [1], см. также Банах.

**) Если одновременно рассматривается несколько нормированных пространств, то, чтобы отличать норму в одном пространстве от нормы в другом, указывают это пространство в индексе, например $\|x\|_K$.

в свою очередь эквивалентно $x = y$. Симметрия расстояния очевидна из самого определения. Наконец, неравенство треугольника для расстояния является простым следствием неравенства треугольника для нормы:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Очевидно, что топология, порожденная на X этой метрикой, совпадает с топологией X как ЛВП.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x по норме, если $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Ясно, что сходимость по норме совпадает со сходимостью в нормированной топологии.

2) Замкнутые шары $B_{1/n} = \{x \in X: \|x\| \leq 1/n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) образуют базис окрестностей нуля в ЛВП X .

$$3) \|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x - y\|.$$

Это свойство вытекает из II.3.2 (с).

4) $\|x\|$ — непрерывная функция от x , т. е. если $x_n \rightarrow x$, то $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

5) Множество E является ограниченным тогда и только тогда, когда найдется константа M такая, что $\|x\| \leq M$ для любого $x \in E$.

Это вытекает из 2) и определения ограниченного множества (III.1.4).

6) Сходящаяся последовательность ограничена.

Это вытекает из 4) и 5).

ТВП, топологию которого можно получить при помощи некоторой нормы (как это было описано выше), называется *нормируемым*. Укажем теперь место нормированных пространств в классе ТВП.

Теорема 1 (Колмогоров). Для того чтобы хаусдорфово ТВП X было нормируемым, необходимо и достаточно, чтобы в X существовала ограниченная выпуклая окрестность нуля V_0 .

Доказательство. В нем пуждается только достаточность. Можно считать, что окрестность V_0 абсолютно выпукла и замкнута (иначе мы рассмотрели бы пересечение $(-\bar{V}_0) \cap \bar{V}_0$). Для $x \in X$ положим

$$\|x\| = p_{V_0}(x),$$

где p_{V_0} — функционал Минковского множества V_0 . Тогда p_{V_0} обладает всеми свойствами нормы, кроме, может быть, одного: $\|x\| = 0$ влечет $x = 0$. Покажем, что и это свойство нормы выполнено. Действительно, если $x \neq 0$, то так как X — отделимое пространство, найдется окрестность нуля V , не содержащая x . В силу ограниченности множества V_0 можно указать такое $\lambda > 0$, что $V_0 \subset \lambda V$. Тогда, очевидно, $\lambda x \notin V_0$, что на основании леммы III.2.1 дает

$$\|x\| = p_{V_0}(x) = \frac{1}{\lambda} p_{V_0}(\lambda x) > \frac{1}{\lambda},$$

так что $\|x\| \neq 0$.

Итак, X обращается в нормированное пространство, в котором (опять на основании леммы III.2.4) множество V будет замкнутым единичным шаром.

Докажем, что первоначальная топология в X совпадает с топологией, определяемой нормой. Для этого надо проверить, что множество шаров, т. е. совокупность множеств вида λV_0 ($\lambda > 0$), образует фундаментальную систему окрестностей нуля в первоначальной топологии. Это является непосредственным следствием ограниченности множества V_0 , так как для любой окрестности нуля V найдется такое $\lambda > 0$, что $\lambda V_0 \subset V$, что и требовалось доказать.

Работа А. Н. Колмогорова [1], в которой появилась теорема 1, была одной из первых, где рассматривались абстрактные ТВП.

1.2. Рассмотрим примеры нормированных пространств.

1) Конечномерное пространство K^n . Норму на K^n можно определить многими различными способами (которые в некотором смысле эквивалентны; см. п. 1.6). Например, если $x = \{\xi_i\}_{i=1}^n$, то

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right]^{1/2}.$$

Эта норма называется *евклидовой*. Можно ввести также норму по формулам $\|x\| = \max_{i=1}^n |\xi_i|$ или $\|x\| = \sum_{i=1}^n |\xi_i|$.

2) Пространство непрерывных функций $C(K)$ становится нормированным, если мы введем норму

$$\|x\| = \max_{t \in K} |x(t)|.$$

3) Пространство $l^\infty(T)$ ограниченных функций на множестве T становится нормированным, если мы введем норму

$$\|x\| = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

4) Пространство $C^{(l)}[a, b]$ l раз непрерывно дифференцируемых функций становится нормированным, если мы введем норму

$$\|x\| = \sum_{k=0}^l \max_{t \in [a, b]} |x^{(k)}(t)|.$$

Отметим, что пространства $S(0, 1)$ и s не являются нормируемыми, поэтому мы их более подробно исследовали в предыдущих главах. С другими примерами нормированных пространств мы познакомимся ниже.

1.3. Пусть X и Y — нормированные пространства. Линейный оператор U из X в Y называется *линейной изометрией*, если для любого $x \in X$ имеем $\|U(x)\| = \|x\|$. Пространства X и Y называются *линейно изометричными*, если существует линейная изо-

метрия, отображающая X на Y . Очевидно, что соответствующая изометрия U осуществляет изометрию X и Y как метрических пространств и изоморфизм X и Y как векторных пространств. Для этого достаточно убедиться в том, что из изометричности оператора U вытекает его взаимная однозначность. Действительно, если $U(x) = U(y)$, то $\|x - y\| = \|U(x - y)\| = \|U(x) - U(y)\| = 0$.

В дальнейшем мы обычно не будем различать линейно изометричные пространства. Нормированные пространства X и Y мы будем называть *изоморфными*, если X и Y изоморфны как ЛВП, т. е. если существует линейный гомеоморфизм X на Y . Понятие изоморфности является существенно более слабым, чем понятие изометричности.

Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на векторном пространстве X называются *эквивалентными*, если найдутся такие постоянные $k_1, k_2 > 0$, что для любого $x \in X$ имеем

$$k_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq k_2 \|x\|_1.$$

Легко видеть, что для эквивалентности норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ необходимо и достаточно, чтобы тождественное отображение X на X было изоморфизмом нормированных пространств $(X, \|\cdot\|_1)$ и $(X, \|\cdot\|_2)$.

Линейное подмножество нормированного пространства X само является нормированным пространством относительно индуцированной на нем нормы. Это нормированное пространство мы будем называть *подпространством* нормированного пространства X .

1.4. Особо важную роль среди нормированных пространств играют полные пространства, которые называются *банаховыми пространствами*, или *B-пространствами* (по имени польского математика С. Банаха).

В терминах нормы еходимость в себе последовательности $\{x_n\}$ означает, что $\|x_m - x_n\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$. Поэтому условие полноты нормированного пространства X выглядит так: из того, что $\|x_m - x_n\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$, вытекает существование такого $x_0 \in X$, что $x_n \rightarrow x_0$.

Очевидно, пространства K^n , $C(K)$, $C^{(b)}[a, b]$, $l^\infty(T)$, будучи полными, являются *B-пространствами*.

Если данное нормированное пространство X — неполное, то его можно погрузить в полное метрическое пространство $\hat{X}$ (теорема 1.4.1). Алгебраические операции и норму, определенные лишь на X , можно однозначно распространить на $\hat{X}$, превратив его тем самым в *B-пространство*. Для доказательства этого воспользуемся сделанным в 1.4.4 замечанием о том, что пространство X плотно в своем пополнении $\hat{X}$.

Пусть $x, y \in \hat{X}$. Существуют последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ элементов из X , сходящиеся к x и y соответственно. Операция сложения в пространстве X определена, поэтому имеет смысл

равенство $z_n = x_n + y_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Так как

$$\|z_n - z_m\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,$$

то последовательность $\{z_n\}$ сходится в себе в пространстве X и тем самым в пространстве $\hat{X}$. Следовательно, существует элемент $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in \hat{X}$. По определению полагаем $x + y = z$. Нетрудно убедиться, что определение элемента z не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. В самом деле, пусть $x'_n \rightarrow x$, $y'_n \rightarrow y$ ($x'_n, y'_n \in X$; $n = 1, 2, \dots$) и $z'_n = x'_n + y'_n$. Так как

$$\|z'_n - z_n\| \leq \|x'_n - x_n\| + \|y'_n - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Отсюда, в частности, следует, что для элементов пространства X новое определение суммы приводит к уже имеющемуся. Действительно, если $x, y \in X$, то можно положить $x_n = x$, $y_n = y$ ($n = 1, 2, \dots$), так что $z = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$, где знак $+$ понимается в первоначальном смысле.

Аналогичным образом в $\hat{X}$ определяется произведение элемента на число.

Полагая для $\hat{x} \in \hat{X}$

$$\|x\| = \rho(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|,$$

$$x_n \rightarrow x; x_n \in X; n = 1, 2, \dots,$$

мы без труда убедимся, что $\hat{X}$ удовлетворяет аксиомам нормированного пространства. Из этого же равенства следует однозначность определения нормы.

Однозначность определения суммы элементов и произведения элементов на число без труда получается, если воспользоваться непрерывностью этих операций. Предоставляем читателю самостоятельно провести относящиеся сюда несложные рассуждения.

Впредь, говоря о *пополнении* нормированного пространства, мы будем считать его линейризованным и нормированным указанным выше способом.

1.5. В нормированном пространстве можно рассматривать бесконечные ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots \quad (1)$$

Ряд (1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{s_n\}$ его частичных сумм: $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Суммой ряда называется предел этой последовательности: $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

В B -пространстве из «абсолютной» сходимости ряда вытекает обычная сходимость, т. е., если сходится числовой ряд

$$\sum_{h=1}^{\infty} \|x_h\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\| + \dots \quad (2)$$

то сходится и ряд (1), причем справедлива оценка $\left\| \sum_{h=1}^{\infty} x_h \right\| \leq \sum_{h=1}^{\infty} \|x_h\|$. Действительно, если $m > n$, то

$$s_m - s_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m$$

и, следовательно,

$$\|s_m - s_n\| \leq \|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \dots + \|x_m\|.$$

Поскольку ряд (2) сходится, правая часть в этом неравенстве сколь угодно мала при достаточно большом n . Стало быть, последовательность $\{s_n\}$ сходится в себе, а следовательно, в силу полноты пространства, сходится. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве

$$\|s_n\| = \left\| \sum_{h=1}^n x_h \right\| \leq \sum_{h=1}^n \|x_h\|$$

и используя непрерывность нормы, получаем требуемую оценку.

1.6. Рассмотрим более подробно конечномерные нормированные пространства. Покажем, что все конечномерные ЛВП одной и той же алгебраической размерности изоморфны между собой и тем самым изоморфны пространству K^n с евклидовой нормой.

Лемма 1. Если X — конечномерное векторное пространство и Y — тотальное линейное множество функционалов на X , то Y совпадает с алгебраическим сопряженным X^+ .

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ — алгебраический базис в X (см. II. 1.4). Так как X можно рассматривать как множество функционалов на Y , то по лемме III.3.1 найдется биортогональная к $\{x_i\}_{i=1}^n$ система функционалов $\{f_i\}_{i=1}^n \subset Y$, т. е.

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Так, $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ влечет $\lambda_k = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right)(x_k) = 0$ при любом k , то векторы f_i линейно независимы, откуда пространство Y имеет размерность $\geq n$. С другой стороны, $Y \subset X^+$, а размерность X^+ равна n . Тогда размерность Y есть n , и по хорошо известному свойству подпространств конечномерного пространства $Y = X^+$.

Теорема 2. Все (хаусдорфовы) конечномерные ЛВП одной и той же алгебраической размерности изоморфны между собой.

Доказательство. Достаточно доказать, что на n -мерном пространстве X совпадают любые две локально выпуклые топологии. Для этого мы покажем, что любая локально выпуклая топология τ совпадает со слабой топологией $\sigma(X, X^+)$.

По лемме 1 $(X, \tau)^* = X^+$, откуда $\tau \geq \sigma(X, X^+)$. Докажем обратное. Зафиксируем базис $\{x_i\}_{i=1}^n$ в X и рассмотрим биортogonalную систему $\{f_i\}_{i=1}^n$ в X^+ . Тогда $\{f_i\}_{i=1}^n$ — базис в X^+ (см. доказательство леммы 1). Если направление $x_\alpha \rightarrow x(\sigma(X, X^+))$ и

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i, \quad x_\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(\alpha)} x_i,$$

то $\xi_i^{(\alpha)} \xrightarrow{\alpha} \xi_i$ при $i=1, 2, \dots, n$. Действительно, для любого f_i имеем

$$\xi_i^{(\alpha)} = f_i(x_\alpha) \xrightarrow{\alpha} f_i(x) = \xi_i.$$

Теперь в силу τ -непрерывности алгебраических операций получаем, что $x_\alpha \rightarrow x$ в топологии τ , откуда $\sigma(X, X^+) \geq \tau$. Теорема полностью доказана.

Так как K^n с евклидовой нормой — нормированное пространство, то мы получили, что любое конечномерное ЛВП нормируемо.

Далее отождествим конечномерное нормированное пространство X с K^n . Пусть $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (единица на k -м месте). Тогда, если $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, то

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k.$$

Применяя теорему 2 к пространству K^n с нормой $\|x\| = \max_{i=1}^n |\xi_i|$, получаем

Следствие 1. 1) Для того чтобы последовательность $\{x_m\}$: $x_m = \sum_{k=1}^n \xi_k^{(m)} e_k \in X$, сходилась к элементу $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для $k=1, 2, \dots, n$ имела место покоординатная сходимость: $\xi_k^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \xi_k$.

2) Множество $E \subset X$ является ограниченным тогда и только тогда, когда существует константа $M > 0$ такая, что для любого $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \in E$ имеем

$$|\xi_k| \leq M, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Из следствия 1 и теоремы Больцано — Вейерштрасса получаем

Следствие 2. *Для того чтобы множество E конечномерного нормированного пространства X было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено.*

В самом деле, если $\{x_m\}$ — ограниченная последовательность, то, полагая $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)})$ ($m = 1, 2, \dots$), на основании следствия 1 заключаем, что при каждом $j = 1, 2, \dots, n$ числовая последовательность $\{\xi_j^{(m)}\}$ ограничена. Поэтому по известной теореме Больцано — Вейерштрасса существует последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$ такая, что

$$\xi_j^{(m_k)} \xrightarrow[k]{} \xi_j^{(0)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

В силу следствия 1 $x_{m_k} \rightarrow x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$.

Следствие 3. *Конечномерное нормированное пространство X полно.*

Действительно, если $\{x_m\}$ — сходящаяся в себе последовательность, то она ограничена и тем самым по предыдущему следствию из нее можно выделить сходящуюся к некоторому элементу $x_0 \in X$ подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$. Тогда в силу леммы I.4.1 $x_m \rightarrow x_0$.

Следствие 4. *Конечномерное линейное множество X_0 в нормированном пространстве X замкнуто.*

Следствие 5. *Пусть X — нормированное пространство и X_0 — конечномерное линейное множество в X . Каков бы ни был элемент $x \in X$, в X_0 найдется элемент x_0 , реализующий расстояние от x до X_0 , т. е. такой, что $\|x - x_0\| = \rho(x, X_0)$.*

В самом деле, для каждого $m = 1, 2, \dots$ в X_0 найдется элемент x_m , для которого $\|x - x_m\| < \rho(x, X_0) + 1/m$. Последовательность $\{x_m\}$, очевидно, ограничена, так как

$$\|x_m\| \leq \|x\| + \|x - x_m\| < \|x\| + \rho(x, X_0) + 1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

поэтому на основании следствия 2 из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$: $x_{m_k} \rightarrow x_0$.

Очевидно, что $\|x - x_0\| \leq \rho(x, X_0)$, а так как $x_0 \in X_0$, то справедливо и обратное неравенство.

В качестве применения установленного результата рассмотрим пространство $C[a, b]$ и его конечномерное подпространство P^n , состоящее из всех алгебраических полиномов степени не выше n . Согласно следствию 5, какова бы ни была непрерывная функция x , существует полином x_0 из P^n такой, что

$$\max_{a \leq t \leq b} |x(t) - x_0(t)| = \|x - x_0\| = \rho(x, P^n),$$

т. е. полином, дающий наилучшее приближение к функции x по сравнению со всеми остальными полиномами степени не выше n .

1.7. В заключение покажем, что результат следствия 2 к теореме 2 обратим, т. е. докажем, что любое ограниченное множество в нормированном пространстве относительно компактно лишь тогда, когда пространство конечномерно *).

Докажем предварительно важную лемму.

Лемма 2. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \neq X$ — его замкнутое подпространство. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует нормированный элемент x_0 **) такой, что

$$\rho(x_0, X_0) > 1 - \varepsilon.$$

Доказательство. Поскольку X_0 — замкнутое множество, не совпадающее с X , существует элемент $\bar{x} \in X$ такой, что $\rho(\bar{x}, X_0) = d > 0$. В X_0 найдется, далее, элемент x' такого рода, что

$$\|\bar{x} - x'\| < \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Положим

$$x_0 = \frac{\bar{x} - x'}{\|\bar{x} - x'\|} = \alpha(\bar{x} - x'), \quad \alpha = \frac{1}{\|\bar{x} - x'\|} > \frac{1 - \varepsilon}{d}.$$

Ясно, что $\|x_0\| = 1$. Кроме того, если $x \in X_0$, то

$$\|x_0 - x\| = \|\alpha\bar{x} - \alpha x' - x\| = \alpha \left\| \bar{x} - \left(x' + \frac{x}{\alpha} \right) \right\| \geq \alpha d > \frac{1 - \varepsilon}{d} d = 1 - \varepsilon.$$

З а м е ч а н и е. Нормированный элемент x_0 , обладающий тем свойством, что $\rho(x_0, X_0) = 1$, является в известном смысле перпендикуляром к X_0 (так, в евклидовом пространстве вектор x_0 , удовлетворяющий этому условию, действительно будет ортогонален к X_0). В связи с этим мы будем называть доказанную лемму *леммой о почти перпендикуляре*.

Теорема 3. Для того чтобы каждое ограниченное множество в нормированном пространстве X было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы X было конечномерным.

Достаточность условия уже установлена (следствие 2 к теореме 1).

Необходимость. Рассмотрим произвольный нормированный элемент $x_1 \in X$ и обозначим через X_1 линейную оболочку $\mathcal{L}(\{x_1\})$ этого элемента, т. е. совокупность элементов вида λx_1 . Предполагая X бесконечномерным, будем иметь $X_1 \neq X$ и по лемме о почти перпендикуляре найдем нормированный элемент $x_2 \in X$ такой, что $\rho(x_2, X_1) > 1/2$. Образует линейную оболочку элементов x_1 и x_2 , которую обозначим через X_2 . Рассуждая так и дальше, придем к последовательности элементов $\{x_n\}$ и под-

*) Этот факт установлен Ф. Риссом.

**) То есть элемент, норма которого равна единице.

пространств $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$ таких, что

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= 1, & X'_n &= \mathcal{L}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}), \\ \rho(x_{n+1}, X_n) &> 1/2, & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Однако на основании (3)

$$\|x_n - x_m\| > 1/2, \quad n > m; \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

поэтому ни сама последовательность $\{x_n\}$, ни какая-либо ее подпоследовательность не могут сходиться. Теорема доказана.

Следствие. ЛВП X конечномерно тогда и только тогда, когда в X существует вполне ограниченная окрестность нуля.

Доказательство. Если ЛВП X конечномерно, то по теореме 2 оно нормируемо, а тогда по теореме 3 замыкание единичного шара пространства X компактно.

Обратно, если V_0 — вполне ограниченная окрестность нуля, то по теореме 1 пространство X нормируемо. Так как существует $\lambda > 0$, для которого единичный шар $B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\} \subset \lambda V_0$, то множество B_X вполне ограничено, а тогда и любое ограниченное множество вполне ограничено. Повторяя дословно доказательство теоремы 3, легко получаем, что X конечномерно.

1.8. В заключение этого параграфа введем еще ряд важных понятий теории нормированных пространств.

Пусть X_1 и X_2 — нормированные пространства. Наделим их прямое произведение $Z = X_1 \times X_2$ следующей нормой: если $z = (x_1, x_2)$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, то

$$\|z\| = \max(\|x_1\|, \|x_2\|).$$

Нормированное пространство Z , очевидно, полно, если X_1 и X_2 — B -пространства.

Пусть X — нормированное пространство, X_0 — замкнутое подпространство в X . Рассмотрим факторпространство X/X_0 (II.1.6). Отметим, что в силу замкнутости X_0 класс $\bar{x} = x + X_0$ — замкнутое множество в X .

Если для $\bar{x} \in X/X_0$ положить

$$\|\bar{x}\| = \inf_{x \in \bar{x}} \|x\|,$$

то X/X_0 превращается в нормированное пространство. Действительно, если $\bar{x} = 0$, то в качестве $x \in \bar{x}$ можно взять нулевой элемент пространства X , и поэтому $\|\bar{x}\| = 0$. Наоборот, если $\|\bar{x}\| = 0$, то из определения $\|x\|$ вытекает, что существует последовательность $\{x_n\} \subset \bar{x}$ такая, что $x_n \rightarrow 0$. Так как класс $\bar{x}$ — замкнутое множество, то вместе с $\{x_n\}$ он содержит и предельную точку этой последовательности, т. е. $0 \in \bar{x}$; таким образом, $\bar{x}$ — нулевой элемент из X/X_0 .

Однородность нормы также легко проверить. Рассматривая случай $\lambda \neq 0$, имеем

$$|\lambda| \|\bar{x}\| = |\lambda| \inf_{x \in \bar{x}} \|x\| = \inf_{x \in \bar{x}} \|\lambda x\|.$$

Но когда x пробегает класс $\bar{x}$, элемент λx пробегает класс $\lambda \bar{x}$, откуда следует, что

$$\inf_{x \in \bar{x}} \|\lambda x\| = \inf_{z \in \lambda \bar{x}} \|z\| = \|\lambda \bar{x}\|.$$

Докажем, наконец, неравенство треугольника. Для произвольных $x \in \bar{x}$, $y \in \bar{y}$ ($\bar{x}, \bar{y} \in X/X_0$) будет $x + y \in \bar{x} + \bar{y}$, поэтому

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Переходя в правой части к точным нижним границам, получим требуемое неравенство.

Сопоставляя каждому элементу $x \in X$ класс $\bar{x} = x + X_0 = \varphi(x)$, содержащий этот элемент, мы получим отображение φ , которое называется *естественным гомоморфизмом* (или *каноническим гомоморфизмом*) пространства X на факторпространство X/X_0 . Очевидно, что оператор φ линеен. Поскольку

$$\|\varphi(x_0)\| = \inf_{x \in \varphi(x_0)} \|x\| \leq \|x_0\|, \quad x_0 \in X,$$

оператор φ непрерывен. Кроме того, для любого $\bar{x} \in X/X_0$ найдется $x \in X$ такое, что

$$\bar{x} = \varphi(x), \quad \|\bar{x}\| \geq \frac{1}{2} \|x\|. \quad (4)$$

Используя указанное свойство, докажем, что если данное пространство X полно, то полным будет и факторпространство X/X_0 . Действительно, пусть $\{\bar{x}_n\}$ — сходящаяся в себя последовательность элементов пространства X/X_0 . Разрежая, если нужно, данную последовательность, можно добиться того, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n\|$ будет сходящимся. В соответствии с (4) найдем элемент $x_n \in X$ такой, что

$$\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = \varphi(x_n), \quad \|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n\| \geq \frac{1}{2} \|x_n\|,$$

$$n = 0, 1, \dots, \bar{x}_0 = 0.$$

Ясно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ сходится. Следовательно, в силу полноты пространства X сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Обозначая его сумму

через x и полагая $\bar{x} = \varphi(x)$, найдем

$$x = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n,$$

т. е. последовательность $\{\bar{x}_n\}$ сходится к элементу $\bar{x}$.

1.9. Линеиный непрерывный оператор P , отображающий нормированное пространство X на его замкнутое подпространство Y , называется *проектом* (из X на Y), если P оставляет элементы Y на месте, т. е. $P(y) = y$ для любого $y \in Y$.

Замкнутое подпространство Y называется *дополняемым* в B -пространстве X , если существует проектор P из X на Y . Легко видеть, что $X/Y = P^{-1}(0)$ *). Вопрос о существовании проектора на подпространство мы рассмотрим ниже (см. V.3.5).

§ 2. Вспомогательные неравенства

В этом параграфе мы установим некоторые неравенства, которые найдут применение при рассмотрении конкретных примеров B -пространств (см. § 3). Литературные указания по материалу этого параграфа см. Харди, Литтлвуд, Полиа.

2.1. Докажем сначала лемму.

Лемма 1. Пусть p и q — вещественные положительные числа, связанные соотношением

$$-1/p + 1/q = 1. \quad (1)$$

Каковы бы ни были числа a и b , имеет место неравенство

$$|ab| \leq |a|^p/p + |b|^q/q. \quad (2)$$

Доказательство. Можно считать, что a и b положительны. Положим $m = 1/p$ (тогда $0 < m < 1$) и рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = t^m - mt, \quad t > 0.$$

Так как $\varphi'(t) = m(t^{m-1} - 1)$, то $\varphi(t)$ принимает наибольшее значение при $t = 1$. Следовательно, $\varphi(t) \leq \varphi(1)$ ($t > 0$), откуда $t^m - 1 \leq m(t - 1)$. Положив в последнем неравенстве $t = a^p/b^q$, получаем

$$ab^{-q/p} - 1 \leq (1/p)(a^p b^{-q} - 1),$$

откуда в результате почленного умножения на b^q , учитывая, что $q - q/p = 1$, получаем (2).

2.2. Неравенство Гёльдера. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — произвольные числа. Имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n |\xi_k \eta_k| \leq \left\{ \sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right\}^{1/q}$$

(p и q связаны соотношением (1)).

*) Равенство означает изоморфизм B -пространств.

Доказательство. Обозначим

$$A^p = \sum_{k=1}^n |\xi_k|^p, \quad B^q = \sum_{k=1}^n |\eta_k|^q.$$

Можно считать, что $A, B > 0$. Положим $\xi'_k = \xi_k/A$, $\eta'_k = \eta_k/B$. Тогда на основании неравенства (2) получаем

$$|\xi'_k \eta'_k| \leq \frac{|\xi'_k|^p}{p} + \frac{|\eta'_k|^q}{q}$$

или, суммируя,

$$\sum_{k=1}^n |\xi'_k \eta'_k| \leq \frac{\sum_{k=1}^n |\xi'_k|^p}{p} + \frac{\sum_{k=1}^n |\eta'_k|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Отсюда $\sum_{k=1}^n |\xi_k \eta_k| \leq AB$, что и требовалось доказать.

Замечание. Неравенство Гёльдера справедливо и тогда, когда число слагаемых бесконечно (счётно), т. е. справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right]^{1/q}, \quad (3)$$

причем сходимость рядов в правой части влечет сходимость ряда в левой части.

В самом деле, для частных сумм фигурирующих в (3) рядов неравенство доказано. Предельный переход приводит к (3).

2.3. Интегральное неравенство Гёльдера. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — измеримые на пространстве с мерой (T, Σ, μ) функции. Имеет место неравенство

$$\int_T |x(t)y(t)| d\mu \leq \left[\int_T |x(t)|^p d\mu \right]^{1/p} \left[\int_T |y(t)|^q d\mu \right]^{1/q}$$

(p и q по-прежнему связаны соотношением (1)).

Доказательство. Оно по существу является повторением доказательства неравенства Гёльдера для сумм. Именно, можно считать, что

$$0 < A^p = \int_T |x(t)|^p d\mu < \infty, \quad 0 < B^q = \int_T |y(t)|^q d\mu < \infty,$$

так как если один из интегралов равен нулю или бесконечности, то доказываемое неравенство тривиально.

Положим $\tilde{x}(t) = x(t)/A$ и $\tilde{y}(t) = y(t)/B$. Для каждого $t \in T$ согласно (1) получаем неравенство

$$|\tilde{x}(t)\tilde{y}(t)| \leq |\tilde{x}(t)|^p/p + |\tilde{y}(t)|^q/q,$$

проинтегрировав которое, найдем

$$\int_T |\tilde{x}(t) \tilde{y}(t)| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_T |\tilde{x}(t)|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_T |\tilde{y}(t)|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

откуда $\int_T |x(t) y(t)| d\mu \leq AB$, что и требовалось доказать.

Отметим, что, как и в случае неравенства для сумм, конечность интегралов в правой части неравенства влечет конечность интеграла в левой части.

Замечание. Если $p=2$ (тогда и $q=2$), то неравенства Гёльдера переходят в известные неравенства Коши и Буняковского для сумм и интегралов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 \right]^{1/2},$$

$$\int_T |x(t) y(t)| d\mu \leq \left[\int_T |x(t)|^2 d\mu \right]^{1/2} \left[\int_T |y(t)|^2 d\mu \right]^{1/2}.$$

2.4. Обобщенное неравенство Гёльдера. Пусть положительные числа p, q, r связаны соотношением

$$1/p + 1/q + 1/r = 1.$$

Тогда, каковы бы ни были измеримые функции $x(t), y(t), z(t)$, заданные на множестве T , справедливо неравенство

$$\int_T |x(t) y(t) z(t)| d\mu \leq \left[\int_T |x(t)|^p d\mu \right]^{1/p} \left[\int_T |y(t)|^q d\mu \right]^{1/q} \left[\int_T |z(t)|^r d\mu \right]^{1/r}.$$

Доказательство. Определим p' равенством $1/p' = 1/q + 1/r$. Тогда, поскольку $1/p + 1/p' = 1$, по неравенству Гёльдера имеем

$$\int_T |x(t) y(t) z(t)| d\mu \leq \left[\int_T |x(t)|^p d\mu \right]^{1/p} \left[\int_T |y(t) z(t)|^{p'} d\mu \right]^{1/p'}. \quad (4)$$

Ко второму интегралу снова применим неравенство Гёльдера с показателями q/p' и r/p' ($p'/q + p'/r = 1$), в результате чего получим

$$\int_T |y(t) z(t)|^{p'} d\mu \leq \left\{ \int_T |y(t)|^{p' \frac{q}{p'}} d\mu \right\}^{\frac{p'}{q}} \left\{ \int_T |z(t)|^{p' \frac{r}{p'}} d\mu \right\}^{\frac{p'}{r}}.$$

Подставляя это в (4), приходим к требуемому неравенству.

Замечание. Обобщенное неравенство Гёльдера справедливо, разумеется, и для сумм.

Предоставляем читателю вывод неравенства, подобного доказанному, в левой части которого находится интеграл от произведения n функций.

2.5. Неравенство Минковского. Пусть $\{\xi_k\}$ и $\{\eta_k\}$ — последовательности чисел. Имеет место неравенство

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right]^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Доказательство. Очевидно, можно ограничиться случаем, когда $p > 1$ и все ξ_k и η_k неотрицательны. Кроме того, можно считать, что суммы, фигурирующие в неравенстве, имеют конечное число слагаемых (переход к рядам осуществляется предельным переходом). При этих предположениях имеем

$$\sum_{k=1}^n |\xi_k + \eta_k|^p = \sum_{k=1}^n \xi_k |\xi_k + \eta_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n \eta_k |\xi_k + \eta_k|^{p-1}.$$

Применяя к каждой сумме в правой части неравенство Гёльдера, получим ($1/p + 1/q = 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\xi_k + \eta_k|^p &\leq \left[\sum_{k=1}^n \xi_k^p \right]^{1/p} \left[\sum_{k=1}^n (\xi_k + \eta_k)^{q(p-1)} \right]^{1/q} + \\ &+ \left[\sum_{k=1}^n \eta_k^p \right]^{1/p} \left[\sum_{k=1}^n (\xi_k + \eta_k)^{q(p-1)} \right]^{1/q}. \end{aligned}$$

Но из $1/p + 1/q = 1$ следует $q(p-1) = p$; поэтому, умножая обе части последнего неравенства на $\left[\sum_{k=1}^n (\xi_k + \eta_k)^p \right]^{-1/q}$, приходим к неравенству

$$\left[\sum_{k=1}^n (\xi_k + \eta_k)^p \right]^{1-1/q} \leq \left[\sum_{k=1}^n \xi_k^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^n \eta_k^p \right]^{1/p}.$$

Так как $1 - 1/q = 1/p$, то это и есть неравенство, подлежащее доказательству.

2.6. Интегральное неравенство Минковского. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — измеримые на множестве T функции. Имеет место неравенство

$$\left[\int_T |x(t) + y(t)|^p d\mu \right]^{1/p} \leq \left[\int_T |x(t)|^p d\mu \right]^{1/p} + \left[\int_T |y(t)|^p d\mu \right]^{1/p},$$

$p \geq 1.$

Доказательство. Если один из интегралов в правой части бесконечен, то неравенство очевидно. Если интеграл

в левой части бесконечен, то из оценки

$$\begin{aligned} \int_T |x(t) + y(t)|^p d\mu &\leq \int_T (|x(t)| + |y(t)|)^p d\mu \leq \\ &\leq 2^{p/q} \left(\int_T |x(t)|^p d\mu + \int_T |y(t)|^p d\mu \right). \end{aligned}$$

вытекающей из числового неравенства (см. п. 2.2)

$$(|a| + |b|) \leq (|a|^p + |b|^p)^{1/p} (1^q + 1^q)^{1/q} = 2^{1/q} (|a|^p + |b|^p)^{1/p},$$

получаем, что по крайней мере один из интегралов в правой части бесконечен. Таким образом, мы можем считать, что все интегралы конечны, а тогда доказательство проводится по той же схеме, что и в 2.5.

Отметим, что неравенства Гёльдера и Минковского для последовательностей являются частными случаями соответствующих интегральных неравенств. Чтобы убедиться в этом, достаточно в качестве (T, Σ, μ) взять натуральный ряд $\mathbb{N}$ с мерами точек, равными единице.

§ 3. Нормированные пространства измеримых функций и последовательностей

3.1. В этом параграфе рассматриваются пространства, элементами которых являются измеримые функции, т. е. некоторые линейные подмножества пространства $S(T, \Sigma, \mu)$. При этом, как и в $S(T, \Sigma, \mu)$, эквивалентные функции отождествляются. Алгебраические операции определяются в этих пространствах естественным образом. В частности, роль нулевого элемента играет функция, эквивалентная нулю. Мы приведем сначала общую теорию таких пространств, а затем рассмотрим конкретные примеры.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой, $S = S(T, \Sigma, \mu)$ — пространство всех вещественных или комплексных измеримых функций на нем. Для вещественных функций $x, y \in S$ запись $x \geq y$ означает, что $x(t) \geq y(t)$ п. в. Для любого элемента $x \in S$ определим его *носитель*:

$$\text{supp } x = \{t \in T: x(t) \neq 0\}.$$

Ясно, что носитель функции определяется с точностью до множества меры нуль. Для произвольного множества $E \subset S$ носитель E нельзя определить как объединение носителей всех функций из E , так как в этом случае нельзя гарантировать ни его единственность с точностью до множества меры нуль, ни даже его измеримость. Поэтому поступают следующим образом. Для любого множества $E \subset S$ носитель E есть множество $\text{supp } E \in S$, обладающее следующими свойствами:

- 1) $\text{supp } x \subset \text{supp } E \pmod{\mu}$ при любом $x \in E$;

2) если множество $A \in \Sigma$ таково, что $\text{supp } x \subset A \pmod{\mu}$ при любом $x \in E$, то $\text{supp } E \subset A \pmod{\mu}$.

Так как из 2) вытекает единственность носителя с точностью до меры нуль, то для оправдания введенного определения надо показать, что множество $\text{supp } E$, удовлетворяющее 1) и 2), найдется. По теореме 1.6.17 существует $x_0 = \sup \{x_A : A = \text{supp } x, x \in E\}$. Если мы положим $\text{supp } E = \text{supp } x_0$, то очевидно, что это множество искомое.

Для любой функции $x \in S$ положим $|x|(t) = |x(t)|$. Если $x, y \in S$ — вещественные функции, то их супремум и инфимум соответственно определяются по формулам

$$(x \vee y)(t) = \max(x(t), y(t)), \quad (x \wedge y)(t) = \min(x(t), y(t)).$$

Для вещественной функции x положим также

$$x_+ = x \vee 0, \quad x_- = (-x) \vee 0.$$

Тогда $|x| = x_+ + x_-$ и $x = x_+ - x_-$. Если x — комплексная функция, то $x(t) = \text{Re } x(t) + i \text{Im } x(t)$. Эти равенства часто позволяют сводить рассуждения к случаю неотрицательных функций. Положим

$$X_+ = \{x \in X: x \geq 0\}.$$

Элементы $x, y \in S$ называются *дизъюнктивными*, если $|x| \wedge |y| = 0$. Запись $x_n \downarrow$ означает, что $x_m \geq x_n$ при $n \geq m$. Запись $x_n \downarrow x$ означает, что $x_n \downarrow$ и $x_n(t) \rightarrow x(t)$ п. в. Подобным же образом определяется $x_n \uparrow$ и $x_n \uparrow x$.

Идеальным пространством (сокращенно ИП) на (T, Σ, μ) называется линейное подмножество X в S такое, что

$$\text{из } x \in X, y \in S, |y| \leq |x| \text{ следует } y \in X.$$

Фундаментальным пространством (сокращенно ФП) на (T, Σ, μ) называется ИП X , для которого $\text{supp } X = T$. Очевидно, что всякое ИП X можно рассматривать как ФП на $\text{supp } X$.

Лемма 1. Если X — ФП на (T, Σ, μ) , то для любой неотрицательной функции $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ найдется последовательность $x_n \uparrow x$, $0 \leq x_n \in X$.

Доказательство. Рассмотрим множество $E = \{y \in X_+ : y \leq x\}$. По теореме 1.6.17 существует $\tilde{y} = \sup E$, причем найдется счетное множество $\{y_n\} \subset E$ такое, что $\tilde{y}(t) = \sup y_n(t)$ п. в. Покажем, что $\tilde{y} = x$. Очевидно, что $\tilde{y} \leq x$. Рассмотрим функцию $z = x - \tilde{y} \geq 0$ и множество $A = \{t: z(t) > 0\}$. Предположим, что $\mu(A) > 0$. Тогда найдется неотрицательная функция $y_0 \in X$, для которой $\mu(\text{supp } y_0 \cap A) > 0$. Поэтому $\tilde{y}_0 = (y_0 \chi_A) \wedge z > 0$ и $\tilde{y}_0 \in X$, так как $0 \leq \tilde{y}_0 \leq y_0$. Следовательно, $\tilde{y} + \tilde{y}_0 > \tilde{y} = \sup E$, а с другой стороны, $\tilde{y} + \tilde{y}_0 \in X$ и $\tilde{y} + \tilde{y}_0 \leq (x - z) + z = x$, чем получено противоречие. Следовательно, $x = \tilde{y} = \sup E = \sup y_n$. Положим $x_n = y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_n$. Очевидно, что $x_n \in X$ и $0 \leq x_n \uparrow x$.

Следствие 1. Если X — ФП на (T, Σ, μ) , то для любой неотрицательной функции $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ найдется неубывающая последовательность множеств $\{B_n\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ такая, что $x\chi_{B_n} \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) и $x\chi_{B_n} \uparrow x$.

Доказательство. В силу леммы 1 найдется последовательность $x_n \uparrow x$, $x_n \in X$. Положим

$$B_n = \{t \in T: 2x_n(t) \geq x(t)\}.$$

Так как $x_n \uparrow x$, то $x\chi_{B_n} \uparrow x$, а так как $x\chi_{B_n} \leq 2x_n \in X$, то $x\chi_{B_n} \in X$.

Следствие 2. Если X — ФП на (T, Σ, μ) , то найдется такое разбиение $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ множества T , что $A_n \in \Sigma(\mu)$ и $\chi_{A_n} \in X$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Достаточно в следствии 1 в качестве x взять функцию 1, тождественно равную единице на T , и положить $A'_1 = B_1$, $A'_n = B_n \setminus B_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$), а потом каждое множество A'_n разбить на множества конечной меры.

Норма $\|\cdot\|$ на ИП X называется *монотонной*, если из $x, y \in X$, $|x| \leq |y|$ следует $\|x\| \leq \|y\|$.

Нормированным идеальным пространством (сокращенно НИП) на (T, Σ, μ) называется ИП, снабженное монотонной нормой. НИП, являющееся ФП, называется *нормированным фундаментальным пространством* (сокращенно НФП). Наконец, полное по норме НИП называется *банаховым идеальным пространством* (сокращенно БИП), а полное по норме НФП называется *банаховым фундаментальным пространством* (сокращенно БФП).

Выведем простейшие следствия из монотонности нормы в НИП X . Пусть $x_n \rightarrow x$ по норме в X . Тогда имеют место следующие утверждения (в которых сходимость тоже означает сходимость по норме в X):

- 1) $|x_n - x| \rightarrow 0$;
- 2) если $y_n \rightarrow y$, то $x_n \vee y_n \rightarrow x \vee y$ и $x_n \wedge y_n \rightarrow x \wedge y$;
- 3) $(x_n)_+ \rightarrow x_+$, $(x_n)_- \rightarrow x_-$, $|x_n| \rightarrow |x|$;
- 4) если $x_n \geq y_n$ ($n \in \mathbb{N}$) и $y_n \rightarrow y$, то $x \geq y$;
- 5) если $A \in \Sigma$, то $x_n \chi_A \rightarrow x \chi_A$.

Утверждение 1) очевидно; 2) вытекает из неравенства $|(x_n \vee y_n) - (x \vee y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$ и равенства $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$; 3) является непосредственным следствием 2). 4) также вытекает из 2). Действительно, с одной стороны, $x_n \vee y_n \rightarrow x \vee y$, а с другой, $x_n \vee y_n = x_n \rightarrow x$. Следовательно, $x \vee y = x$, откуда $x \geq y$. Наконец, 5) вытекает из неравенства $|x_n \chi_A - x \chi_A| \leq |x_n - x|$.

Приведем несколько теорем, касающихся введенных классов пространств.

Теорема 1. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — НИП на (T, Σ, μ) . Тогда:

1) если $x_n, x \in X$ и $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, то $x_n \rightarrow x(\mu)$;

2) если $\{x_n\} \subset X$ — последовательность Коши, то она сходится по мере к некоторому $x \in S$.

Доказательство. В силу следствия 2 леммы 1 найдется разбиение $\{A_p\}_{p=1}^\infty$ множества $\text{supp } X$ такое, что $A_p \in \Sigma(\mu)$, $\chi_{A_p} \in X$ ($p \in \mathbb{N}$). Предположим, что $x_n \not\rightarrow x(\mu)$. Тогда в силу замечания после определения свойства прямой суммы (см. I.6.10) $x_n \not\rightarrow x(\mu)$ на некотором A_p . Учитывая свойство (5) сходимости по норме в НИП, можно считать, что функция 1, тождественно равная единице на T , принадлежит X и $\mu(T) < \infty$.

Переходя, если надо, к подпоследовательности, можно считать также, что найдутся такие числа $\varepsilon, \delta > 0$, что выполнены следующие условия:

$$\mu(\{t \in T: |x_n(t) - x(t)| \geq \varepsilon\}) \geq \delta, \quad (1)$$

$$\|x_n - x\| < \varepsilon/2^n. \quad (2)$$

Положим

$$B_n = \{t \in T: |x_n(t) - x(t)| \geq \varepsilon\}, \quad B = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=n+1}^\infty B_m. \quad (3)$$

В силу (1) имеем

$$\mu(B_n) \geq \delta, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \mu(B) \geq \delta. \quad (4)$$

В силу (2), учитывая $\varepsilon \chi_{B_n} \leq |x_n - x|$, получаем

$$\|\chi_{B_n}\| < 1/2^n. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение множества

$$C_{ns} = \bigcup_{m=n+1}^{n+s} (B_m \cap B).$$

Тогда при любом $x \in \mathbb{N}$ последовательность $\{C_{ns}\}_{s=1}^\infty$ неубывающая и в силу (3)

$$B = \bigcup_{s=1}^\infty C_{ns}.$$

Следовательно, при любом $n \in \mathbb{N}$ существует такой номер s_n , что

$$\mu(B \setminus C_{ns_n}) < 1/2^{n+1}. \quad (6)$$

Положим

$$D_n = \bigcap_{m=n+1}^\infty C_{ms_m}.$$

Очевидно, что последовательность $\{D_n\}$ неубывающая, и так как $B \setminus \bigcap_{m=n+1}^{\infty} C_{ms_m} = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} (B \setminus C_{ms_m})$, то в силу (6) получаем

$$\mu(B \setminus D_n) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu(B \setminus C_{ms_m}) < 1/2^n.$$

Следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = B \pmod{\mu}$. В силу (5) при $m > n$ имеем

$$\|\chi_{D_n}\| \leq \|\chi_{C_{ms_m}}\| \leq \left\| \sum_{h=m+1}^{m+s_m} \chi_{B_h} \right\| \leq \sum_{h=m+1}^{m+s_m} \|\chi_{B_h}\| < \frac{1}{2^m},$$

откуда $\chi_{D_n} = 0$, т. е. $\mu(D_n) = 0$. Таким образом, $\mu(B) = 0$, что противоречит (4).

2) Так как пространство $S(T, \Sigma, \mu)$ полно (теорема I.6.15), то достаточно доказать, что если $\{x_n\}$ — последовательность Коши в X , то она — последовательность Коши в $S(T, \Sigma, \mu)$. Предположим противное. Тогда, если ρ — метрика в S , то существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся m_n и k_n ($m_n, k_n > n$), для которых $\rho(x_{m_n}, x_{k_n}) \geq \varepsilon$. Тогда $m_n, k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ и $\|x_{m_n} - x_{k_n}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, откуда $\rho(x_{m_n}, x_{k_n}) \rightarrow 0$, в силу 1), чем получено противоречие.

Следствие. Если E — ограниченное по норме подмножество НИП X , то E ограничено и в ТВП S .

Доказательство. По теореме 1 тождественное вложение X в S непрерывно, а любое непрерывное отображение переводит ограниченные множества в ограниченные.

Лемма 2. Пусть X — БИП. Если $x_n \rightarrow x$ по норме в X , то найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, функция $r \in X_+$ и числовая последовательность $\varepsilon_{n_k} \downarrow 0$ такие, что $|x_{n_k} - x| \leq \varepsilon_{n_k} r$.

Доказательство. Выберем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $\|x - x_{n_k}\| < 1/2^k$ ($k \in \mathbb{N}$). Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|k(x - x_{n_k})\| < \sum_{k=1}^{\infty} k/2^k < \infty, \quad (7)$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k|x - x_{n_k}|$ сходится по норме в B -пространстве X (см. 1.5). Положим

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} k|x - x_{n_k}| \in X, \quad \varepsilon_{n_k} = 1/k.$$

Из свойства 4) сходимости по норме в НИП получаем $k|x - x_{n_k}| < r$ ($k \in \mathbb{N}$), откуда $|x_{n_k} - x| \leq \varepsilon_{n_k} r$.

Заметим, что для случая, когда X — БИП, из леммы 1 мы получаем более простое доказательство теоремы 1.

Теорема 2. Любые две монотонные нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, заданные на ИП X , превращающие X в БИП, эквивалентны.

Доказательство. Как отмечено в 1.3, достаточно доказать, что тождественный оператор $(X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ является изоморфизмом, т. е. в силу равноправности $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ достаточно доказать, что из $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$ следует $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$. Предположим, что $\|x_n\|_2 \not\rightarrow 0$. Тогда, переходя, если надо, к подпоследовательности, можно считать, что $\|x_n\|_2 \geq \varepsilon > 0$ ($n \in \mathbb{N}$). В силу леммы 2 найдутся $\{x_{n_k}\}$, $r \in X_+$ и $\varepsilon_{n_k} \downarrow 0$, для которых $|x_{n_k}| \leq \varepsilon_{n_k} r$. Так как норма $\|\cdot\|_2$ монотонна, то отсюда следует, что $\|x_{n_k}\|_2 \leq \varepsilon_{n_k} \|r\|_2 \rightarrow 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

3.2. Введем несколько важных условий, которыми может обладать норма в НИП X .

Говорят, что в НИП X норма *порядково непрерывна* *), или что в X выполнено условие (A), если

$$\text{из } x_n \downarrow 0 \text{ следует } \|x_n\| \rightarrow 0.$$

Лемма 3. Если X — НИП с условием (A), то множество

$$E = \left\{ y = \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{A_k} : \right.$$

$$A_k \in \Sigma(\mu), \quad A_k \cap A_{k'} = \emptyset, \quad k \neq k', \quad \chi_{A_k} \in X, \quad m \in \mathbb{N} \Big\}$$

плотно в X по норме.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что любая функция $x \in X_+$ входит в замыкание E . Так как срезки $[x]_n \uparrow x$ (см. 1.6.4), а в X выполнено условие (A), то $[x]_n \rightarrow x$ по норме в X . Следовательно, достаточно рассмотреть ограниченные функции x . Так как мера μ σ -конечна, то $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, где $T_n \subset T_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) и $\mu(T_n) < \infty$. Опять-таки в силу условия (A) $x \chi_{T_n} \rightarrow x$ по норме. Следовательно, достаточно рассмотреть случай ограниченной функции x и конечной меры μ . По теореме 1.6.3 найдутся конечнозначные функции x_n , для которых $0 \leq x_n \uparrow x$, а тогда $x_n \rightarrow x$ по норме. Очевидно, что $x_n \in E$ ($n \in \mathbb{N}$).

Для проверки сепарабельности конкретных пространств часто бывает удобна.

Теорема 3. БФП X на (T, Σ, μ) сепарабельно тогда и только тогда, когда мера μ сепарабельна и в X выполнено условие (A).

*) В этом и дальнейших определениях мы часто слово «порядковый» будем для краткости заменять на (о) (от английского слова „order“ — порядок). Например, в этом случае мы будем говорить об (о)-непрерывности нормы,

Доказательство. В силу леммы 1 НФП X плотно в метрическом пространстве S . Тем самым, если X сепарабельно, то S сепарабельно, а тогда по теореме 1.6.16 мера μ сепарабельна. Выполнение условия (A) будет доказано в более общей ситуации ниже (см. следствие теоремы X.4.4).

Используя лемму 3, доказательство обратного утверждения проводим дословно, как доказательство теоремы 1.6.16.

Говорят, что в НФП X норма *порядково полунепрерывна*, или что в X выполнено условие (C), если

$$\text{из } 0 \leq x_n \uparrow x \in X \text{ следует } \|x_n\| \rightarrow \|x\|.$$

Очевидно, что условие (A) влечет условие (C).

Лемма 4. Условие (C) выполнено в НФП X тогда и только тогда, когда из $x_n \rightarrow x(\mu)$; $x_n, x \in X$ следует $\|x\| \leq \lim \|x_n\|$.

Доказательство. Пусть в X выполнено (C). В силу теоремы 1.6.4 можно считать, что $x_n \rightarrow x$ п. в., а тогда $|x_n| \rightarrow |x|$ п. в. Положим $y_n = \inf \{|x_m| : m \geq n\}$ (этот инфимум существует в силу следствия теоремы 1.6.17). Очевидно, что $0 \leq y_n \uparrow |x|$. Тогда

$$\|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq \lim \|x_n\|,$$

так как $0 \leq y_n \leq |x_n|$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $0 \leq x_n \uparrow x \in X$. Тогда $x_n \rightarrow x(\mu)$ и по условию $\|x\| \leq \lim \|x_n\| = \lim \|x_n\|$. Так как $\|x\| \geq \|x_n\|$ ($n \in \mathbb{N}$) в силу монотонности нормы, то получаем $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

Говорят, что в НФП X норма *монотонно полна*, или что в X выполнено условие (B), если

$$\text{из } 0 \leq x_n \uparrow, x_n \in X \ (n \in \mathbb{N}), \sup \|x_n\| < \infty$$

следует, что существует $x \in X$, для которого $x_n \uparrow x$.

Лемма 5. Пусть X — НФП на (T, Σ, μ) . Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) в X выполнены условия (B) и (C);
- 2) единственный шар $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ замкнут в $S(T, \Sigma, \mu)$, т. е. если $x_n \in X$, $x \in S$, $\|x_n\| \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$), $x_n \rightarrow x(\mu)$, то $x \in X$ и $\|x\| \leq 1$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условиям 2). Как и при доказательстве леммы 4, можно считать, что $x_n \rightarrow x$ п. в. Если положим $y_n = \inf \{|x_m| : m \geq n\} \in X$, то $0 \leq y_n \uparrow |x|$ и $\sup \|y_n\| \leq \sup \|x_n\| \leq 1$, откуда в силу (B) $x \in X$. Теперь в силу леммы 4 получаем $\|x\| \leq 1$.

2) $\Rightarrow$ 1). Надо доказать, что если $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$), $\sup \|x_n\| < \infty$, то существует $x \in X$, для которого $x_n \uparrow x$ и $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

Можно считать, что $\sup \|x_n\| = 1$. Тогда $x_n \in B_X$. В силу следствия теоремы 1 множество B_X ограничено в ТВП S . Тогда по лемме III.1.1. (см. III.1.4) существует элемент $x \in S$ такой, что

$x_n \uparrow x$, откуда в силу условия 2) $x \in X$ и $\|x\| \leq 1$, а так как $\|x\| \geq \sup \|x_n\| = 1$, то $\|x\| = 1$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *НИП X , в котором выполнены условия (B) и (C), полно по норме.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши в X . Так как всякая последовательность Коши ограничена, то можно считать, что $\|x_n\| \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$). В силу теоремы 1 $\{x_n\}$ — последовательность Коши в S , а так как ТВП S полно (теорема I.6.15), то существует $x \in S$ такой, что $x_n \rightarrow x(\mu)$. В силу леммы 5 $x \in X$. Покажем, что $x_n \rightarrow x$ по норме.

Так как $\{x_n\}$ — последовательность Коши, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется число N такое, что при $n, m \geq N$ имеем

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon. \quad (8)$$

Зафиксируем произвольное $n \geq N$ и рассмотрим последовательность $y_n = x_n - x_m \rightarrow x_n - x(\mu)$. Тогда в силу леммы 4 и оценки (8) получаем

$$\|x_n - x\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $x_n \rightarrow x$ по норме, чем и доказана полнота X .

Как мы увидим ниже (см. главу X), условие (C) в теореме 4 излишне. Сформулируем самый удобный критерий полноты для НИП (см. Абрамович [1]):

НИП X полно по норме тогда и только тогда, когда из $x_n \in X_+$, $x_n \wedge x_m = 0$ ($n \neq m$) и $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ вытекает, что $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$ (здесь сумма понимается в смысле сходимости почти всюду).

Удобство приведенного критерия заключается в том, что $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ всегда существует как элемент S и достаточно показать, что этот элемент принадлежит X .

Теория идеальных пространств является частью общей теории векторных решеток, которую мы подробнее рассмотрим в главе X^*). Отметим, что исторически теория векторных решеток была построена раньше и многие фундаментальные факты теории ИП первоначально были получены как применение общих теорем о векторных решетках.

В последующих главах мы будем также изучать функционалы и операторы в ИП. Теперь же мы перейдем к рассмотрению примеров конкретных банаховых идеальных пространств.

*) Там же будут приведены и литературные указания; упомянем здесь только обзор Забрейко [1] и книгу Заанен — II, где рассмотрение ИП не опирается на аппарат теории векторных решеток. Интересные результаты о БФП содержатся в статье Лозановского [2].

3.3. Важнейшую роль в функциональном анализе и в вопросах, рассматриваемых в этой книге, играют пространства L^p , которые и будут сейчас рассмотрены.

Пусть (T, Σ, μ) по-прежнему пространство с σ -конечной мерой, хотя на самом деле при изучении пространств L^p требование σ -конечности, как правило, излишне. Фиксируем число p ($1 \leq p < \infty$). Обозначим через $L^p(T, \Sigma, \mu)$ пространство всех функций $x \in S(T, \Sigma, \mu)$, для которых конечно выражение

$$\|x\| = \left[\int_T |x(t)|^p d\mu \right]^{1/p}. \quad (9)$$

Используя интегральное неравенство Минковского, получаем, что $L^p(T, \Sigma, \mu)$ — векторное пространство и функционал, определенный формулой (9), является нормой. Таким образом, $L^p(T, \Sigma, \mu)$ есть НИП.

Сходимость в $L^p(T, \Sigma, \mu)$ называется *сходимостью в среднем с показателем p* :

$$\int_T |x_n(t) - x(t)|^p d\mu \rightarrow 0.$$

Теоремы Лебега и Б. Леви (II.6.6) показывают, что в НИП $L^p(T, \Sigma, \mu)$ выполнены условия (A) и (B), а тогда по теореме 4 $L^p(T, \Sigma, \mu)$ — B-пространство. Так как $\chi_A \in L^p(T, \Sigma, \mu)$, если $A \in \Sigma(\mu)$, то в силу локальной конечности меры (I.6.2) $L^p(T, \Sigma, \mu)$ — ФП. Все сказанное можно объединить в следующую теорему.

Теорема 5. При $1 \leq p < \infty$ пространство $L^p(T, \Sigma, \mu)$ есть БФП с условиями (A) и (B).

Введем теперь пространство L^p при $p = \infty$. Пространство $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ состоит из всех функций $x \in S(T, \Sigma, \mu)$, для которых найдется число α_x такое, что $|x(t)| \leq \alpha_x$ п. в. *). Для функции $x \in L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ определим истинный (или существенный) супремум ее модуля $\text{vrai sup}_{t \in T} |x(t)|$ как инфимум множества чисел $\alpha \in \mathbb{R}$ таких, что

$$\mu(\{t \in T: |x(t)| > \alpha\}) = 0.$$

Очевидно, что $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ — линейное подмножество в S . Норма на $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ вводится по формуле

$$\|x\| = \text{vrai sup}_{t \in T} |x(t)|.$$

Предоставляем читателю несложную проверку того, что $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ есть БФП с условиями (B) и (C). В пространстве $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ практически никогда не бывает выполнено условие (A). Исключение составляет вырожденный случай, когда про-

*) Такие функции называются *существенно ограниченными*.

пространство $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ конечномерно, что эквивалентно тому, что (T, Σ, μ) состоит из конечного числа атомов. Действительно, пусть $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ бесконечномерно. Тогда существует последовательность $\{A_n\} \subset \Sigma(\mu)$ попарно дизъюнктивных множеств положительной меры. Рассмотрим множества

$$B_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B_1 = B_0 \setminus A_1, \dots, \quad B_k = B_{k-1} \setminus A_k, \dots$$

Тогда, если $x_n = \chi_{B_n}$, то $x_n \in L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ и $x_n \downarrow 0$. Однако очевидно, что $\|x_n\| = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), откуда в $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ не выполнено условие (A).

Далее, если понятно, о какой мере μ идет речь, или когда, наоборот, это не имеет значения, мы вместо $L^p(T, \Sigma, \mu)$ будем писать L^p . Если в качестве пространства с мерой взято измеримое подмножество $D \subset \mathbb{R}^n$ с мерой Лебега mes , то вместо $L^p(T, \Sigma, \mu)$ пишем $L^p(D)$; если (T, Σ, μ) есть отрезок $[a, b]$ с мерой Лебега, то пишем $L^p(a, b)$. Аналогичных соглашений мы будем придерживаться и при рассмотрении других конкретных пространств.

Из результатов I.6.10 и теорем 3 и 5 вытекает, что пространства $L^p(D)$ сепарабельны при $1 \leq p < \infty$. Так как в $L^\infty(D)$ не выполнено условие (A), то это пространство не сепарабельно. В качестве счетного плотного множества в $L^p(a, b)$ можно взять, например, множество полиномов с рациональными коэффициентами или множество ступенчатых функций, которые на интервалах с рациональными концами принимают рациональные значения.

Для установления этого отметим прежде всего, что если $[x]_n$ — «срезка» функции x (см. I.6.4), то

$$\int_a^b |x(t) - [x]_n(t)|^p dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

так как подынтегральная функция стремится к нулю и предельный переход под знаком интеграла допустим ввиду ограниченности подынтегральной функции суммируемой функцией $|x(t)|^p$.

Возьмем n так, чтобы $\|x - [x]_n\| \leq \varepsilon$. Далее, найдя непрерывную функцию $y(t)$, совпадающую с $[x]_n(t)$ всюду, за исключением множества A , где $\text{mes } A < \varepsilon^p / (2n)^p$, и также не превосходящую n (см. I.6.9), будем иметь

$$\begin{aligned} \|x_n - y\| &= \left\{ \int_A |x_n(t) - y(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int_A (2n)^p dt \right\}^{1/p} = \\ &= 2n [\text{mes } A]^{1/p} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Наконец, возьмем полином $P(t)$ с рациональными коэффициентами такой, что $|y(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ ($t \in [a, b]$). Тогда ясно, что $\|y - P\| < \varepsilon$ и, окончательно, $\|x - P\| < 3\varepsilon$.

Счетным плотным в $L^p(-\infty, \infty)$ множеством является, например, совокупность ступенчатых функций на рациональных интервалах, принимающих только рациональные значения, из которых только конечное число отлично от нуля.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как связаны между собой пространства L^p при различных показателях p .

Теорема 6. Пусть мера μ конечна и $1 \leq s < r \leq \infty$. Тогда $L^r(T, \Sigma, \mu) \subset L^s(T, \Sigma, \mu)$, причем, если

$$K(r, s) = \begin{cases} \mu(T)^{(r-s)/(rs)} & \text{при } r < \infty, \\ \mu(T)^{1/s} & \text{при } r = \infty, \end{cases}$$

то

$$\|x\|_{L^s} \leq K(r, s) \|x\|_{L^r}.$$

Доказательство. Случай $r = \infty$ предоставляем разобрать читателю. Пусть $r < \infty$. Тогда, полагая $p = r/s$, $q = r/(r-s)$ ($p, q > 0$, $1/p + 1/q = 1$), из интегрального неравенства Гельдера получаем

$$\begin{aligned} \|x\|_{L^s} &= \left[\int_T |x(t)|^s d\mu \right]^{1/s} \leq \left[\int_T |x(t)|^{ps} d\mu \right]^{1/(ps)} \left[\int_T 1^q d\mu \right]^{1/(qs)} = \\ &= \|x\|_{L^r} \mu(T)^{1/(qs)} = K(r, s) \|x\|_{L^r}. \end{aligned}$$

Отметим, что $\|x\|_{L^\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_{L^p}$ (Харди, Литтлвуд, Полиа, с. 173), однако $L^\infty \neq \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p$. В случае бесконечной меры теорема 6 неверна.

Пространства L^p ($1 < p < \infty$) введены Ф. Риссом [1]. Пространство L^1 — Штейнгаузом [1].

3.4. Рассмотрим важный частный случай пространств измеримых функций — пространства последовательностей. Как мы уже отмечали, если $T = \mathbb{N}$, Σ — совокупность всех подмножеств $\mathbb{N}$ и мера μ любой точки есть единица, то $S(T, \Sigma, \mu)$ есть пространство всех последовательностей s . Все определения и результаты предыдущих параграфов применимы тем самым к подпространствам s .

В рассматриваемом случае пространства $L^p(T, \Sigma, \mu)$ обозначаются l^p . Если $x = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, то в соответствии с определением нормы в $L^p(T, \Sigma, \mu)$ получаем

$$\|x\|_{l^p} = \begin{cases} \left[\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p \right]^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{k=1}^\infty |\xi_k|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Из результатов 3.3 вытекает, что l^p ($1 \leq p < \infty$) — сепарабельное банахово пространство, а l^∞ — несепарабельное банахово пространство.

Введем еще два пространства последовательностей, являющихся подпространствами в l^∞ . Обозначим через c пространство всех сходящихся последовательностей, а через c_0 — всех сходящихся к нулю последовательностей. Снабдим c и c_0 нормой, индуцированной из l^∞ . Очевидно, что c и c_0 — линейные подмножества l^∞ . Покажем, что они замкнуты в l^∞ , откуда получим, что c и c_0 — банаховы пространства. Проведем рассуждение только для c .

Если $\{x_n\}$ — последовательность элементов из c , сходящаяся к $x_0 \in l^\infty$, то $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$. Полагая $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ для любого $\varepsilon > 0$ при $n \geq N_\varepsilon$ имеем

$$\|x_n - x_0\| = \sup_k \{\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}\} < \varepsilon/3,$$

что можно записать и так:

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \varepsilon/3, \quad k = 1, 2, \dots; n \geq N_\varepsilon.$$

Возьмем фиксированное $n \geq N_\varepsilon$. Поскольку $x_n \in c$, то последовательность $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots$ сходится. Следовательно, для достаточно больших k и k' будет $|\xi_k^{(n)} - \xi_{k'}^{(n)}| < \varepsilon/3$. Стало быть, для тех же k и k' будем иметь

$$\begin{aligned} |\xi_k^{(0)} - \xi_{k'}^{(0)}| &\leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}| + |\xi_k^{(n)} - \xi_{k'}^{(n)}| + |\xi_{k'}^{(n)} - \xi_{k'}^{(0)}| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, последовательность $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)}, \dots$ — сходящаяся, т. е. $x_0 \in c$.

Отметим, что c_0 — БФП с условием (А) (и тем самым сепарабельное B -пространство), но без условия (В). Таким образом, условие (В) не является необходимым для полноты НИП. Пространство c не является ИП.

Отметим, что для пространств l^p ($1 \leq p \leq \infty$) имеют место включения и неравенства для нормы ($c K(r, s) = 1$), обратные сформулированным в теореме 6.

Наконец, приведем пример пространства Φ обрывающихся последовательностей. Оно состоит из всех последовательностей $(\xi_k)_{k=1}^\infty$, у которых не более конечного множества координат отлично от нуля. Норма в Φ индуцирована из l^∞ . Очевидно, что Φ — НФП, но Φ не является B -пространством, так как пространство Φ плотно в c_0 .

Пространства l^p введены и изучены Ф. Риссом [3], l^p ранее — Д. Гильбертом (см. Гильберт).

3.5. Укажем на связанные с только что введенными пространствами последовательностей l^p конечномерные (размерности n) пространства l_n^p . Так как любые два конечномерных пространства одинаковой размерности изоморфны, то различие между ними

может состоять лишь в способе определения нормы. Именно, в пространстве l_n^p норма определяется так: если $x = \{\xi_k\}_{k=1}^n$, то

$$\|x\|_{l_n^p} = \begin{cases} \left[\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right]^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{k=1}^n |\xi_k|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

(При $p = 2$ получается евклидова норма.)

Как это следует из следствия 1 теоремы 1.2, несмотря на различие норм в этих пространствах, сходимость в них имеет один и тот же смысл — это покоординатная сходимость. (Здесь это получается и непосредственно из неравенства $|\xi_k| \leq \|x\|$, которое имеет место в каждом из рассмотренных конечномерных пространств.)

Пространство l_n^p можно считать подпространством пространства l^p . Для этого надо отождествить элемент $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in l_n^p$ с элементом $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots) \in l^p$.

3.6. Кроме пространств L^p , в функциональном анализе рассматривается много других пространств измеримых функций.

Начнем с определения пространств Орлича, являющихся обобщением пространств L^p . Заданная на $(-\infty, \infty)$ четная, выпуклая, положительная при $u \neq 0$, непрерывная функция $M(u)$ называется N -функцией, если

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{M(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{M(u)}{u} = +\infty.$$

Для каждой N -функции равенством

$$M^*(u) = \sup_{-\infty < v < \infty} (uv - M(v))$$

определяется дополнительная N -функция. Очевидно, что N -функция M монотонно возрастает на $[0, +\infty)$ и $M(0) = 0$. Можно показать, что M^* — N -функция и $M^{**} (= (M^*)^*) = M$.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с конечной мерой. Зафиксируем N -функцию M . Классом Орлича $L_M^0(T, \Sigma, \mu)$ (или просто L_M^0) называется совокупность всех функций $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ таких, что

$$\int_T M(|x(t)|) d\mu < +\infty.$$

Класс Орлича может оказаться нелинейным множеством; точнее, при $x \in L_M^0$ может оказаться, что $2x \notin L_M^0$. Очевидно, что $L^\infty \subset L_M^0$.

Пространством Орлича $L_M(T, \Sigma, \mu)$ (или просто L_M) называется совокупность всех функций $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ таких, что

найдется число $\lambda = \lambda(x) > 0$, для которого

$$\int_T M(|x(t)|/\lambda) d\mu < \infty.$$

Очевидно, что $L_M^0 \subset L_M$. Как мы увидим ниже, эти множества могут оказаться неравными. Пространство L_M есть уже линейное подмножество в S . Действительно, очевидно, что умножение на число не выводит из L_M . Если

$$\int_T M(|x(t)|/\lambda_1) d\mu < \infty, \quad \int_T M(|y(t)|/\lambda_2) d\mu < \infty,$$

то в силу выпуклости M имеем

$$\begin{aligned} \int_T M\left(\frac{|x(t) + y(t)|}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) d\mu &\leq \\ &\leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_T M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda_1}\right) d\mu + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_T M\left(\frac{|y(t)|}{\lambda_2}\right) d\mu, \end{aligned} \quad (10)$$

откуда $x + y \in L_M$. В силу монотонности M очевидно, что L_M — ФП на (T, Σ, μ) . На пространстве Орлича мы будем рассматривать следующие две нормы:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sup \left\{ \int_T |xy| d\mu : \int_T M^*(y) d\mu \leq 1 \right\}, \\ \|x\|_2 &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_T M(|x(t)|/\lambda) d\mu \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Покажем, что $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ действительно являются нормами. Из определения M^* выводим неравенство Юнга

$$|uv| \leq M(u) + M^*(v).$$

Пусть $\int_T M(|x(t)|/\lambda) d\mu < \infty$. Тогда в силу неравенства Юнга

$$\int_T |xy| d\mu = \lambda \int_T |x/\lambda| |y| d\mu \leq \lambda \int_T M(|x|/\lambda) d\mu + \lambda \int_T M^*(|y|) d\mu. \quad (11)$$

Отсюда вытекает, что $\|x\|_1 < \infty$. Так как $L^\infty \subset L_M^0$, то из $\|x\|_1 = 0$ следует $x = 0$. Остальные свойства нормы для $\|\cdot\|_1$ очевидны.

По определению очевидно, что $\|x\|_2 < \infty$. Однородность очевидна; неравенство треугольника легко получается из неравенства (10). Если $\|x\|_2 = 0$, то $x = 0$, так как $M(u) > 0$ при $u > 0$. Итак, $\|\cdot\|_2$ — норма. Из неравенства (11) выводим, что $\|x\|_1 \leq 2\|x\|_2$. Можно доказать, что $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Мы этого, однако, делать не будем, а докажем только существование константы $k_1 > 0$, для которой

$\|x\|_1 \geq k_1 \|x\|_2$ ($x \in L_M$), т. е. нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны. Последний факт мы получим из того, что $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — монотонные нормы, превращающие L_M в БФП (см. теорему 2).

Теорема 7. *Пространство Орлича L_M как с нормой $\|\cdot\|_1$, так и с $\|\cdot\|_2$ является БФП, в котором выполнены условия (B) и (C).*

Доказательство. Так как НФП с условиями (B) и (C) полно (теорема 4), то достаточно доказать, что в $(L_M, \|\cdot\|_i)$ выполнены условия (B) и (C), т. е. из $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in L_M$, $\sup \|x_n\|_i < \infty$ следует, что существует $x \in L_M$, для которого $x_n \uparrow x$ и $\sup_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_i = \|x\|_i$ ($i = 1, 2$).

Пусть сначала $i = 1$. Положим $x(t) = \sup_n x_n(t)$. Функция x априори может принимать бесконечные значения на множестве положительной меры, однако по следствию теоремы 1.6.7 для любого y , удовлетворяющего $\int_T M^*(y) d\mu \leq 1$, получаем

$$\int_T x|y| d\mu = \sup_n \int_T x_n|y| d\mu \leq \sup \|x_n\|_1. \quad (12)$$

Последнее неравенство показывает, что в $(L_M, \|\cdot\|_1)$ выполнены условия (B) и (C).

Рассмотрим случай $i = 2$. Так как $\|x\|_1 \leq 2\|x\|_2$, то в $(L_M, \|\cdot\|_2)$ выполнено условие (B). Осталось проверить, что из $0 \leq x_n \uparrow x \in L_M$ вытекает $\|x_n\|_2 \rightarrow \|x\|_2$.

Отметим сначала следующее свойство $\|\cdot\|_2$: для любого $x \neq 0$ имеем

$$\int_T M(|x(t)|/\|x\|_2) d\mu \leq 1. \quad (13)$$

Действительно, возьмем $\lambda_n \rightarrow \|x\|_2$ ($\lambda_n \neq 0$), причем

$$\int_T M(|x(t)|/\lambda_n) d\mu \leq 1. \quad (14)$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, по теореме Фату получаем (13).

Положим $\lim \|x_n\|_2 = \lambda$. В силу (13)

$$\int_T M(|x_n(t)|/\|x_n\|_2) d\mu \leq 1. \quad (15)$$

Переходя к пределу, опять-таки в силу теоремы Фату получаем

$$\int_T M(|x(t)|/\lambda) d\mu \leq 1.$$

Отсюда $\|x\|_2 \leq \lambda = \lim \|x_n\|_2 \leq \|x\|_2$, чем и закончено доказательство теоремы.

Исследуем теперь вопрос, когда в пространстве Орлича выполнено условие (А). Так как нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, то условие (А) выполнено или не выполнено для этих норм одновременно.

Как уже отмечалось, всегда $L^\infty \subset L_M^0 \subset L_M$. Обозначим через E_M замыкание L^∞ в пространстве Орлича L_M . На E_M мы также будем рассматривать нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$.

Лемма 6. 1) Если $\{x_n\} \subset L_M$ и $x_n \rightarrow x$ по норме в L_M , то последовательность $\{x_n\}$ «сходится в среднем» к функции x , т. е.

$$\int_T M(|x_n(t) - x(t)|) d\mu \rightarrow 0^*.$$

2) Если в предположениях пункта 1) $2x_n \in L_M^0$ ($n \in N$), то $x \in L_M^0$.

3) $E_M \subset L_M^0$.

Доказательство. 1) Отметим сначала, что из равенства $M(0) = 0$ и выпуклости M вытекает

$$M(\alpha u) \leq \alpha M(u), \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (16)$$

Так как $\|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$, то $\|x_n - x\|_2 \leq 1$ при $n \geq N$. Для этих n в силу (16) имеем ($\alpha = \|x_n - x\|_2$)

$$1 \geq \int_T M\left(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|_2}\right) d\mu \geq \frac{1}{\|x_n - x\|_2} \int_T M(|x_n - x|) d\mu, \quad (17)$$

откуда

$$\int_T M(|x_n - x|) d\mu \leq \|x_n - x\|_2 \rightarrow 0.$$

2) Вытекает из неравенства

$$\int_T M(|x|) d\mu \leq \frac{1}{2} \int_T M(|2x - 2x_n|) d\mu + \frac{1}{2} \int_T M(|2x_n|) d\mu.$$

3) Если $x \in E_M$, то найдется $\{x_n\} \subset L^\infty$ такая, что $x_n \rightarrow x$ по норме. Так как $2x_n \subset L^\infty \subset L_M^0$, то $x \in L_M^0$ в силу 2).

Теорема 8. Пространство E_M является БФП, в котором выполнено условие (А).

Доказательство. Нам надо лишь проверить, что в E_M выполнено условие (А). Предположим, что это не так. Тогда найдется последовательность $\{x_n\} \subset E_M$ такая, что $x_n \downarrow 0$, $\|x_n\|_2 > \delta > 0$ ($n \in N$). В силу (13) тогда

$$\int_T M(|x_n|/\delta) d\mu > 1$$

*) Конечное число этих интегралов может быть равно бесконечности.

при любом $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, $x_1/\delta \in E_M \subset L_M^0$ в силу леммы 6. Тогда по теореме Лебега имеем

$$\int_T M(|x_n|/\delta) d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

чем и получено противоречие.

Говорят, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если существуют такие постоянные $k > 0$, $u_0 \geq 0$, что

$$M(2u) \leq kM(u), \quad u \geq u_0.$$

В следующей теореме мы предполагаем, что пространство (T, Σ, μ) непрерывно *).

Теорема 9. Следующие утверждения эквивалентны:

1) в L_M выполнено условие (A);

2) $L_M = E_M$;

3) в E_M выполнено условие (B);

4) $L_M = L_M^0$;

5) L_M^0 — линейное множество;

6) N -функция M удовлетворяет Δ_2 -условию.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Если в L_M выполнено условие (A), то по лемме 3 L^∞ плотно в L_M , а тогда $E_M = L_M$.

2) $\Rightarrow$ 3), так как в L_M выполнено (B) (теорема 7).

3) $\Rightarrow$ 2) в силу леммы 1.

2) $\Rightarrow$ 4), так как по лемме 6 $E_M \subset L_M^0$.

4) $\Rightarrow$ 5), так как L_M — линейное множество.

5) $\Rightarrow$ 4). Действительно, если $x \in L_M$, $x \neq 0$, то в силу (13) $x/\|x\|_2 \in L_M^0$. Тогда $x = \|x\|_2 (x/\|x\|_2) \in L_M^0$.

4) $\Rightarrow$ 1) доказывается точно так же, как теорема 8.

6) $\Rightarrow$ 5) Пусть $m \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что из Δ_2 -условия вытекает, что при $u \geq u_0$ выполнено неравенство

$$M(2^m u) \leq k^m M(u).$$

Пусть теперь $x \in L_M^0$, λ — некоторое число. Тогда найдется $m \in \mathbb{N}$, для которого $|\lambda| \leq 2^m$. Получаем

$$\int_T M(|\lambda x|) d\mu \leq k^m \int_T M(|x|) d\mu + \mu(T) M(2^m u_0) < \infty,$$

откуда $\lambda x \in L_M^0$.

5) $\Rightarrow$ 6). Пусть N -функция M не удовлетворяет Δ_2 -условию. Тогда существует числовая последовательность $\{u_n\}$ такая, что $0 < u_n \uparrow +\infty$, $M(u_n) > 1$ и

$$M(2u_n) > 2^n M(u_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

*) Это предположение используется только при доказательстве 5) $\Rightarrow$ 6).

В силу непрерывности (T, Σ, μ) найдутся непересекающиеся множества $A_n \in \Sigma$ такие, что

$$\mu(A_n) = \frac{\mu(T)}{2^n M(u_n)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Определим функцию $x(t)$ равенствами

$$x(t) = \begin{cases} u_n, & \text{если } x \in A_n, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{если } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \end{cases}$$

В силу (19)

$$\int_T M(x(t)) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} M(x(t)) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} M(u_n) \mu(A_n) \leq \mu(T) < \infty,$$

откуда $x \in L_M^0$.

С другой стороны, из (18) и (19) получаем

$$\int_{A_n} M(2x(t)) d\mu = M(2u_n) \mu(A_n) > 2^n M(u_n) \mu(A_n) = \mu(T),$$

откуда

$$\int_T M(2x(t)) d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} M(2x(t)) d\mu = +\infty.$$

Следовательно, $2x \notin L_M^0$. Доказательство теоремы полностью закончено.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$ с конечной мерой Лебега. Из теорем 3 и 9 получаем

Следствие. *Пространство Орлича $L_M(D)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда N -функция M удовлетворяет Δ_2 -условию.*

В заключение отметим, что пространства L^p ($1 < p < \infty$) содержатся в классе пространств Орлича. Действительно, положим $M(u) = u^p/p$. Тогда норма в пространстве Орлича L_M эквивалентна норме в L^p .

Докажем, что

$$\|x\|_{L^p} = p^{1/p} \|x\|_2. \quad (20)$$

Если $\int_T M(|x|/\|x\|_2) d\mu \leq 1$, то $\int_T |x(t)|^p / \|x\|_2^p d\mu \leq p$, откуда

$$\left(\int_T |x(t)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq p^{1/p} \|x\|_2.$$

С другой стороны,

$$\int_T M \left(\frac{|x(t)|}{p^{-1/p} \left(\int_T |x(t)|^p d\mu \right)^{1/p}} \right) d\mu = 1,$$

откуда $\|x\|_{L^p} \geq p^{1/p} \|x\|_2$. Сопоставляя доказанные неравенства, получаем (20).

Более подробно с пространствами Орлича и их приложениями к решению нелинейных интегральных уравнений можно познакомиться по книге Красносельский, Рутецкий, изложению которой мы в отдельных местах следовали (см. также Заанен — I).

3.7. Остановимся кратко на двух классах пространств, важных в теории интерполяции линейных операторов (см. Крейн и др.).

Если $x \in S(0, 1)$, то *равноизмеримой перестановкой модуля x в невозрастающем порядке* называется функция $x^*(\tau)$ на $[0, 1]$, задаваемая формулой

$$x^*(\tau) = \inf \{ \alpha \geq 0: \text{mes} (\{t: |x(t)| > \alpha\}) \leq \tau \}.$$

Пусть $\psi(t)$ — непрерывная вогнутая, положительная при $t \neq 0$ функция на $[0, 1]$ такая, что $t/\psi(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0+} 0$.

Пространством Марцинкевича $M(\psi)$ называется банахово пространство, состоящее из всех $x \in S(0, 1)$, для которых конечна норма

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sup \left\{ \frac{1}{\psi(\text{mes}(A))} \int_A |x(t)| dt: A \subset [0, 1] \text{ измеримо и } \text{mes}(A) > 0 \right\} = \\ &= \sup_{0 < h < 1} \left\{ \frac{1}{\psi(h)} \int_0^h x^*(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Пространство $M(\psi)$ — БФП с условиями (B) и (C), но без условия (A).

Пространством Лоренца $\Lambda(\psi)$ называется банахово пространство, состоящее из всех $x \in S(0, 1)$, для которых конечна норма

$$\|x\| = \int_0^1 x^*(\tau) d\psi(\tau).$$

Пространство $\Lambda(\psi)$ — БФП с условиями (A) и (B).

Наиболее распространены пространства $M(\psi)$ и $\Lambda(\psi)$ для $\psi(t) = t^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$). В этом случае они обозначаются $M(\alpha)$ и $\Lambda(\alpha)$.

С операцией перехода к равноизмеримой невозрастающей функции x^* связан важный класс БФП — класс симметричных пространств (см. Крейн и др.; Джонсон и др.; Бухвалов, Векслер и Гейлер [1], § 4.4), т. е. таких БФП X на отрезке $[0, 1]$ с мерой Лебега, что из $x \in X$, $y \in S(0, 1)$, $x^* = y^*$ следует $y \in X$ и $\|x\| = \|y\|$. Пространства $L^p(0, 1)$, $L_M(0, 1)$, $E_M(0, 1)$, $M(\psi)$ и $\Lambda(\psi)$ являются симметричными пространствами.

В заключение отметим, что можно рассматривать аналогичные БИП классы пространств измеримых функций со значениями в B -пространствах. Такие пространства находят себе применения в теории дифференциальных уравнений, аналитической теории полугрупп, интерполяции линейных операторов (см., например, Бурбаки — V; Данфорд, Шварц — I, II; Динкуляну; Иосида; Хилле, Филлипс; Эдвардс).

§ 4. Другие нормированные пространства функций

4.1. Остановимся сначала на уже известном B -пространстве $C(K)$ непрерывных функций на компакте K . Сформулируем важную в приложениях теорему Стоуна — Вейерштрасса о плотных по норме подмножествах в $C(K)$.

Определим в $C(K)$ операцию поточечного умножения: $(xy)(t) = x(t)y(t)$.

Линейное подмножество E в $C(K)$ называется *подалгеброй*, если из $x, y \in E$ следует $xy \in E$. Через 1 обозначим функцию, тождественно равную единице на K .

Теорема 1 (Стоун — Вейерштрасс). Пусть E — подмножество вещественного B -пространства $C(K)$. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) E — подалгебра;
- 2) $1 \in E$;
- 3) E разделяет точки на K , т. е. для любых $t, t' \in K$ ($t \neq t'$) найдется функция $x \in E$, для которой $x(t) \neq x(t')$.

Тогда E плотно в $C(K)$.

Из теоремы 1 легко получаем классический результат о том, что множество многочленов плотно в $C[a, b]$.

Теорема 1 перестает быть справедливой, если мы будем рассматривать комплексное пространство $C(K)$. Действительно, возьмем в качестве $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ замкнутый единичный круг комплексной плоскости и рассмотрим множество E комплексных полиномов на K , т. е. $E = \mathcal{P}(1, z, z^2, \dots)$. Множество E удовлетворяет условиям теоремы 1, но оно не плотно в комплексном $C(K)$. Например, $x(z) = \operatorname{Re} z \notin E$, так как в противном случае она по теореме Вейерштрасса была бы аналитична внутри круга. Однако и в комплексном случае положение нетрудно исправить.

Теорема 2. Пусть E — подмножество комплексного B -пространства $C(K)$. Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы 1 и дополнительно:

- 4) если $x \in E$, то $\bar{x} \in E$, где $\bar{x}(t) = \overline{x(t)}$, а черта означает комплексное сопряжение.

Тогда E плотно в $C(K)$.

Доказательства теорем 1 и 2 см., например, в Данфорд, Шварц — I; Шеффер — I.

Лемма 1 (о разбиении единицы). Если $\{U_i\}_{i=1}^n$ — открытое конечное покрытие компакта K , то найдется система вещественных непрерывных функций $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$ на K , удовлетворяющая условиям:

- 1) $\varphi_i(t) \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$);
- 2) $\varphi_i(t) = 0$, $t \notin U_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$);
- 3) $\sum_{i=1}^n \varphi_i(t) = 1$ при любом $t \in K$.

Доказательство. Рассмотрим только случай метрического компакта K с метрикой $r(t, s)$. Обозначим $F_i = K \setminus U_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Для любого $t \in K$ положим

$$\varphi_i(t) = r(t, F_i) / \sum_{k=1}^n r(t, F_k).$$

Так как $r(t, F_i) = 0$ эквивалентно $t \in F_i$, то система $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$ удовлетворяет 1)–3).

Теорема 3. Если K — метрический компакт, то B -пространство $C(K)$ сепарабельно.

Замечание. Легко видеть, что верно и обратное: если B -пространство $C(K)$ сепарабельно, то компакт K метризуем.

Доказательство. Без ограничения общности можно рассматривать вещественное $C(K)$. По следствию 1 теоремы 1.5.2 компакт K сепарабелен. Пусть M — счетное всюду плотное множество в K . В силу компактности K для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется конечное покрытие K открытыми множествами $U_i^m = \{s \in K: r(t_i, s) < 1/m\}$ ($i = 1, 2, \dots, n(m)$), где $t_i \in M$.

Пусть $\{\varphi_i^m(t)\}_{i=1}^{n(m)}$ — разбиение единицы, построенное по $\{U_i^m\}_{i=1}^{n(m)}$ согласно лемме 1. Докажем, что счетное множество E функций вида

$$\sum_{i=1}^{n(m)} r_i \varphi_i^m(t_i), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где r_i — произвольные рациональные числа, плотно в $C(K)$. Возьмем $x \in C(K)$ и число $\varepsilon > 0$. Так как функция $x(t)$ равномерно непрерывна на K , то для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $r(t, s) < \delta$, то $|x(t) - x(s)| < \varepsilon$. Возьмем $m \in \mathbb{N}$, для которого $1/m < \delta$. Тогда можно выбрать рациональные числа r_i , удовлетворяющие $|x(t) - r_i| < 2\varepsilon$ при всех $t \in U_i^m$ ($i = 1, 2, \dots, n(m)$). Положим

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{n(m)} r_i \varphi_i^m(t).$$

Тогда $\tilde{x} \in E$, и если $t \in U_j^m$, то

$$\begin{aligned} |x(t) - \tilde{x}(t)| &= \left| \sum_{i=1}^{n(m)} x(t) \varphi_i^m(t) - \sum_{i=1}^{n(m)} r_i \varphi_i^m(t) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n(m)} |x(t) - r_i| \varphi_i^m(t) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $\{U_i^m\}_{i=1}^{n(m)}$ — покрытие K , то отсюда получаем $\|x - \tilde{x}\| < 2\varepsilon$, чем и доказана плотность E в $C(K)$.

4.2. Как мы увидим ниже, с пространством $C[a, b]$ тесно связано пространство функций ограниченной вариации.

Пусть $x(t)$ — конечная функция, заданная в промежутке $[a, b]$. Рассмотрим произвольное разбиение τ промежутка $[a, b]$ ($a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$) и образуем выражение

$$v_\tau = \sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})|. \quad (1)$$

Если совокупность сумм v_τ , отвечающих всевозможным разбиениям τ промежутка $[a, b]$, ограничена, то функция $x(t)$ называется *функцией ограниченной вариации* в промежутке $[a, b]$, а величина

$$V_a^b(x) = \sup_\tau v_\tau$$

называется *полной вариацией* функции $x(t)$.

Рассмотрим множество V всех функций ограниченной вариации. V — векторное пространство. Действительно, всякую функцию ограниченной вариации в промежутке $[a, b]$ можно представить в виде разности двух неубывающих функций (Фихтенгольц, т. III):

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t), \quad t \in [a, b].$$

Нетрудно видеть, что и, наоборот, каждая функция, представимая в виде разности неубывающих, является функцией ограниченной вариации. Линейность V непосредственно следует из этого замечания.

Если положить для $x \in V$

$$\|x\| = |x(a)| + V_a^b(x),$$

то V становится нормированным пространством.

В самом деле, первые две аксиомы нормированного пространства выполнены очевидным образом, поэтому в проверке нуждается лишь неравенство треугольника. Пусть $x, y \in V$ и $z = x + y$. Тогда для любого разбиения промежутка $[a, b]$ ($a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$)

$$\begin{aligned} |z(a)| &= |x(a) + y(a)| \leq |x(a)| + |y(a)|, \\ |z(t_k) - z(t_{k-1})| &\leq |x(t_k) - x(t_{k-1})| + |y(t_k) - y(t_{k-1})|, \\ k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |z(a)| + \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| &\leq |x(a)| + \sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})| + \\ &+ |y(a)| + \sum_{k=1}^n |y(t_k) - y(t_{k-1})| \leq \|x\| + \|y\|, \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Докажем, что V — полное пространство.

Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность. Прежде всего, поскольку

$$\begin{aligned} |x_m(t) - x_n(t)| &\leq \\ &\leq |[x_m(t) - x_n(t)] - [x_m(a) - x_n(a)]| + |x_m(a) - x_n(a)| \leq \\ &\leq |x_m(a) - x_n(a)| + \bigvee_a^b (x_m - x_n) = \|x_m - x_n\|, \end{aligned}$$

то числовая последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится, каково бы ни было $t \in [a, b]$.

Положим $x_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и N_ε столь велико, что при $m, n \geq N_\varepsilon$ выполняется $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. Тем более для всякого разбиения $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ будем иметь

$$|x_m(a) - x_n(a)| + \sum_{k=1}^r |[x_m(t_k) - x_n(t_k)] - [x_m(t_{k-1}) - x_n(t_{k-1})]| < \varepsilon.$$

Фиксируя здесь разбиение и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, найдем

$$|x_0(a) - x_n(a)| + \sum_{k=1}^r |[x_0(t_k) - x_n(t_k)] - [x_0(t_{k-1}) - x_n(t_{k-1})]| \leq \varepsilon.$$

И так как это справедливо для любого разбиения, то

$$|x_0(a) - x_n(a)| + \bigvee_a^b (x_0 - x_n) \leq \varepsilon, \quad n > N_\varepsilon.$$

Отсюда обычным рассуждением заключаем, что $x_0 \in V$ и

$$\|x_0 - x_n\| \leq \varepsilon, \quad n > N_\varepsilon,$$

т. е. $x_n \rightarrow x_0$.

4.3. Кроме пространств непрерывных и измеримых функций, в функциональном анализе важную роль играют пространства гладких и аналитических функций. Примерами пространств гладких функций являются пространства $C^{(n)}(D)$ и рассматриваемые ниже пространства Соболева. Ради примера приведем определение пространств Харди аналитических функций (подробнее см. Г о ф м а н).

Через H^p ($1 \leq p \leq \infty$) обозначается B -пространство аналитических функций $x(z)$ в единичном открытом круге D , для которых конечна норма

$$\|x\| = \begin{cases} \sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |x(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{z \in D} |x(z)|, & p = \infty. \end{cases}$$

При $1 < p < \infty$ пространства H^p можно естественным образом вложить в виде дополняемого подпространства в $L^p(0, 2\pi)$. При $p = 1, \infty$ пространство H^p нельзя дополняемо вложить ни в какое $L^p(T, \Sigma, \mu)$.

4.4. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Мы будем говорить, что непрерывная в D функция $x(t)$ продолжается по непрерывности на замыкание $\bar{D}$, если существует непрерывная функция $\tilde{x}(t)$ на $\bar{D}$, сужение которой на D совпадает с $x(t)$ (такая функция $\tilde{x}(t)$, очевидно, единственна).

Через $C(D)$ обозначим B -пространство всех непрерывных в D функций $x(t)$, продолжающихся по непрерывности на $\bar{D}$ с нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in D} |x(t)|.$$

Легко видеть, что отображение $x \rightarrow \tilde{x}$ является линейной изометрией B -пространства $C(D)$ на $C(\bar{D})$, в силу чего пространство $C(D)$ полно.

Будем говорить, что функция $x(t)$ имеет l непрерывных производных в $\bar{D}$, если в D существуют всевозможные непрерывные частные производные порядка $\leq l$, которые продолжаются по непрерывности на $\bar{D}$.

Через $C^{(l)}(D)$ обозначим B -пространство всех функций $x(t)$ в D , имеющих в $\bar{D}$ l непрерывных производных, с нормой

$$\|x\| = \sum_{k=0}^l \sum_{(n)} \sup_{t \in D} \left| \frac{\partial^k x(t)}{\partial t_1^{h_1} \dots \partial t_n^{h_n}} \right|,$$

где $\sum_{(k)}$ есть суммирование всех возможных производных порядка k .

Пространства $C(D)$ и $C^{(l)}(D)$ будут играть важную роль в связи с теоремами вложения (см. гл. XI и далее).

§ 5. Гильбертово пространство

5.1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ выделяется из всех конечномерных пространств тем, что в нем определено скалярное произведение, связанное с нормой простым соотношением: квадрат нормы элемента есть скалярное произведение элемента самого на себя. В связи с этим целесообразно рассматривать такие пространства, в которых определено «скалярное произведение», а норма вводится указанным выше образом.

Комплексное векторное пространство H называется *пространством со скалярным произведением*, если для каждой пары элементов $x, y \in H$ определено скалярное произведение (x, y) — комплексное число, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

- 1) $(y, x) = \overline{(x, y)}$;
- 2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$;

3) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ равносильно $x = 0$ *).

Из определения пространства со скалярным произведением вытекает:

а) $(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \bar{\lambda}(x, y_1) + \bar{\mu}(x, y_2)$ (аксиомы 1) и 2)).

б) $(x, 0) = (0, y) = 0$. Действительно, $(x, 0 \cdot y) = 0 \cdot (x, y) = 0$.

в) $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$ (неравенство Коши — Буняковского).

Для доказательства этого предложения рассмотрим выражение

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2(y, y).$$

По аксиоме 3) это выражение неотрицательно, каково бы ни было число λ . Предполагая, что $(y, y) > 0$ (в противном случае $y = 0$ и доказываемое неравенство очевидно), положим $\lambda = -(x, y)/(y, y)$. На основании сказанного

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0,$$

т. е. $(x, x)(y, y) - |(x, y)|^2 \geq 0$, что и требовалось доказать.

Если в пространстве H со скалярным произведением положить

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in H, \quad (1)$$

то H становится нормированным пространством. Действительно, из аксиом нормированного пространства только неравенство треугольника не вытекает непосредственно из определения H . Докажем его. Пусть $x, y \in H$. Используя неравенство Коши — Буняковского, будем иметь

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = |(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)| \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Нормированное пространство H называется *унитарным*, если в нем можно ввести скалярное произведение, связанное с нормой соотношением (1).

Поскольку H — нормированное пространство, оно обладает всеми свойствами последнего. В частности, имеют место элементарные факты, указанные в 1.1. Отметим еще несколько простых предложений, относящихся специально к пространствам со скалярным произведением.

1) **Непрерывность скалярного произведения.** Если $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$, то $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

*) Реже в основу пространства со скалярным произведением кладется вещественное векторное пространство. В этом случае предполагается, что скалярное произведение — вещественное число, условие 1) при этом замещается условием $(y, x) = (x, y)$.

Ниже, говоря о пространстве со скалярным произведением, мы всегда будем подразумевать, если не оговорено противоположное, что речь идет о комплексном пространстве, хотя все результаты, кроме спектральной теории операторов, справедливы и в вещественном случае.

Действительно, с помощью неравенства Коши — Буняковского получим

$$\begin{aligned} |(x, y) - (x_n, y_n)| &\leq |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \leq \\ &\leq \|x\| \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \|y_n\|. \end{aligned}$$

Так как сходящаяся последовательность $\{y_n\}$ ограничена, то правая часть в написанном неравенстве стремится к нулю, следовательно, $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

2) Каковы бы ни были элементы $x, y \in H$, справедливо равенство

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2] *). \quad (2)$$

В самом деле, по определению нормы имеем

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + \\ &\quad + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2]. \end{aligned}$$

То, что H есть унитарное пространство, означает, что норма в H введена специальным образом, через скалярное произведение. Пополнение $\bar{H}$ пространства H также будет нормированным пространством (1.4). Покажем, что скалярное произведение в H можно распространить на $\bar{H}$ таким образом, что $\bar{H}$ окажется унитарным пространством.

3) Пополнение $\bar{H}$ унитарного пространства H само является унитарным пространством.

В самом деле, пусть $\xi, \eta \in \bar{H}$. Существуют последовательности $\{x_n\}, \{y_n\} \subset H$ такие, что $x_n \rightarrow \xi, y_n \rightarrow \eta$. Повторяя почти дословно рассуждения доказательства 1), убедимся, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$, который не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, а определяется только элементами ξ и η . Поскольку для $\xi, \eta \in H$ на основании 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (\xi, \eta)$, то естественно и для произвольных $\xi, \eta \in \bar{H}$ положить

$$(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n).$$

Как нетрудно проверить, в силу определения $\bar{H}$ становится пространством со скалярным произведением. Учитывая указанную

*) Это соотношение является обобщением того элементарного геометрического факта, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Если в нормированном пространстве X для любых элементов $x, y \in X$ выполняется соотношение (2), то X — унитарное пространство, т. е. в X можно ввести скалярное произведение так, что норма будет определяться равенством (1).

в 1.4 связь нормы в $\bar{H}$ с нормой в H , будем иметь

$$\|\xi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n, x_n)} = \sqrt{(\xi, \xi)},$$

$$\xi \in \bar{H}, \quad x_n \rightarrow \xi, \quad x_n \in H, \quad n = 1, 2, \dots,$$

что и означает унитарность пространства $\bar{H}$.

Отметим еще одно вполне очевидное предложение.

4) Подпространство унитарного пространства также является унитарным пространством.

5.2. Основным интерес представляет полное унитарное пространство. Такое пространство называется *гильбертовым* (по имени немецкого математика Д. Гильберта *).

Гильбертово пространство является непосредственным обобщением евклидова пространства, поэтому его «геометрия» ближе, чем в случае любого другого B -пространства, подходит к евклидовой геометрии. Гильбертово пространство обладает многими такими свойствами евклидова пространства, которыми B -пространства общего вида не обладают (см., например, соотношение (2)). Это обстоятельство позволило развить функциональный анализ на основе гильбертова пространства гораздо шире и полнее, чем на основе общих нормированных пространств, благодаря чему теория гильбертова пространства выделилась в большую самостоятельную ветвь функционального анализа со своими результатами и методами, не укладывающимися в рамки общего функционального анализа, которому в основном посвящена эта книга. В связи с этим здесь и ниже гильбертово пространство служит, как правило, лишь для иллюстрации фактов, относящихся к общей теории.

5.3. Конкретным примером гильбертова пространства является пространство l^2 . Скалярное произведение в нем определяется равенством

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots).$$

Норма, определенная согласно (1) через скалярное произведение

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right]^{1/2},$$

совпадает с нормой, определенной в 2.3, почему мы за рассматриваемым пространством сохраняем прежнее обозначение l^2 . Как было доказано, это пространство полно.

Более общим образом, пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой. $L^2(T, \Sigma, \mu)$ становится гильбертовым пространством, если

*) Иногда при этом требуют еще, чтобы пространство было бесконечномерным. Абстрактное гильбертово пространство было введено Нейманом [1].

ПОЛОЖИТЬ

$$(x, y) = \int_T x(t) \overline{y(t)} d\mu.$$

Норма в L^2 совпадает с нормой, введенной по формуле (1). Рассмотрим теперь один частный случай. Пусть функция $\varphi \in L^1(a, b)$ такова, что $\varphi(t) > 0$ п. в. (промежуток может быть и бесконечным). Положим

$$\nu(A) = \int_A \varphi(t) dt$$

для всех множеств A , измеримых по Лебегу. Обозначим через $L^2_\varphi(a, b)$ гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом по мере ν . При этом скалярное произведение определяется, очевидно, по формуле

$$(x, y) = \int_a^b \varphi(t) [x(t) \overline{y(t)}] dt.$$

Если $\varphi(t) = 1$, то $L^2_\varphi(a, b) = L^2(a, b)$. Как уже было доказано, пространства l^2 и $L^2_\varphi(a, b)$ сепарабельны.

Примером несепарабельного гильбертова пространства может служить совокупность H_c функций, определенных на всей числовой прямой и имеющих не более чем счетное множество значений, отличных от нуля. При этом предполагается, что

$$\sum_t |x(t)|^2 < \infty^*.$$

Скалярное произведение в H_c определим по формуле

$$(x, y) = \sum_t x(t) \overline{y(t)}.$$

Предоставляем читателю доказать полноту этого пространства, опираясь на полноту l^2 .

Если обозначить через x_τ элемент H_c :

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 1, & t = \tau, \\ 0, & t \neq \tau, \end{cases}$$

то нетрудно проверить, что $\|x_\tau - x_{\tau'}\| = \sqrt{2}$ (если $\tau \neq \tau'$), откуда вытекает, что H_c не сепарабельно.

5.4. При изучении гильбертовых пространств весьма важным оказывается понятие ортогональности элементов.

*) Лишь для не более чем счетного множества значений t функция $x(t)$ отлична от нуля. Таким образом, написанную сумму можно рассматривать как обычный ряд.

Элементы x и y гильбертова пространства H называются *ортгоналными*, если $(x, y) = 0$. При этом пишут $x \perp y$.

Если фиксированный элемент $x \in H$ ортгонален каждому элементу некоторого множества $E \subset H$, то говорят, что x *ортгонален* E , и пишут $x \perp E$.

Наконец, если элементы двух множеств E_1 и E_2 попарно ортгоналны, то эти множества называются *ортгоналными* ($E_1 \perp E_2$).

Укажем несколько простых фактов, касающихся введенных понятий.

а) Если $x \perp y_1$ и $x \perp y_2$, то $x \perp \lambda y_1 + \mu y_2$.

б) Если $x \perp y_n$ ($n = 1, 2, \dots$) и $y_n \rightarrow y$, то $x \perp y$.

Это следует непосредственно из непрерывности скалярного произведения (см. 1) 5.1).

с) Если $x \perp E$, то $x \perp \overline{\mathcal{L}}(E)$.

Для доказательства надо воспользоваться пунктами а) и б).

д) Если $x \perp E$, где E — фундаментальное в H множество, т. е. если $\overline{\mathcal{L}}(E) = H$, то $x = 0$.

Действительно, тогда $x \perp H$, а следовательно, x ортгонален самому себе, т. е. $(x, x) = 0$, что равносильно $x = 0$.

е) Совокупность всех элементов, ортгоналных данному множеству E , является *подпространством* пространства H , т. е. линейным замкнутым множеством*). Это подпространство называется *ортгональным дополнением* множества E .

Основное значение в теории гильбертова пространства имеет — Теорема 1. Пусть H_1 — подпространство гильбертова пространства H и H_2 — его ортгональное дополнение. Каков бы ни был элемент $x \in H$, его можно единственным образом представить в форме

$$x = x' + x'', \quad x' \in H_1, \quad x'' \in H_2. \quad (3)$$

При этом элемент x' реализует расстояние от x до H_1 , т. е.

$$\|x - x'\| = \rho(x, H_1)**). \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим $d = \rho(x, H_1)$ и найдем элемент $x_n \in H_1$ такой, что

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + 1/n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

В силу соотношения (2)

$$\|x_n - x_m\|^2 + \|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 2[\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2]. \quad (6)$$

*) В случае гильбертова пространства термин «подпространство» даже всегда будет означать «замкнутое линейное множество».

**) Эта теорема в настоящем ее виде доказана Реллихом [1].

А так как $\frac{x_m + x_n}{2} \in H_1$, то

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 4 \left\| x - \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \geq 4d^2.$$

Следовательно, из (6) с помощью (5) и этой оценки получаем

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2 \left[d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2} \right] - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе. В силу полноты пространства H существует $x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. При этом $x' \in H_1$ (по замкнутости). Переходя к пределу в (5), найдем $\|x - x'\| \leq d$, а так как для любого элемента из H_1 , в том числе и для x' , должно быть $\|x - x'\| \geq d$, то

$$\|x - x'\| = d. \quad (7)$$

Докажем теперь, что элемент $x'' = x - x'$ ортогонален H_1 и поэтому принадлежит H_2 . Возьмем отличный от нулевого элемент $y \in H_1$. При любом λ имеем $x' + \lambda y \in H_1$, так что

$$\|x'' - \lambda y\|^2 = \|x - (x' + \lambda y)\|^2 \geq d^2,$$

что можно переписать, используя (7), в форме

$$-\bar{\lambda}(x'', y) - \lambda(y, x'') + |\lambda|^2(y, y) \geq 0.$$

В частности, при $\lambda = (x'', y)/(y, y)$ получаем отсюда

$$-\frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} \geq 0,$$

т. е.

$$|(x'', y)|^2 \leq 0,$$

что может быть лишь в случае $(x'', y) = 0$, $x'' \perp y$.

Итак, возможность представления x в форме (3) и соотношение (4) установлены. Докажем, что представление (3) единственно. В самом деле, если

$$x = x'_1 + x''_1, \quad x'_1 \in H_1, \quad x''_1 \in H_2,$$

то, сопоставляя это с (3), получим

$$x' - x'_1 = x''_1 - x''.$$

Элемент, стоящий в левой части этого равенства, принадлежит H_1 , а в правой — H_2 , поэтому $x' - x'_1 \perp x''_1 - x''$, откуда получаем $x' - x'_1 = x''_1 - x'' = 0$. Теорема полностью доказана.

Элементы x' и x'' , однозначно определяемые элементом x , будем называть *проекциями* элемента x из подпространств H_1 и H_2 соответственно.

Система элементов $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) называется *полной* в гильбертовом пространстве H , если множество $\{x_\alpha\}$ фундаментально (см. II. 3.2) в H , т. е. $H = \overline{\mathcal{L}(\{x_\alpha\})}$.

Следствие. Для того чтобы система элементов $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) была полной в пространстве H , необходимо и достаточно, чтобы не существовало отличного от нуля элемента, ортогонального каждому элементу системы.

Действительно, необходимость условия вытекает из предложения d) 5.4. Условие достаточно, так как если $\{x_\alpha\}$ — неполная система, то $H_1 = \overline{\mathcal{L}(\{x_\alpha\})} \neq H$ и, следовательно, беря элемент $x \in H \setminus H_1$ и разлагая его на сумму проекций $x = x' + x''$ ($x' \in H_1$, $x'' \perp H_1$), будем иметь $x'' \neq 0$ и $x'' \perp x_\alpha$ ($\alpha \in A$), что противоречит условию.

5.5. Система элементов $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) гильбертова пространства H называется *ортогональной*, если любые два различных элемента этой системы ортогональны. Если, кроме того, норма каждого элемента x_α равна единице, то система называется *ортонормальной*, или *ортонормированной*.

Важным примером ортогональной системы в $L^2(a, b)$ является система тригонометрических функций 1, $\cos \frac{2\pi(t-a)}{b-a}$, $\sin \frac{2\pi(t-a)}{b-a}$, ..., $\cos \frac{2\pi n(t-a)}{b-a}$, $\sin \frac{2\pi n(t-a)}{b-a}$, ... Это полная система, так как линейная оболочка данной системы — множество всех тригонометрических полиномов — плотно в $L^2(a, b)$. Чтобы убедиться в этом заметим сначала, что в $L^2(a, b)$ плотно множество всех ограниченных (измеримых) функций. Далее, с помощью теоремы Лузина получаем, что в этом множестве будет плотным множество непрерывных периодических (т. е. принимающих равные значения на концах промежутка $[a, b]$) функций. Наконец, на основании теоремы Вейерштрасса заключаем, что множество тригонометрических полиномов плотно в множестве непрерывных функций.

Другим примером ортогональной системы в $L^2(a, b)$ является так называемая *система Радематера*, состоящая из функций

$$x_n(t) = (-1)^k,$$

$$\frac{k}{2^n}(b-a) < t-a < \frac{k+1}{2^n}(b-a); \quad k=0, 1, \dots, 2^n-1; \quad n=0, 1, \dots$$

Эта система неполная. Действительно, функция $x(t) = (t-a)(t-b) + \frac{(b-a)^2}{6}$ ортогональна всем функциям системы.

В L^2 ортогональной системой будет система $\{x_n\}$ ($x_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$). Ясно, что это полная система. Ортогональной системой в H является совокупность $\{x_i\}$, где x_i — элементы, определенные выше, в 5.3.

Если среди элементов ортогональной системы нет нулевого, то такая система линейно независима. В самом деле, если бы существовала линейная зависимость

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{\alpha_k} = 0,$$

то, умножив скалярно обе части этого равенства на x_{a_j} , мы получили бы $\lambda_j \|x_{a_j}\|^2 = 0$.

От ортогональной системы нетрудно перейти к ортонормальной, если разделить каждый элемент на его норму (предполагается, что система не содержит нулевого элемента). Сложнее осуществляется переход от произвольной системы элементов к ортонормальной. Ограничиваясь случаем счетных систем, докажем следующую теорему об ортогонализации (по Шмидту).

Теорема 3 (об ортогонализации). Пусть $\{y_n\}$ — линейно независимая система элементов гильбертова пространства H . Существует ортонормальная система $\{x_n\}$ такая, что

$$x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} y_k, \quad \lambda_n^{(n)} \neq 0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Дадим два доказательства теоремы.

Первое доказательство. Положим

$$x_1 = \lambda_1^{(1)} y_1, \quad \lambda_1^{(1)} = 1/\|y_1\|,$$

и допустим, что уже построены попарно ортогональные и нормированные элементы $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, связанные с $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ соотношениями (8). Обозначим через H'_n линейную оболочку элементов $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, а через H''_n — ортогональное дополнение H'_n . Так как $y_n \notin H'_n$, то в разложении

$$y_n = y'_n + y''_n, \quad y'_n \in H'_n, \quad y''_n \in H''_n,$$

проекция $y''_n \neq 0$. Обозначив

$$x_n = \lambda_n^{(n)} y''_n, \quad \lambda_n^{(n)} = 1/\|y''_n\|,$$

будем иметь $\|x_n\| = 1$, и поскольку $x_n \perp H'_n$, а $x_k \in H'_n$ ($k < n$), то $x_n \perp x_k$ ($k < n$). Далее,

$$x_n = \lambda_n^{(n)} y''_n = \lambda_n^{(n)} y_n - \lambda_n^{(n)} y'_n.$$

Ввиду того, что $y'_n \in H'_n$, имеем

$$y'_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} y_k.$$

Положив $\lambda_k^{(n)} = -\alpha_k^{(n)} \lambda_n^{(n)}$ ($k < n$), получим

$$x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} y_k.$$

Доказательство теоремы завершается по индукции.

Замечание 1. Поскольку $\lambda_n^{(n)} \neq 0$, то элементы y_n могут быть выражены через $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$y_n = \sum_{k=1}^n \mu_k^{(n)} x_k, \quad \mu_n^{(n)} = \frac{1}{\lambda_n^{(n)}}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Замечание 2. Элементы x_n определяются элементами y_n не однозначно. Однако если потребовать, чтобы $\lambda_n^{(n)} > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), то система $\{x_n\}$ будет единственна.

В самом деле, пусть имеются две системы $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$, удовлетворяющие поставленному требованию. Используя соотношения (8) и (9) и аналогичные им для системы $\{\tilde{x}_n\}$, мы можем выразить элементы одной системы $\{\tilde{x}_n\}$ через $\{x_n\}$, т. е. получить соотношение вида

$$\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^n \beta_k^{(n)} x_k. \quad (10)$$

При этом нетрудно видеть, что коэффициент $\beta_n^{(n)}$ положителен (он равен произведению $\tilde{\lambda}_n^{(n)} \mu_n^{(n)}$, где через $\tilde{\lambda}_n^{(n)}$ обозначен соответствующий коэффициент формулы (8) для системы $\{\tilde{x}_n\}$). Отсюда ясно, что $\tilde{x}_1 = x_1$. Если уже доказано, что $\tilde{x}_1 = x_1, \tilde{x}_2 = x_2, \dots, \tilde{x}_{n-1} = x_{n-1}$, то, умножая скалярно обе части равенства (10) на x_j , будем иметь $0 = \beta_j^{(n)}$ ($j < n$), т. е. $\tilde{x}_n = \beta_n^{(n)} x_n$. А тогда, поскольку $\|\tilde{x}_n\| = \|x_n\| = 1$, имеем $\beta_n^{(n)} = 1$, следовательно, $\tilde{x}_n = x_n$.

Второе доказательство. Введем обозначения

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \dots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \dots & (y_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \dots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}, \quad \Delta_0 = 1 \text{ (определитель Грамма),}$$

$$x'_n = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \dots & (y_1, y_{n-1}) & y_1 \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \dots & (y_2, y_{n-1}) & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \dots & (y_n, y_{n-1}) & y_n \end{vmatrix},$$

попимая последний определитель как сумму произведений элементов последнего столбца на соответствующие алгебраические дополнения. Ясно, что

$$(x'_n, y_n) = \Delta_n, \quad (11)$$

$$(x'_n, y_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (12)$$

Последнее ввиду того, что в получающемся в левой части определителе будут два одинаковых столбца (k -й и n -й).

Если умножить (скалярно) последний столбец определителя x'_n на x_n , то, учитывая (11) и (12), получим определитель, в по-

следнем столбце которого все элементы, кроме последнего, будут равны нулю, а последний будет равен Δ_n . Разлагая полученный определитель по элементам последнего столбца, придем к соотношению

$$(x'_n, x'_n) = \Delta_n \Delta_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поскольку $x'_n \neq 0$ (в противном случае элементы $y_1, y_2, \dots, y_n$ были бы линейно зависимы), получаем, что $\Delta_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Отметим, наконец, что элемент x'_k ($k < n$) выражается линейно через $y_1, y_2, \dots, y_k$ и будет на основании (12) ортогонален x'_n .

Учитывая все сказанное, мы придем к требуемой ортонормальной последовательности, если положим

$$x_n = \frac{x'_n}{\|x'_n\|} = \frac{x'_n}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

5.6. Используем полученные результаты для построения системы ортогональных по весу полиномов.

В пространстве $L^2_{\Phi}(a, b)$ в качестве $\{y_n\}$ возьмем

$$y_n(t) = t^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

При ортогонализации этой последовательности получим последовательность $\{x_n\}$ такую, что

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} t^k, \quad \lambda_n^{(n)} \neq 0; \quad n = 0, 1, \dots,$$

причем

$$(x_m, x_n) = \int_a^b \Phi(t) x_m(t) \overline{x_n(t)} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Полиномы $x_n(t)$ называются *ортогональными с весом $\Phi(t)$* . Они играют большую роль в конструктивной теории функций. Поскольку система (14) полная, будет полной и система ортогональных полиномов.

Явное выражение для ортогональных полиномов может быть получено с помощью формулы (13). В этом случае

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0n} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n0} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}, \quad c_{jk} = \int_a^b \Phi(t) t^{j+k} dt, \quad j, k = 0, 1, \dots, n,$$

так что

$$x_n(t) = \frac{x'_n(t)}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} = \frac{\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0n-1} & 1 \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1n-1} & t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n0} & c_{n1} & \dots & c_{nn-1} & t^n \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Из этих формул, между прочим, видно, что полиномы x_n имеют вещественные коэффициенты,

Если $\varphi(t) \equiv 1$; $a = -1$, $b = 1$, то ортогональные полиномы называются *полиномами Лежандра* и обозначаются $P_n(t)$. Можно доказать, что

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2-1)^n], \quad n = 0, 1, \dots \quad (15)$$

В случае $\varphi(t) = (1-t)^{-\alpha}(1+t)^{\beta}$; $a = -1$, $b = 1$, получаем *полиномы Якоби*

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(t) = k_n (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t)^{\alpha+n} (1+t)^{\beta+n}], \quad (16)$$

где

$$k_n = (-1)^n \sqrt{2^{-(\alpha+\beta+2n+1)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)} \frac{\alpha+\beta+2n+1}{n!}}.$$

В частности, при $\alpha = \beta = -1/2$ приходим к *полиномам Чебышева*, часто встречающимся в различных вопросах теории функций.

При $\varphi(t) = e^{-t}$; $a = 0$, $b = \infty$; получаются *полиномы Лагерра*.

$$L_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} [e^{-t} t^n]. \quad (17)$$

Наконец, если $\varphi(t) = e^{-t^2}$; $a = -\infty$, $b = \infty$; то ортогональные полиномы, которые обозначаются в этом случае $H_n(t)$, называются *полиномами Эрмита*

$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} [e^{-t^2}]. \quad (18)$$

5.7. Дальнейшее изложение относится главным образом к сепарабельному гильбертову пространству. Рассматривая конкретные ортогональные системы в конкретных сепарабельных пространствах, мы видим, что все они счетны. Это обстоятельство не случайно. Именно, справедлива

Теорема 3. *Ортонормальная система $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) сепарабельного гильбертова пространства H не более чем счетна.*

Доказательство. Пусть D — счетное плотное в H множество. Для каждого x_α найдем $y_\alpha \in D$ такое, что

$$\|x_\alpha - y_\alpha\| < 1/2.$$

При этом различным элементам x_α и x_α отвечают различные элементы y_α и $y_{\alpha'}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|y_\alpha - y_{\alpha'}\|^2 &= \|(x_\alpha - x_{\alpha'}) + (x_{\alpha'} - y_{\alpha'}) + (y_{\alpha'} - x_{\alpha'})\|^2 \geq \\ &\geq \|x_\alpha - x_{\alpha'}\| - [\|x_{\alpha'} - y_{\alpha'}\| + \|y_{\alpha'} - x_{\alpha'}\|] > \sqrt{2} - 1 > 0, \end{aligned}$$

так как

$$\|x_\alpha - x_{\alpha'}\|^2 = (x_\alpha - x_{\alpha'}, x_\alpha - x_{\alpha'}) = (x_\alpha, x_\alpha) + (x_{\alpha'}, x_{\alpha'}) = 2.$$

Таким образом, множество $\{x_\alpha\}$ эквивалентно части счетного множества D , и потому само не более чем счетно.

*) Более полные сведения об ортогональных полиномах и, в частности, доказательства формул (15)–(18) читатель найдет в книге Натансон — I (см. также Сёге).

Дополнением доказанной теоремы служит следующая

Теорема 4. Если сепарабельное гильбертово пространство H бесконечномерно, то в нем существует полная счетная ортонормальная система.

Доказательство. Исходя из счетного плотного в H множества $D = \{z_n\}$, построим линейно независимую систему $\{y_k\}$, полную в H . Для этого, считая $z_1 \neq 0$, положим $y_1 = z_1$. Далее, в качестве y_2 возьмем элемент z_{n_2} с наименьшим номером $n_2 \geq 2$ такой, что y_1 и $y_2 = z_{n_2}$ линейно независимы. Продолжая так и дальше, придем к искомой системе $\{y_k\}$. Действительно, $\{y_k\}$ — полная система, так как любой элемент z_n есть, очевидно, линейная комбинация элементов $y_j = z_{n_j}$ ($n_j < n$), так что $D \subset \mathcal{L}(\{y_k\})$ и, следовательно, $\overline{\mathcal{L}(\{y_k\})} = H$.

Применяя в системе $\{y_k\}$ процесс ортогонализации, придем к полной ортонормальной и, очевидно, счетной системе.

5.8. Пусть в гильбертовом пространстве H дана ортонормальная система $\{x_k\}$. Пусть, далее, $x \in H$. Числа

$$a_k = (x, x_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

называются *коэффициентами Фурье* элемента x по данной ортонормальной системе, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

называется *рядом Фурье* элемента x .

Образуем подпространство $H_n = \mathcal{L}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$, элементы которого, таким образом, суть всевозможные линейные комбинации первых n элементов данной ортонормальной системы.

Имеет место

Теорема 5. Отрезок $s_n = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ ряда Фурье элемента x есть проекция элемента x на подпространство H_n .

Доказательство. Так как

$$x = s_n + (x - s_n)$$

и $s_n \in H_n$, то достаточно доказать, что $x - s_n \perp H_n$. Но ясно, что $x - s_n \perp x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а тогда на основании пункта с) из 5.4 $x - s_n \perp H_n$. Теорема доказана.

Используя заключение теоремы 1, получаем отсюда

Следствие 1. Какой бы элемент $z = \sum_{k=1}^n a_k x_k \in H_n$ ни взять,

$$\|x - s_n\| = \rho(x, H_n) \leq \|x - z\|.$$

Далее, поскольку

$$\|x\|^2 = \|s_n\|^2 + \|x - s_n\|^2 \geq \|s_n\|^2, \quad (19)$$

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2, \quad (20)$$

то справедливо и такое утверждение.

Следствие 2. *Имеет место неравенство (неравенство Бесселя):*

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|x\|^2. \quad (21)$$

Если для некоторого $x \in H$ в (21) имеет место знак равенства, то говорят, что для x *удовлетворено уравнение замкнутости*, или *выполнено равенство Парсеваля*.

Теорема 6. *Каков бы ни был элемент $x \in H$, его ряд Фурье всегда сходится, при этом сумма ряда Фурье есть проекция элемента x на подпространство $H_0 = \overline{\mathcal{P}(\{x_k\})}$.*

Для того чтобы сумма ряда Фурье была равна данному элементу x , необходимо и достаточно, чтобы для этого элемента удовлетворялось уравнение замкнутости.

Доказательство. Из неравенства (21) вытекает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится. Обозначая, как и раньше, через s_n частную сумму ряда Фурье, будем иметь

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

откуда и следует сходимость ряда Фурье.

Пусть $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$. Поскольку $s \in H_0$ и $x = s + (x - s)$, то, как и при доказательстве теоремы 5, можно ограничиться доказательством того, что $x - s \perp H_0$. Это проводится опять с использованием пункта с) из 5.4.

Если, наконец, учитывая равенство (20), переписать соотношение (19) в форме

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2,$$

то без труда убедимся в справедливости второй части теоремы.

Если система $\{x_k\}$ — полная, то $H_0 = H$ и проекция любого элемента $x \in H$ на H_0 совпадает с ним самим. Это приводит к такому факту.

Следствие 1. Если система $\{x_k\}$ — полная, то ряд Фурье для любого $x \in H$ сходится к x .

Ортонормальная система называется *замкнутой*, если для каждого $x \in H$ удовлетворено уравнение замкнутости.

Учитывая предыдущие результаты, можно сформулировать

Следствие 2. Для того чтобы система была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы она была полной.

Действительно, на основании теоремы 6 уравнение замкнутости удовлетворено для всех $x \in H_0$, и только для этих элементов, поэтому замкнутость системы равносильна равенству $H_0 = H$, которое, в свою очередь, означает полноту данной системы.

Замечание. Если уравнение замкнутости удовлетворено для фундаментального в H множества E , то данная ортонормальная система замкнута.

Действительно, поскольку $H_0 \supset E$, то $H_0 = \overline{\mathcal{P}(E)} = H$.

Итак, если $\{x_n\}$ — полная ортонормальная система в H , то любой элемент $x \in H$ представим своим рядом Фурье.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Поэтому полную ортонормальную систему называют *ортонормальным* (или *ортонормированным*) *базисом* гильбертова пространства H (ср. XII. 7.2).

Теорема 7 (Рисс — Фишер). Пусть имеется числовая последовательность $\{c_k\}$, для которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится, и зафиксирована ортонормальная система $\{x_k\}$ в H . Тогда существует единственный элемент $x \in H$ такой, что его коэффициенты Фурье $a_k = c_k$ ($k = 1, 2, \dots$), причем для x удовлетворено уравнение замкнутости.

Доказательство. Так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, убеждаемся, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ сходится. Обозначим его сумму через x . Тогда

$$a_n = (x, x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m c_k x_k, x_n \right) = c_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

так как для $m \geq n$ будет $\left(\sum_{k=1}^m c_k x_k, x_n \right) = c_n$. То, что для элемента x удовлетворено уравнение замкнутости, вытекает из предыдущей теоремы.

Единственность элемента x также следует из теоремы 6, так как элемент, для которого удовлетворено уравнение замкнутости, должен быть суммой своего ряда Фурье.

Укажем еще на обобщенное уравнение замкнутости. Пусть для элементов $x, y \in H$ удовлетворено уравнение замкнутости. Тогда, если $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ — соответственные последовательности коэффициентов Фурье этих элементов, то

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k. \quad (22)$$

В самом деле, на основании теоремы 6

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k;$$

поэтому

$$(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k, \sum_{k=1}^n b_k x_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k.$$

Если рассматриваемая ортонормальная система полная, то обобщенное уравнение замкнутости удовлетворено для любых $x, y \in H$.

Если в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве H имеется неполная ортонормальная система $\{x_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$), то в этом случае подпространство H_0 , натянутое на $\{x_k\}$, отлично от H . Обозначим через $\bar{H}$ ортогональное дополнение подпространства H_0 . Подпространство $\bar{H}$ является сепарабельным гильбертовым пространством, и поэтому в нем можно выделить полную ортонормальную не более, чем счетную систему $\{x_k\}$ ($k = 0, -1, -2, \dots$). Объединяя ее с имеющейся, получим систему $\{x_k\}$ ($k = \dots -1, 0, 1, \dots$), которая будет полна во всем пространстве H . Действительно, всякий элемент $y \in H$, ортогональный всем x_k ($k = \dots -1, 0, 1, \dots$), должен быть ортогонален и подпространству H_0 , т. е. должно быть $y \in \bar{H}$. Тогда, поскольку $\{x_k\}$ ($k = 0, -1, \dots$) — полная в $\bar{H}$ система, имеем $y = 0$.

Отметим два факта из теории функций вещественной переменной, доказательство которых получаются на основании приведенных выше общих результатов.

Поскольку в пространстве $L^2(a, b)$ тригонометрическая система — полная, то на основании следствия 1 к теореме 6 всякая функция, суммируемая с квадратом, разлагается в ряд Фурье (тригонометрический), сходящийся в среднем (с показателем 2).

Из теоремы Рисса — Филлера и неравенства (21) вытекает также, что для того, чтобы данная суммируемая функция являлась элементом пространства L^2 , необходимо и достаточно, чтобы ряд из квадратов модулей ее коэффициентов Фурье по тригонометрической системе сходиллся.

Интересно, что для других классов функций доказательство подобных результатов представляет большие трудности.

5.9. В заключение докажем, что любые два сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства линейно изометричны (см. 1.3), точнее говоря, между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции и скалярное произведение (а тем самым и норму). Пусть H и H' — пространства указанного вида. На основании теоремы 4 существуют счетные полные ортонормальные системы $\{x_k\}$ — в H , и $\{x'_k\}$ — в H' . Пусть $x \in H$ — произвольный элемент. Обозначим через $\{a_k\}$ последовательность коэффициентов Фурье этого элемента. Тогда по следствию 1 к теореме 6

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

причем в силу неравенства (21) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$. Применим (в пространстве H') теорему Рисса — Фишера к последовательности $\{a_k\}$, найдем элемент $x' \in H'$, имеющий те же коэффициенты Фурье, что и элемент x . При этом

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x'_k.$$

Элемент x' и соотнесем данному элементу x . Указанное соответствие удовлетворяет всем условиям из 1.3 (вместо равенства норм здесь нужно говорить о равенстве скалярных произведений соответствующих элементов). Не останавливаясь, вследствие ее простоты, на проверке сохранения алгебраических операций, покажем, что если $x, y \in H$ и $x', y' \in H'$ — соответствующие им элементы из H' , то $(x, y) = (x', y')$. Действительно, поскольку обе системы $\{x_k\}$ и $\{x'_k\}$ — полные, то для элементов x, y и, равным образом, x', y' удовлетворено обобщенное уравнение замкнутости (22), т. е.

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k, \quad (x', y') = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}'_k$$

где $\{a_k\}$ означает последовательность коэффициентов Фурье элемента x (и x'), а $\{b_k\}$ — элемента y (и y').

В частности, каждое сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство H линейно изометрично (в указанном выше смысле) пространству l^2 . Этот результат был установлен в статье Неймана [1].

Отметим без доказательства аналогичный результат для произвольных гильбертовых пространств. Именно, можно доказать, что мощность полной ортонормальной системы является инвариантом пространства (размерность пространства) и что пространства одинаковой размерности линейно изометричны. По поводу доказательства этого факта см., например, А х и с з е р, Г л а з м а н.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

§ 1. Пространство операторов и сопряженное пространство

1.1. Так как, кроме линейных операторов, нам иногда будет пужно рассматривать и нелинейные операторы, то в этом пункте мы введем обозначения, охватывающие оба эти случая.

Пусть X и Y — два пространства (метрические или нормированные) и множество $\Omega \subset X$.

Если каждому $x \in \Omega$ сопоставлен элемент $y = U(x) \in Y$, то говорят, что на Ω определен *оператор* U , переводящий (отображающий) Ω в Y (или из Ω в Y). Множество Ω называется *областью определения* оператора U и обозначается Ω_U . Множество Δ_U всех элементов вида $y = U(x)$ называется *областью значений* оператора U *). Если $\Omega_U = X$, а $\Delta_U \subset X$, т. е. если оператор U отображает X в себя, то мы будем говорить, что U — оператор в X .

Если U — оператор из $\Omega \subset X$ в Y , то через $U(E)$ ($E \subset \Omega$) мы будем обозначать множество всех элементов $y \in Y$, представимых в виде $y = U(x)$, где $x \in E$. При этом мы будем называть множество $U(E)$ *образом* множества E .

Напомним определения важнейших классов операторов.

а) Пусть X и Y — метрические пространства и U — оператор из $\Omega \subset X$ в Y . U называется *непрерывным в точке* $x_0 \in \Omega$, если при $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \in \Omega$) будет $U(x_n) \rightarrow U(x_0)$. Если U непрерывен в каждой точке множества $E \subset \Omega$, то говорят просто, что U *непрерывен на* E .

б) Если X и Y — нормированные пространства и Ω — линейное множество, содержащееся в X , то оператор U из Ω в Y называется *однородным*, если

$$U(\lambda x) = \lambda U(x), \quad x \in \Omega, \lambda \in K.$$

U называется *аддитивным*, если

$$U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2), \quad x_1, x_2 \in \Omega.$$

*) Часто вместо $U(x)$ пишут Ux , а вместо термина «оператор» в случае линейных операторов употребляют слово «отображение».

в) U называется *линейным* оператором, если он аддитивен и однороден на Ω_U .

Отметим, что если X и Y — нормированные пространства и U — аддитивный оператор из $\Omega \subset X$ в Y , непрерывный в некоторой точке $x_0 \in \Omega$, то U непрерывен на Ω , т. е. в каждой точке множества Ω .

В самом деле, пусть $x_n \rightarrow x$ ($x, x_n \in \Omega$). Так как

$$\begin{aligned} x_n &= [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0), \\ x_0 + (x_n - x) &\rightarrow x_0, \end{aligned}$$

то

$$U(x_n) = U(x_0 + (x_n - x)) + U(x - x_0) \rightarrow U(x_0) + U(x - x_0) = U(x).$$

1.2. Укажем критерий непрерывности линейного оператора.

Линейный оператор U , переводящий нормированное пространство X в нормированное пространство Y , называется *ограниченным*, если существует такая постоянная C , что для всех $x \in X$

$$\|U(x)\| \leq C\|x\|. \quad (1)$$

Теорема 1. Для того чтобы линейный оператор U был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.

Доказательство. Необходимость. Пусть U — линейный непрерывный оператор. Докажем, что

$$C_0 = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X}} \|U(x)\| < \infty.$$

Если бы оказалось $C_0 = \infty$, то нашлась бы такая последовательность $\{x_n\}$ ($x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$), что $\lambda_n = \|U(x_n)\| \rightarrow \infty$. Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$ ($x'_n = x_n/\lambda_n$). Ясно, что $x'_n \rightarrow 0$; поэтому по непрерывности U должно быть $U(x'_n) \rightarrow 0$, тогда как в действительности $\|U(x'_n)\| = 1$.

Пусть теперь $x \neq 0$ — произвольный элемент из X . Полагая $x' = x/\|x\|$, видим, что $\|x'\| = 1$. Следовательно, $\|U(x')\| \leq C_0$. Но по однородности оператора $U(x') = \frac{1}{\|x\|} U(x)$, так что

$$\|U(x)\| \leq C_0\|x\|$$

и (1) выполнено с $C = C_0$.

Достаточность. Из условия (1) непосредственно вытекает непрерывность оператора U в точке 0. Согласно 1.1 U будет непрерывным в каждой точке пространства X .

Теорема доказана.

Покажем, что C_0 является наименьшей постоянной, удовлетворяющей неравенству (1). Действительно, если $\|x\| = 1$, то $\|U(x)\| \leq C$ и, следовательно, $C_0 \leq C$. С другой стороны, C_0 удовлетворяет неравенству (1).

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что

$$C_0 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|U(x)\|.$$

В самом деле, очевидно, $C_0 \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|U(x)\|$. Вместе с тем для $x \in X$ ($\|x\| \leq 1$, $x \neq 0$) имеем $\|U(x)\| = \|x\| \left\| U\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq C_0$, что приводит к противоположному неравенству.

Определяемое оператором U число C_0 называется *нормой* линейного оператора U и обозначается $\|U\|$ *). Согласно сказанному выше

$$\|U\| = C_0 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|U(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|U(x)\|.$$

Из (1), беря $C = C_0 = \|U\|$, получим

$$\|U(x)\| \leq \|U\| \|x\|.$$

Отметим еще, что если установлено неравенство типа (1) с некоторым C , то $\|U\| \leq C$.

Обратим внимание, наконец, на простое геометрическое значение числа $\|U\|$ — это верхняя грань коэффициента растяжения вектора при преобразовании, осуществляемом оператором U .

1.3. Рассмотрим два нормированных пространства X и Y . Совокупность $L(X, Y)$ всевозможных линейных операторов, переводящих X в Y , является векторным пространством (II.2.1). Через $B(X, Y)$ обозначим множество всех линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y . Мы сейчас проверим, что $B(X, Y)$ — линейное подмножество в $L(X, Y)$ и норма оператора $\|U\|$ является нормой на $B(X, Y)$, т. е. $B(X, Y)$ — нормированное пространство.

Если $U_1, U_2 \in B(X, Y)$, $U = U_1 + U_2$, то

$$\|U(x)\| \leq \|U_1(x)\| + \|U_2(x)\| \leq (\|U_1\| + \|U_2\|) \|x\|.$$

Следовательно, $U \in B(X, Y)$ и $\|U\| \leq \|U_1\| + \|U_2\|$.

Если $U \in B(X, Y)$, $\lambda \in K$, $\bar{U} = \lambda U$, то $\|\bar{U}\| = \|\lambda U\| = |\lambda| \|U\|$. Ясно, что из $\|U\| = 0$ следует $\|U(x)\| = 0$ при любом $x \in X$. Следовательно, $U = 0$. Таким образом, мы доказали, что $B(X, Y)$ — нормированное пространство.

Докажем, что если Y — пространство образов — полное, то будет полным и пространство $B(X, Y)$.

В самом деле, пусть $\{U_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов пространства $B(X, Y)$. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$,

*) Норма оператора в гильбертовом пространстве определена впервые Гильбертом (см. Г и л ь б е р т). Общее определение см. Банах [1].

Понятия линейного и непрерывного оператора и функционала вводились до этого многими авторами.

будем иметь

$$\|U_m - U_n\| < \varepsilon, \quad m, n \geq N_\varepsilon,$$

т. е. для любого $x \in X$

$$\|U_m(x) - U_n(x)\| < \varepsilon \|x\|, \quad (2)$$

откуда следует, что последовательность $\{U_n(x)\}$ элементов пространства Y сходится в себе, и поэтому в силу полноты пространства Y существует

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x), \quad x \in X.$$

Ясно, что $U \in L(X, Y)$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в неравенстве (2), получим

$$\|U(x) - U_n(x)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|U_m(x) - U_n(x)\| \leq \varepsilon \|x\|, \quad n \geq N_\varepsilon, \quad (3)$$

т. е. оператор $V(x) = U(x) - U_n(x)$, $x \in X$, является элементом пространства $B(X, Y)$. Тогда и $U = V + U_n \in B(X, Y)$. При этом из (3) следует

$$\|U - U_n\| \leq \varepsilon, \quad n \geq N_\varepsilon,$$

что и означает, что $U_n \rightarrow U$ в пространстве $B(X, Y)$.

Изложенное выше приводит к следующей теореме.

Теорема 2. Если X — нормированное пространство, а Y — B -пространство, то $B(X, Y)$ — B -пространство.

Так как пространство скаляров K полно, то пространство всех линейных непрерывных функционалов $B(X, K)$, обозначаемое далее X^* , является B -пространством. Это B -пространство X^* называется сопряженным к нормированному пространству X . Если $f \in X^*$, то

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Напомним (II.2.2), что если рассматриваемое пространство X комплексное, то умножение на комплексные числа в X^* определяется формулой

$$(\lambda f)(x) = \bar{\lambda} f(x), \quad f \in X^*, \quad x \in X. \quad (4)$$

Обоснование целесообразности определения по формуле (4) будет приведено ниже (см. 3.2).

§ 2. Некоторые функционалы и операторы в конкретных пространствах

2.1. Рассмотрим следующий функционал в пространстве $C[a, b]$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k x(t_k), \quad (4)$$

где $t_1, t_2, \dots, t_n$ — некоторая система точек промежутка $[a, b]$. Примерами таких функционалов являются отдельное значение функции в фиксированной точке, конечные разности функции, сумма Римана, взвешенная сумма по некоторой системе узлов.

Покажем, что функционал f , определяемый равенством (1), линеен, причем

$$\|f\| = \sum_{k=1}^n |c_k|. \quad (2)$$

Линейность f очевидна:

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + \mu x_2) &= \sum_{k=1}^n c_k [\lambda x_1(t_k) + \mu x_2(t_k)] = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \lambda x_1(t_k) + \sum_{k=1}^n c_k \mu x_2(t_k) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2). \end{aligned}$$

Далее, из неравенства

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^n c_k x(t_k) \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \sum_{k=1}^n |c_k| = \sum_{k=1}^n |c_k| \|x\|$$

ясна непрерывность f и то, что

$$\|f\| \leq \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

Построим теперь в промежутке $[a, b]$ кусочно-линейную функцию $\tilde{x}$, принимающую в точках $t_1, t_2, \dots, t_n$ значения

$$\tilde{x}(t_k) = \text{sign } c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

линейную в промежутках $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) и постоянную в промежутках $[a, t_1]$ и $[t_n, b]$.

Ясно, что $|\tilde{x}(t)| \leq 1$, т. е. $\|\tilde{x}\| \leq 1$. А тогда

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \geq f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^n c_k \tilde{x}(t_k) = \sum_{k=1}^n c_k \text{sign } c_k = \sum_{k=1}^n |c_k|,$$

что вместе с имеющимся противоположным неравенством и дает (2).

2.2. Рассмотрим функционал в пространстве $C[a, b]$, определенный равенством

$$f(x) = \int_a^b \varphi(t) x(t) dt, \quad (3)$$

где φ — данная суммируемая функция.

Примерами таких функционалов могут служить интеграл функции по всему промежутку $[a, b]$ или по частичному промежутку, моменты функции, коэффициенты Фурье ее и т. п.

Покажем, что функционал (3) линейный и

$$\|f\| = \int_a^b |\varphi(t)| dt. \quad (4)$$

То, что функционал f определен для всех $x \in C[a, b]$ и даже для $x \in L^\infty(a, b)$ и линеен, очевидно. Из неравенства

$$|f(x)| \leq \int_a^b |\varphi(t) x(t)| dt \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \int_a^b |\varphi(t)| dt = \|x\| \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

вытекает его непрерывность и оценка для нормы:

$$\|f\| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

Устанавливая противоположное неравенство, рассмотрим сначала случай, когда функция φ непрерывна. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и разобьем промежуток $[a, b]$ на части точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ так, чтобы колебание функции φ в каждом из промежутков $[t_k, t_{k+1}]$ было меньше ε . Все частичные промежутки распределим на две группы. В первую группу отнесем промежутки $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_r$ такие, что все значения функции φ в любом из этих промежутков одного знака (который может меняться от промежутка к промежутку). Остальные промежутки $\Delta''_1, \Delta''_2, \dots, \Delta''_s$ поместим во вторую группу. Отметим, что поскольку значения функции φ меняют знак в промежутке Δ''_k ($k = 1, 2, \dots, s$), то имеется значение, равное нулю; учитывая, что колебание функции φ в каждом частичном промежутке меньше ε , получаем

$$|\varphi(t)| < \varepsilon, \quad t \in \Delta''_k; \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

Определим теперь функцию $\tilde{x} \in C[a, b]$. Для промежутков первой группы полагаем

$$\tilde{x}(t) = \text{sign } \varphi(t), \quad t \in \Delta'_j; \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

В остальных точках промежутка $[a, b]$ считаем функцию линейной. При этом, если a (или b) является концом промежутка второй группы, считаем $\tilde{x}(a) = 0$ (соответственно $\tilde{x}(b) = 0$).

Оценим снизу величину

$$f(\tilde{x}) = \int_a^b \varphi(t) \tilde{x}(t) dt.$$

Принимая во внимание, что $|\tilde{x}(t)| \leq 1$ ($a \leq t \leq b$), получим

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(t) \tilde{x}(t) dt &= \sum_{j=1}^r \int_{\Delta_j'} \varphi(t) \tilde{x}(t) dt + \sum_{k=1}^s \int_{\Delta_k''} \varphi(t) \tilde{x}(t) dt \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^r \int_{\Delta_j'} |\varphi(t)| dt - \sum_{k=1}^s \int_{\Delta_k''} |\varphi(t)| dt = \\ &= \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2 \sum_{k=1}^s \int_{\Delta_k''} |\varphi(t)| dt > \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2\varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Тем более, поскольку $\|\tilde{x}\| \leq 1$,

$$\|f\| \geq f(\tilde{x}) > \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2\varepsilon(b-a).$$

Устремляя здесь $\varepsilon \rightarrow 0$, приходим к нужному неравенству.

Будем теперь считать φ произвольной суммируемой функцией. Так как множество всех непрерывных функций плотно в пространстве L^1 , можно найти непрерывную функцию $\tilde{\varphi}$ такую, что

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{L^1} = \int_a^b |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| dt < \varepsilon.$$

По функции $\tilde{\varphi}$ построим функцию $\tilde{x} \in C[a, b]$ с $\|\tilde{x}\| \leq 1$, как описано выше, т. е. так, что

$$\int_a^b \tilde{\varphi}(t) \tilde{x}(t) dt \geq \int_a^b |\tilde{\varphi}(t)| dt - 2\varepsilon(b-a) = \|\tilde{\varphi}\|_{L^1} - 2\varepsilon(b-a).$$

Но

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L^1} \geq \|\varphi\|_{L^1} - \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{L^1} > \|\varphi\|_{L^1} - \varepsilon,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= \int_a^b \varphi(t) \tilde{x}(t) dt = \int_a^b \tilde{\varphi}(t) \tilde{x}(t) dt + \int_a^b [\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)] \tilde{x}(t) dt > \\ &> \|\varphi\|_{L^1} - \varepsilon - 2\varepsilon(b-a) - \int_a^b |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| dt > \|\varphi\|_{L^1} - 2\varepsilon(b-a+1). \end{aligned}$$

Как и выше, заключаем отсюда, что

$$\|f\| \geq f(\tilde{x}) > \|\varphi\|_{L^1} - 2\varepsilon(b-a+1),$$

так что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|f\| \geq \| \varphi \|_{L^1},$$

что и требовалось доказать.

2.3. Функционал вида (3) можно рассматривать и в пространстве $L^p(a, b)$. Более общим образом, пусть (T, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой. Докажем*), что

$$f(x) = \int_T x(t) y(t) d\mu, \quad (5)$$

где $y \in L^q(T, \Sigma, \mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$), является линейным непрерывным функционалом в пространстве $L^p(T, \Sigma, \mu)$, причем

$$\|f\| = \|y\|_{L^q} = \begin{cases} \left[\int_T |y(t)|^q d\mu \right]^{1/q}, & 1 < p \leq \infty, \\ \text{vrai sup}_{t \in T} |y(t)|, & p = 1. \end{cases} \quad (6)$$

1) Рассмотрим сначала случай $1 < p < \infty$. Интеграл (5) определен для всех $x \in L^p$. Это следует из интегрального неравенства Гёльдера (см. IV.2.3). С помощью этого же неравенства находим

$$|f(x)| = \left| \int_T x(t) y(t) d\mu \right| \leq \left[\int_T |y(t)|^q d\mu \right]^{1/q} \left[\int_T |x(t)|^p d\mu \right]^{1/p} = \|y\|_{L^q} \|x\|,$$

следовательно,

$$\|f\| \leq \|y\|_{L^q}. \quad (7)$$

Чтобы доказать противоположное неравенство, рассмотрим функцию

$$\tilde{x}(t) = |y(t)|^{q-1} \text{sign } y(t).$$

Так как

$$|\tilde{x}(t)|^p = |y(t)|^{p(q-1)} = |y(t)|^q,$$

то $\tilde{x} \in L^p$; при этом

$$\|x\| = \left[\int_T |\tilde{x}(t)|^p d\mu \right]^{1/p} = \left[\int_T |y(t)|^q d\mu \right]^{1/q \cdot q/p} = [\|y\|_{L^q}]^{q/p},$$

вследствие чего имеем

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq f\left(\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\right) = \frac{1}{\|\tilde{x}\|} \int_a^b y(t) \tilde{x}(t) d\mu = \frac{1}{\|\tilde{x}\|} \int_a^b |y(t)|^q d\mu = \\ &= [\|y\|_{L^q}]^{q(1-1/p)} = \|y\|_{L^q}. \end{aligned}$$

Вместе с (7) это и дает требуемое равенство.

*) Впоследствии будет доказано, что функционалы, представимые в форме (5), исчерпывают множество линейных функционалов в пространстве L^p ($1 \leq p < \infty$); т. е. что (5) является общей формой линейного функционала в L^p (см. гл. VI, § 2).

2) Пусть теперь $p = 1$. Обозначим

$$\|y\|_{L^\infty} = \text{vrai sup}_{t \in T} |y(t)| = Q.$$

Неравенство $\|f\| \leq Q$ очевидно. С другой стороны, взяв $\varepsilon > 0$, обозначим через A множество

$$A = \{t \in T: |y(t)| > Q - \varepsilon\}.$$

Отметим, что $\mu(A) > 0$. Определим функцию

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \text{sign } y(t), & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{x} \in L^1$ и $\|\tilde{x}\| = \int_a^b |\tilde{x}(t)| d\mu = \mu(A)$. Далее

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq f\left(\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\right) = \frac{1}{\mu(A)} \int_T y(t) \tilde{x}(t) d\mu = \\ &= \frac{1}{\mu(A)} \int_A |y(t)| d\mu \geq \frac{1}{\mu(A)} [Q - \varepsilon] \mu(A) = Q - \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду произвольности ε имеем: $\|f\| \geq Q$, что вместе с предыдущим приводит к равенству $\|f\| = Q$.

3) Пусть, наконец, $p = \infty$. Неравенство $\|f\| \leq \|y\|_{L^1}$ очевидно. С другой стороны, функция $\tilde{x}(t) = \text{sign } y(t)$ входит в L^∞ и $\|\tilde{x}\|_{L^\infty} \leq 1$. Из неравенства

$$\|f\| \geq |f(\tilde{x})| = \int_T \text{sign } y(t) \cdot y(t) d\mu = \int_T |y(t)| d\mu = \|y\|_{L^1}$$

получаем $\|f\| \geq \|y\|_{L^1}$ и, окончательно, $\|f\| = \|y\|_{L^1}$.

Замечание. Если рассматривается комплексное пространство L^p , то целесообразнее функционал (5) записывать в форме

$$f(x) = \int_T x(t) \overline{y(t)} d\mu.$$

Формула (6) при этом, очевидно, сохраняется (ср. 1.3).

2.4. Рассмотрим интегральный оператор $y = U(x)$, заданный равенством

$$y(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt, \quad (8)$$

где $K(s, t)$ — непрерывная функция. В качестве примера операторов вида (8) можно привести интегралы Дирихле и Фейера. Покажем, что U — непрерывный линейный оператор из прост-

пространства $C[a, b]$ в $C[a, b]$, причем

$$\|U\| = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)| dt = M. \quad (9)$$

Линейность оператора (8) очевидна, а из неравенства

$$\|U(x)\| = \max_{a \leq s \leq b} \left| \int_a^b K(s, t) x(t) dt \right| \leq \|x\| \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)| dt = M \|x\|$$

следует его непрерывность и тот факт, что $\|U\| \leq M$. Установим неравенство противоположного знака. Так как интеграл

$$\int_a^b |K(s, t)| dt$$

представляет собой непрерывную функцию от s , то существует такое $s_0 \in [a, b]$, что

$$M = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)| dt = \int_a^b |K(s_0, t)| dt.$$

Рассмотрим функционал в пространстве $C[a, b]$ типа (3) с $\varphi(t) = K(s_0, t)$, т. е.

$$f(x) = \int_a^b K(s_0, t) x(t) dt, \quad x \in C[a, b].$$

По предыдущему (см. 2.2) можно найти такой элемент $\tilde{x} \in C[a, b]$ с $\|\tilde{x}\| \leq 1$, что

$$f(\tilde{x}) \geq \|f\| - \varepsilon = \int_a^b |K(s_0, t)| dt - \varepsilon = M - \varepsilon.$$

Полагая тогда $\tilde{y} = U(\tilde{x})$, имеем, очевидно,

$$\|U\| \geq \|U(\tilde{x})\| = \|\tilde{y}\| \geq \tilde{y}(s_0) = \int_a^b K(s_0, t) \tilde{x}(t) dt = f(\tilde{x}) \geq M - \varepsilon,$$

и ввиду произвольности ε получаем (9).

2.5. Покажем, что интегральный оператор (8) может рассматриваться и как линейный оператор из пространства $L^1(a, b)$ в $L^1(a, b)$; однако в этом случае

$$\|U\| = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(s, t)| ds = M'. \quad (10)$$

Аддитивность U и здесь очевидна. Используя же теорему Фубини о возможности перестановки порядка интегрирования,

получаем неравенство

$$\|U(x)\| = \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t) x(t) dt \right| ds \leq \int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)| ds \right] |x(t)| dt \leq M' \|x\|,$$

так что

$$\|U\| \leq M'.$$

Далее, как и выше, подберем $t_0 \in [a, b]$ так, чтобы

$$M' = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(s, t)| ds = \int_a^b |K(s, t_0)| ds,$$

и затем, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдем, исходя из равномерной непрерывности функции $K(s, t)$, такое $\delta > 0$, что

$$|K(s', t') - K(s, t)| < \varepsilon,$$

как только $|s' - s| < \delta$, $|t' - t| < \delta$. Окружим точку t_0 промежутком $d = [t_1, t_2]$ ($a \leq t_1 \leq t_0 \leq t_2 \leq b$) так, чтобы длина его была меньше δ ($t_2 - t_1 < \delta$). Положим теперь

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_2 - t_1}, & t \in d, \\ 0, & t \notin d, \end{cases} \quad \|\tilde{x}\| = 1.$$

Обозначая $\tilde{y} = U(\tilde{x})$, найдем

$$\begin{aligned} \|U\| &\geq \|U(\tilde{x})\| = \|\tilde{y}\| = \int_a^b |\tilde{y}(s)| ds = \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t) \tilde{x}(t) dt \right| ds = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, t) dt \right| ds \geq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, t_0) dt \right| ds = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \left[\int_{t_1}^{t_2} |K(s, t) - K(s, t_0)| dt \right] ds = M' - \varepsilon(b - a), \end{aligned}$$

что и даст (10).

Читатель без труда убедится, что если тот же оператор (8) рассматривать как оператор из пространства $L^1(a, b)$ в $C[a, b]$, то

$$\|U\| = \max_{\substack{a \leq s \leq b \\ a \leq t \leq b}} |K(s, t)|.$$

2.6. Рассмотрим теперь интегральный оператор (8) как оператор из пространства $L^2(a, b)$ в $L^2(a, b)$. При этом ослабим требование, накладываемое на ядро $K(s, t)$ этого оператора. Именно,

не предполагая его непрерывным, будем считать, что оно измеримо на квадрате и

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt = N^2 < \infty. \quad (11)$$

Докажем, что при этом условии выражение (8) определяет непрерывный оператор из L^2 в L^2 , причем

$$\|U\| \leq N. \quad (12)$$

Непрерывность оператора (8) и оценка (12) для нормы получаются как следствие неравенства Буняковского:

$$\begin{aligned} \|U(x)\|^2 &= \\ &= \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t) x(t) dt \right|^2 ds \leq \int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \int_a^b |x(t)|^2 dt \right] ds = N^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Докажем, что в случае симметричного ядра ($K(s, t) = K(t, s)$) имеет место точное равенство

$$\|U\| = 1/|\lambda_1|, \quad (13)$$

где λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое значение ядра $K(s, t)$. Если же ядро несимметрично, то норма оператора U выражается более сложно, именно

$$\|U\| = 1/\sqrt{\Lambda_1}, \quad (14)$$

где Λ_1 — наименьшее собственное значение ядра

$$K^*(s, t) = \int_a^b K(\tau, s) K(\tau, t) d\tau.$$

Для установления равенств (13) и (14) нам придется воспользоваться некоторыми сведениями из теории интегральных уравнений*). Как известно, интегральное уравнение с симметричным ядром имеет полную систему (нормированных) фундаментальных функций и характеристических значений: $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, ..., λ_1 , λ_2 , ... — совокупность линейно независимых решений однородного уравнения и тех λ , при которых однородное уравнение имеет отличные от нуля решения:

$$\omega_k(s) = \lambda_k \int_a^b K(s, t) \omega_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Согласно теореме Гильберта — Шмидта**) всякая функция, представимая через ядро, в частности, $y(s)$ — значение оператора,

*) См., например, Петровский.
**) См. так же.

разлагается в сходящийся в среднем (в L^2) ряд по собственным функциям:

$$y(s) = \sum_k \frac{h_k}{\lambda_k} \omega_k(s), \quad h_k = \int_a^b x(t) \omega_k(t) dt; \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда (ср. теорему IV.5.6)

$$\|y\|^2 = \int_a^b |y(s)|^2 ds = \sum_k \frac{h_k^2}{\lambda_k^2} \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_k h_k^2 \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \|x\|^2.$$

Это показывает, что $\|U\| \leq 1/|\lambda_1|$. Беря $\tilde{x} = \omega_1$, будем иметь $\tilde{y} = U(\tilde{x}) = \tilde{x}/\lambda_1$, а потому

$$\|U\| \geq \|U(\tilde{x})\| = \frac{1}{|\lambda_1|} \|\tilde{x}\| = \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

Этим установлено (13).

Переходим к случаю произвольного ядра. Имеем, используя теорему Фубини,

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \int_a^b |y(s)|^2 ds = \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) x(t) dt \int_a^b K(s, \tau) x(\tau) d\tau \right] ds = \\ &= \int_a^b x(\tau) d\tau \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) K(s, \tau) ds \right] x(t) dt = \\ &= \int_a^b \int_a^b K^*(t, \tau) x(t) x(\tau) dt d\tau. \end{aligned}$$

Обозначая через Λ_k , $\Omega_k(t)$ характеристические числа и фундаментальные функции ядра $K^*(t, \tau)$, найдем, пользуясь опять теоремой Гильберта — Шмидта,

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \int_a^b x(\tau) d\tau \int_a^b K^*(t, \tau) x(t) dt = \\ &= \int_a^b x(\tau) d\tau \sum_k \frac{H_k}{\Lambda_k} \Omega_k(\tau) = \sum_k \frac{H_k^2}{\Lambda_k} \leq \frac{1}{\Lambda_1} \|x\|^2, \\ H_k &= \int_a^b x(t) \Omega_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\|U\| \leq 1/\sqrt{\Lambda_1}$; так же, как в предыдущем случае, беря $\tilde{x} = \Omega_1$, убеждаемся, что имеет место знак равенства, т. е. справедливо (14).

2.7. Аналогичные рассуждения позволяют определить норму оператора U и в случае, когда в (8) имеется внеинтегральный член. Пусть

$$y = U(x), \quad y(s) = x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t) dt. \quad (15)$$

Ограничимся случаем симметричного ядра. Опять применим теорему Гильберта — Шмидта, дополнив предварительно систему фундаментальных функций до полной некоторыми функциями $\omega_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}, \dots$. Функция x будет иметь по этой системе коэффициенты Фурье, которые мы обозначим $\dots, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, \dots$. У функции y будут коэффициенты Фурье

$$\begin{aligned} \eta_k &= \int_a^b y(s) \omega_k(s) ds = \\ &= \int_a^b \left[x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t) dt \right] \omega_k(s) ds = h_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots; \\ \eta_k &= h_k, \quad k = 0, -1, -2, \dots \end{aligned}$$

Отметим, что во всех случаях можно пользоваться первой из этих формул, считая $\lambda_k = \infty$ для $k = 0, -1, -2, \dots$. В результате получим

$$\|y\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^2 \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|^2 \leq L^2 \sum |h_k|^2 = L^2 \|x\|^2,$$

где обозначено

$$L = \sup_k \left| 1 - \lambda/\lambda_k \right|.$$

Очевидно,

$$\|U\| = L.$$

2.8. Рассмотрим теперь операторы в конечномерных пространствах. Пусть X и Y — конечномерные B -пространства размерности m и n соответственно. Пусть U — линейный оператор, переводящий X в Y . Обозначим через e_k ($k = 1, 2, \dots, m$) элемент пространства X , все координаты которого равны нулю, кроме k -й, равной единице. Аналогичный смысл имеет элемент $g_k \in Y$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Если $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in X$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in Y$, то

$$x = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k, \quad y = \sum_{k=1}^n \eta_k g_k.$$

Поэтому если $y = U(x)$, то

$$y = \sum_{k=1}^m \xi_k U(e_k).$$

Обозначая координаты элемента $U(e_k)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) через $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$, получим отсюда

$$\|y\| = \sum_{j=1}^n \eta_j g_j = \sum_{k=1}^m \xi_k \sum_{j=1}^n a_{jk} g_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{jk} \xi_k \right) g_j.$$

Следовательно, ввиду линейной независимости элементов $g_1, g_2, \dots, g_n$

$$\eta_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} \xi_k, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

т. е. координаты элемента $y = U(x)$ получаются из координат элемента x преобразованием с помощью матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Обратно, всякая матрица такого вида определяет линейный оператор из X в Y , в чем мы предоставляем убедиться читателю самостоятельно*). Норма оператора U зависит от того, какой метрикой мы будем пользоваться в пространствах X и Y .

а) Рассматриваем U как оператор из l_m^∞ в l_n^∞ (см. IV.3.5). Тогда

$$\|y\| = \|U(x)\| = \max_j |\eta_j| \leq \max_j \sum_{k=1}^m |a_{jk}| |\xi_k| \leq \|x\| \max_j \sum_{k=1}^m |a_{jk}|,$$

т. е.

$$\|U\| \leq \max_j \sum_{k=1}^m |a_{jk}| = L.$$

Выберем j_0 так, чтобы

$$\sum_{k=1}^m |a_{j_0 k}| = L,$$

и построим $\tilde{x} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_m)$, полагая

$$\tilde{\xi}_k = \text{sign } a_{j_0 k}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда

$$\|U\| \geq \|U(\tilde{x})\| = \max_j \left| \sum_{k=1}^m a_{jk} \tilde{\xi}_k \right| \geq \sum_{k=1}^m a_{j_0 k} \tilde{\xi}_k = \sum_{k=1}^m |a_{j_0 k}| = L.$$

*) Таким образом, все линейные операторы, действующие между конечномерными B -пространствами, непрерывны.

Итак,

$$\|U\| = L = \max_j \sum_{k=1}^m |a_{jk}|.$$

б) Если U рассматривать как оператор из l_m^1 в l_n^1 (см. IV.3.5), то

$$\|U\| = \max_k \sum_{j=1}^n |a_{jk}| = L'. \quad (16)$$

Действительно, то, что $\|U\| \leq L'$, очевидно. Далее, имеется такое k_0 , что

$$\sum_{j=1}^n |a_{jk_0}| = L'.$$

Достаточно теперь взять $\tilde{x} = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ (единица стоит на k_0 -м месте). Тогда

$$\|U\| \geq \|U(\tilde{x})\| = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^m a_{jk} \tilde{x}_k \right| = \sum_{j=1}^n |a_{jk_0}| = L',$$

так что $\|U\| = L'$.

с) Рассмотрим тот же оператор, считая пространства евклидовыми, т. е. $X = l_m^2$, $Y = l_n^2$. Тогда, если $m = n$ и матрица A симметрична,

$$\|U\| = |\lambda_1|.$$

При этом λ_1 — наибольшее по модулю собственное значение матрицы A .

В общем случае

$$\|U\| = \sqrt{\Lambda_1},$$

где Λ_1 — наибольшее по модулю собственное значение матрицы A^*A' (A^* — эрмитово сопряженная матрица)*).

Разберем сначала первый случай. Матрица A имеет вещественные собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и линейно независимые собственные векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые можно считать нормированными и попарно ортогональными. Если $x = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$, то

$$\begin{aligned} y = U(x) &= U(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) = c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 + \dots + c_n\lambda_nx_n, \\ \|y\|^2 &= |c_1\lambda_1|^2 + |c_2\lambda_2|^2 + \dots + |c_n\lambda_n|^2 \leq \\ &\leq \lambda_1^2(|c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_n|^2) = \lambda_1^2\|x\|^2, \end{aligned}$$

причем равенство достигается для $x = x_1$.

) Элементы a_{jk}^ матрицы A^* определяются равенствами $a_{jk}^* = \bar{a}_{kj}$ ($j = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$). В частности, если A — вещественная матрица, то $a_{jk}^* = a_{kj}$.

З а м е ч а н и е. Отметим наличие и иного выражения для $\|U\|$, именно,

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup_{\|x\|=1} \left| \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k \right) \xi_j \right|.$$

В самом деле,

$$|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \|x\| = \|U(x)\| \|x\| \leq \|U\| = |\lambda_1|, \quad \|x\| = 1.$$

Но для $x = x_1$ равенство достигается. Следовательно, $\sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|U\|$.

Пусть теперь матрица A произвольная. В этом случае получаем

$$\begin{aligned} \|U\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|U(x)\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Ax, Ax) = \sup_{\|x\|=1} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{jk} \xi_k, \sum_{s=1}^m \bar{a}_{js} \bar{\xi}_s \right) = \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sum_{s=1}^m \left[\sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} a_{sj}^* \right) \bar{\xi}_k \right] \xi_s = \sup_{\|x\|=1} (A^* Ax, x) = \Lambda_1, \end{aligned}$$

где в соответствии со сказанным в замечании Λ_1 есть наибольшее собственное значение матрицы $A^* A$.

При $n=1$ оператор U превращается в функционал. Матрица A вырождается в этом случае в однострочечную. Изменяя обозначения, можно сказать, что всякий линейный функционал f в m -мерном пространстве X определяется системой $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ из m чисел:

$$f(x) = \sum_{k=1}^m \varphi_k \xi_k, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in X. \quad (17)$$

Так как и, наоборот, любая система чисел $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ определяет по формуле (17) некоторый линейный функционал в X , то можно отождествить функционал f с определяющим его набором и писать

$$f = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m). \quad (18)$$

Норма функционала (18) в различных конкретных пространствах определяется следующим образом:

$$X = l_m^\infty, \quad \|f\| = \sum_{k=1}^m |\varphi_k|, \quad (19)$$

$$X = l_m^1, \quad \|f\| = \max_k |\varphi_k|, \quad (20)$$

$$X = l_m^2, \quad \|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m |\varphi_k|^2}. \quad (21)$$

З а м е ч а н и е. Если X — комплексное пространство, то целесообразно записывать формулу (17) в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^m \bar{\varphi}_k \xi_k,$$

по-прежнему отождествляя f с системой $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ (ср. замечание в 2.3).

§ 3. Линейные функционалы и операторы в гильбертовом пространстве

3.1. Оператор *) в сепарабельном гильбертовом пространстве допускает матричное представление, подобное матричному представлению оператора в конечномерных пространствах (см. 2.8).

Действительно, пусть U — оператор в сепарабельном (бесконечномерном) гильбертовом пространстве H . Возьмем произвольную полную ортонормальную систему $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Каждый элемент $x \in H$ может быть представлен в форме

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k,$$

где $c_k = (x, x_k)$ — коэффициенты Фурье элемента x . Поэтому на основании непрерывности оператора U

$$y = Ux = \sum_{k=1}^{\infty} c_k Ux_k.$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты Фурье левой и правой частей, найдем

$$d_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} c_k, \quad (1)$$

где d_j — коэффициенты Фурье элемента y , а a_{jk} — коэффициенты Фурье элемента Ux_k .

Итак, последовательность коэффициентов Фурье элемента $y = Ux$ получается из последовательности коэффициентов Фурье элемента x посредством преобразования матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (2)$$

*) Когда речь идет о гильбертовом пространстве, термин «оператор» будет всегда означать «линейный непрерывный оператор». Кроме того, вместо $U(x)$ будем писать Ux .

Таким образом, как и в конечномерном случае, оператор U допускает матричное представление.

Следует, однако, иметь в виду, что, в отличие от конечномерного случая, отнюдь не всякая матрица типа (2) определяет линейный оператор. Необходимым и достаточным условием этого является существование такой постоянной C , что при любых $m, n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^m a_{jk} c_k \right|^2 \leq C^2 \sum_{k=1}^m |c_k|^2, \quad (3)$$

каковы бы ни были $c_1, c_2, \dots, c_m$.

Необходимость этого условия почти очевидна. Беря в качестве x элемент, коэффициенты Фурье которого, начиная с $(m+1)$ -го, равны нулю, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^m a_{jk} c_k \right|^2 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^m a_{jk} c_k \right|^2 = \\ &= \|y\|^2 = \|Ux\|^2 \leq \|U\|^2 \|x\|^2 = \|U\|^2 \sum_{k=1}^m |c_k|^2, \end{aligned}$$

откуда видно, что в качестве C можно взять $\|U\|$.

Наоборот, если соблюдено неравенство (3), то, устремляя в нем m и затем n к бесконечности, получим

$$\|y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} c_k \right|^2 \leq C^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = C^2 \|x\|^2.$$

Высказанный признак затруднителен для проверки, в связи с чем мы укажем более простое достаточное условие, которое сильно сужает класс операторов. Именно, если

$$D^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty,$$

то матрица (2) определяет по формулам (1) линейный оператор в H .

Действительно,

$$\|y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} c_k \right|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \|x\|^2,$$

откуда вытекает ограниченность оператора U и оценка $\|U\| \leq D$.

Отметим еще, что матричное представление оператора U зависит от выбора ортонормальной системы $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, при изменении которой изменяется и матрица (2), представляющая данный оператор U . Вопрос о том, при каких условиях две матрицы типа (2) определяют один и тот же оператор, представляет

большие трудности, и мы не будем его исследовать, отсылая читателя к специальным монографиям *).

3.2. Выясним теперь общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.

Рассматривая в пространстве H скалярное произведение (x, y) с фиксированным $y \in H$, мы без труда убеждаемся, что оно представляет собой линейный функционал. Действительно, пусть

$$f(x) = (x, y). \quad (4)$$

Аддитивность и однородность функционала f есть просто аксиома 2 пространства со скалярным произведением, а ограниченность f является следствием неравенства Коши — Буняковского:

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

на основании которого можно заключить, что

$$\|f\| \leq \|y\|. \quad (5)$$

Докажем, что функционалами вида (4) исчерпываются все линейные функционалы в H , причем в (5) имеет место знак равенства.

Теорема 1. *Каков бы ни был непрерывный линейный функционал f в гильбертовом пространстве H , существует элемент $y \in H$, однозначно определяемый функционалом f и такой, что при каждом $x \in H$ имеет место (4). При этом справедливо равенство*

$$\|f\| = \|y\|. \quad (6)$$

Доказательство. Установим сначала существование элемента y . Обозначим через H_0 множество тех элементов $x \in H$, для которых $f(x) = 0$. Вследствие линейности и непрерывности функционала f это множество является замкнутым подпространством. Если при этом $H_0 = H$, то можно принять $y = 0$.

Рассмотрим случай, когда $H_0 \neq H$. Пусть $y_0 \notin H_0$. Представим y_0 в форме

$$y_0 = y' + y'', \quad y' \in H_0, \quad y'' \perp H_0.$$

(теорема IV.5.1). Ясно, что $y'' \neq 0$, $f(y'') \neq 0$, поэтому можно считать $f(y'') = 1$. Возьмем произвольный элемент $x \in H$ и обозначим $f(x) = \alpha$. Элемент $x' = x - \alpha y'' \in H_0$, так как

$$f(x') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0.$$

Поэтому

$$(x, y'') = (x' + \alpha y'', y'') = \alpha (y'', y''),$$

так что

$$f(x) = \alpha = \left(x, \frac{y''}{(y'', y'')} \right)$$

и можно принять $y = y'' / (y'', y'')$. Итак, существование элемента y доказано.

*) См. например, Ахизер, Глазман,

Единственность этого элемента устанавливается просто. Действительно, если для всех $x \in H$

$$(x, y) = (x, y_1),$$

то $(x, y - y_1) = 0$ и, следовательно, $y - y_1 \perp H$, что возможно лишь в случае $y = y_1$. Далее,

$$\|f\| \geq f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\|,$$

что вместе с (5) дает равенство (6)*.

Теорема полностью доказана.

В частности, в пространстве $L^2(T, \Sigma, \mu)$ общей формой линейного функционала будет

$$f(x) = (x, y) = \int_T x(t) \overline{y(t)} d\mu, \quad x, y \in L^2.$$

В пространстве l^2 —

$$f(x) = (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k, \quad x \in (\xi_1, \xi_2, \dots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l^2.$$

Общая форма функционала в пространстве $L^2(a, b)$ указана Фреше [2], для абстрактного гильбертова пространства в сенаральном случае — Нейманом [1], в общем случае — Реллихом [1].

В 1.3 мы ввели умножение на скаляр для функционалов в комплексном нормированном пространстве по формуле

$$(\lambda f)(x) = \bar{\lambda} f(x). \quad (7)$$

Для того чтобы оправдать целесообразность этого определения, рассмотрим функционалы в гильбертовом пространстве H . Теорема об общей форме линейного функционала в гильбертовом пространстве дает основание для отождествления функционала $f \in H^*$ с определяющим его элементом $y \in H$:

$$f(x) = (x, y), \quad x \in H. \quad (8)$$

При этом, если f_1 определяется элементом y_1 , а f_2 — элементом y_2 , то, очевидно, $f_1 + f_2$ определяется элементом $y_1 + y_2$. Благодаря тому, что λf определяется формулой (7), то же можно сказать про функционал λf и элемент λy . Действительно,

$$(\lambda f)(x) = \bar{\lambda} f(x) = \bar{\lambda} (x, y) = (x, \lambda y). \quad (9)$$

Поскольку, кроме того, $\|f\| = \|y\|$, то сказанное дает право отождествить пространство H^* функционалов f с пространством H элементов y : они линейно изометричны.

* Если $y = 0$, (6) следует из (4) непосредственно.

3.3. Пусть U — линейный (ограниченный) оператор в гильбертовом пространстве H . Рассмотрим функционал

$$f(x) = (Ux, y),$$

где y — фиксированный элемент из H . Очевидно, f — линейный функционал, а так как

$$|f(x)| = |(Ux, y)| \leq \|Ux\| \|y\| \leq \|U\| \|x\| \|y\|,$$

то функционал f ограниченный, причем

$$\|f\| \leq \|U\| \|y\|. \quad (10)$$

Поэтому по теореме 1 существует элемент $y^* \in H$ такой, что

$$f(x) = (x, y^*), \quad x \in H,$$

т. е.

$$(Ux, y) = (x, y^*), \quad x \in H. \quad (11)$$

Элемент y^* однозначно определяется функционалом f и, следовательно, в конечном счете элементом y . Таким образом, сопоставляя элементу y элемент y^* , мы получаем оператор в H . Этот оператор обозначается U^* и называется *сопряженным к U* . Заменяя в (11) y^* на U^*y , получим соотношение, определяющее сопряженный оператор:

$$(Ux, y) = (x, U^*y), \quad x, y \in H.$$

Оператор U^* аддитивен, так как, складывая соотношения

$$(Ux, y_1) = (x, U^*y_1), \quad (Ux, y_2) = (x, U^*y_2),$$

которые выполняются для всех $x \in H$, получим

$$(Ux, y_1 + y_2) = (x, U^*y_1 + U^*y_2),$$

откуда

$$U^*(y_1 + y_2) = U^*y_1 + U^*y_2.$$

Аналогично,

$$(Ux, iy) = -i(Ux, y) = -i(x, U^*y) = (x, iU^*y), \quad x, y \in H,$$

откуда

$$U^*(iy) = iU^*y.$$

Следовательно, $U^*(\lambda y) = \lambda U^*y$ для любого λ , откуда U^* — линейный оператор.

Далее, поскольку $\|f\| = \|y^*\|$, то неравенство (10), переписанное в форме

$$\|y^*\| = \|U^*y\| \leq \|U\| \|y\|,$$

показывает ограниченность оператора U^* , причем $\|U^*\| \leq \|U\|$.

Нетрудно видеть, что оператор $U^{**} = (U^*)^*$ совпадает с U . В самом деле, для всех $x, y \in H$ имеют место равенства

$$(U^*x, y) = (x, U^{**}y),$$

$$(U^*x, y) = (x, Uy),$$

откуда $(x, U^{**}y) = (x, Uy)$, так что $U^{**}y = Uy$ при любом $y \in H$.

Отмеченное обстоятельство позволяет установить равенство норм операторов U и U^* . Действительно, пользуясь уже доказанным неравенством, получим $\|U\| = \|U^{**}\| \leq \|U^*\|$, что вместе с предыдущим и приводит к равенству $\|U^*\| = \|U\|$.

Оператор U , совпадающий со своим сопряженным, называется *самосопряженным*. Самосопряженный оператор характеризуется равенством

$$(Ux, y) = (x, Uy), \quad x, y \in H.$$

Самосопряженные операторы играют основную роль в теории операторов в гильбертовом пространстве, так как наиболее глубокие факты этой теории относятся как раз к самосопряженным операторам. При этом оказывается возможным рассматривать и неограниченные операторы.

Ниже (см. главу IX) понятие сопряженного оператора будет обобщено на случай линейных операторов в произвольных B -пространствах. Однако при этом сопряженный оператор будет определен, вообще говоря, в другом пространстве, поэтому понятие самосопряженного оператора не может быть перенесено на общий случай.

Пусть $H = L^2(a, b)$ и U — интегральный оператор, определенный в 2.6, т. е. $y = Ux$ означает

$$y(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt, \quad \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt < +\infty. \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что сопряженный оператор U^* также является интегральным. Именно, если $y^* = U^*y$, то

$$y^*(s) = \int_a^b K^*(s, t) y(t) dt, \quad K^*(s, t) = \overline{K(t, s)}. \quad (13)$$

Действительно, для любого $x \in L^2$ должно быть

$$(Ux, y) = (x, y^*),$$

т. е.

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) x(t) dt \right] \overline{y(s)} ds = \int_a^b x(t) \overline{y^*(t)} dt.$$

Следовательно,

$$\int_a^b x(t) \left[y^*(t) - \int_a^b \overline{K(s, t)} y(s) ds \right] dt = 0,$$

откуда ввиду произвольности x получаем

$$y^*(t) = \int_a^b \overline{K(s, t)} y(s) ds,$$

что с точностью до обозначений совпадает с (13).

Оператор (12) будет самосопряженным, если ядро $K(s, t)$ комплексно симметрично, т. е. если

$$K(t, s) = \overline{K(s, t)}.$$

Пусть теперь оператор U определяется матрицей (2). Обозначая коэффициенты Фурье элемента y через $d_1, d_2, \dots$, будем иметь

$$(Ux, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} c_k \right) \bar{d}_j = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_{jk} d_k = (x, y^*),$$

где y^* — элемент, коэффициенты Фурье которого суть

$$d_j^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^* d_k, \quad j = 1, 2, \dots; \quad a_{jk}^* = \bar{a}_{kj}.$$

Поскольку $y^* = U^*y$, то это значит, что оператор U^* определяется матрицей

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1k}^* & \dots \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2k}^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1}^* & a_{j2}^* & \dots & a_{jk}^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

эрмитово сопряженной с матрицей (2). В частности, $U^* = U$ означает $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$.

3.4. Важный класс операторов в гильбертовом пространстве образуют так называемые операторы проектирования, или проекторы.

Пусть H_0 — подпространство гильбертова пространства H . Согласно теореме IV.5.1 каждому $x \in H$ однозначно соответствует его проекция на подпространство H_0 . Тем самым в H определен оператор $P = P_{H_0}$, который называется *оператором проектирования*, или *проектором* (на подпространство H_0).

Отметим очевидные свойства проекторов.

а) Каков бы ни был $x \in H$, элементы Px и $x - Px$ ортогональны.

б) $x \in H_0$ эквивалентно $Px = x$.

с) $x \perp H_0$ эквивалентно $Px = 0$.

Далее, так как $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2$, то $\|Px\| \leq \|x\|$, откуда $\|P\| \leq 1$. Если H_0 не сводится к одному нулевому элементу, то,

взяв $\bar{x} \in H_0$ с $\|\bar{x}\| = 1$, получим $\|P\| \geq \|P\bar{x}\| = \|\bar{x}\| = 1$. Так что установлено

d) $\|P\| = 1$.

Класс проекторов характеризуется следующей теоремой.

Теорема 2. Для того чтобы линейный оператор P в H был проектором, необходимо и достаточно, чтобы:

1) P был самосопряженным оператором;

2) для каждого $x \in H$ выполнялось равенство $P(Px) = Px$.

Доказательство. Необходимость. Пусть P — проектор на подпространство H_0 . Возьмем произвольные $x, y \in H$ и представим их в форме

$$\begin{aligned} x &= x' + x'', & x' &= Px \in H_0, & x'' &\perp H_0, \\ y &= y' + y'', & y' &= Py \in H_0, & y'' &\perp H_0. \end{aligned}$$

Имеем тогда

$$(Px, y) = (x', y' + y'') = (x', y') = (x' + x'', y') = (x, Py),$$

откуда следует самосопряженность оператора P .

Далее, с помощью b)

$$P(Px) = Px' = x' = Px,$$

что доказывает необходимость второго условия.

Достаточность. Пусть P — линейный оператор, удовлетворяющий обоим условиям теоремы. Обозначим через H_0 множество всех таких $x \in H$, для которых $Px = x$. Без труда проверяется, что H_0 является подпространством. Докажем, что P — проектор на H_0 . В самом деле, возьмем произвольный $x \in H_0$ и представим его в форме

$$x = Px + (x - Px).$$

Надо доказать, что $Px \in H_0$, $x - Px \perp H_0$.

Первое очевидно, так как $P(Px) = Px$. Если, далее, $u \in H_0$, то $Pu = u$ и, следовательно,

$$(x - Px, u) = (x, u) - (Px, u) = (x, u) - (x, Pu) = 0;$$

таким образом, $x - Px \perp H_0$, и доказательство теоремы закончено.

Чтобы получить удобное матричное представление проектирующего оператора P , следует выбрать ортонормальную систему $x_1, x_2, \dots$ так, чтобы при каждом $k = 1, 2, \dots$ было либо $x_k \in H_0$, либо $x_k \perp H_0$ *). При таком выборе будет

$$a_{jk} = (Px_k, x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 0, & j = k, \quad x_k \perp H_0, \\ 1, & j = k, \quad x_k \in H_0. \end{cases}$$

*) Это достигается таким путем: выбираются ортонормальные системы в H_0 и в ортогональном дополнении к H_0 , полные в каждом из подпространств. Эти системы объединяются затем в одну (ср. IV.5.8).

Таким образом, все элементы матрицы (2), представляющей проектор P , равны нулю, кроме элементов, стоящих на главной диагонали, которые могут равняться единице.

Сопряженные операторы и проекторы введены в случае сепарабельного гильбертова пространства Нейманом [1], в общем случае — Реллихом [1].

3.5. Установим соотношение между оператором проектирования, введенным в 3.4, и проектором в смысле теории нормированных пространств (IV.1.9). Первые операторы мы временно назовем ортопроекторами, а вторые — проекторами. Пусть H — гильбертово пространство. Очевидно, что ортопроектор является проектором; обратное неверно. Теорема IV.5.1 показывает, что на всякое подпространство гильбертова пространства существует ортопроектор, а тогда оно дополняемо (в смысле IV.1.9). Оказывается, это свойство характеризует гильбертово пространство в классе B -пространств.

Теорема 3. Если в B -пространстве X любое замкнутое подпространство имеет дополнение, то X изоморфно некоторому гильбертовому пространству.

Теорема 3, доказательство которой (а также конкретные примеры недополняемых подпространств в различных B -пространствах) можно найти в статье Кадеца и Митягина [1], была доказана Й. Линденштрауссом и Л. Цаффрии. Наиболее известные из конкретных примеров недополняемых подпространств: c_0 недополняемо в l^∞ ; $C[0, 1]$ недополняемо в $L^\infty(0, 1)$.

§ 4. Кольцо операторов

4.1. Линейные операторы можно не только складывать, но и перемножать. Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, а U и V — линейные операторы из X в Y и из Y в Z соответственно ($U \in B(X, Y)$, $V \in B(Y, Z)$). Под *произведением* операторов V и U мы будем понимать оператор $W = VU$ из X в Z , определяемый следующим образом:

$$W(x) = V(U(x)), \quad x \in X^*.$$

Так как

$$\begin{aligned} W(x_1 + x_2) &= V(U(x_1 + x_2)) = V(U(x_1) + U(x_2)) = \\ &= V(U(x_1)) + V(U(x_2)) = W(x_1) + W(x_2), \\ \|W(x)\| &= \|V(U(x))\| \leq \|V\| \|U(x)\| \leq \|U\| \|V\| \|x\|, \end{aligned}$$

то W — линейный оператор, причем

$$\|W\| = \|VU\| \leq \|V\| \|U\|. \quad (1)$$

Если X, Y, Z — конечномерные пространства (размерности m, n, p соответственно) и A, B, C — матрицы, определяющие

*) Это определение имеет смысл и для нелинейных операторов.

соответствующие операторы U, V, W , то $C = BA$. Действительно, $z = W(x)$ означает

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^m c_{jk} \xi_k, \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m); \quad z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p).$$

С другой стороны, $z = V(y)$, где $y = U(x)$, т. е.

$$\zeta_j = \sum_{q=1}^n b_{jq} \eta_q, \quad \eta_q = \sum_{k=1}^m a_{qk} \xi_k,$$

$$j = 1, 2, \dots, p; \quad q = 1, 2, \dots, n; \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

Сопоставляя это с предыдущим и учитывая произвольность элемента x , получим

$$c_{jk} = \sum_{q=1}^n b_{jq} a_{qk}, \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

что и требовалось доказать.

Как известно из алгебры, произведение двух матриц может быть матрицей, все элементы которой равны нулю, несмотря на то, что матрицы-сомножители отличны от нуля. Это обстоятельство показывает, что в (1) неравенство не может быть заменено равенством даже в случае конечномерных пространств.

Однако ряд свойств произведения чисел сохраняется и для операторов. Укажем, например, опуская очевидные доказательства, на дистрибутивность и ассоциативность умножения. Далее, существуют операторы, играющие роль единицы при умножении чисел. Однако, в отличие от числового умножения, здесь имеются две «единицы» — левая и правая. Так, оператор $I \in B(X, X)$, осуществляющий тождественное преобразование в X :

$$I(x) = x, \quad x \in X, \quad (2)$$

будет правой единицей:

$$UI = U,$$

а аналогичный оператор I_1 в Y — левой единицей:

$$I_1 U = U.$$

Следует особо подчеркнуть отсутствие коммутативности при умножении операторов. Более того, оператор UV , вообще говоря, и не определен, поэтому равенство $UV = VU$ лишено содержания. Но даже когда UV имеет смысл (а это будет, очевидно, в случае $Z = X$), операторы VU и UV определены в разных пространствах — первый в X , второй в Y .

В связи с этим вопрос о перестановочности операторов U и V может ставиться лишь тогда, когда $X = Y = Z$, т. е. когда оба оператора суть операторы в одном и том же пространстве X ,

ными словами, являются элементами пространства $B(X, X)$. Однако и в этом случае равенство $UV = VU$ для произвольных операторов $U, V \in B(X, X)$ не имеет места, если только X не одномерное пространство.

4.2. Среди пространств $B(X, Y)$ пространство непрерывных линейных операторов, переводящих X в себя, $B(X, X)$, занимает особое место, так как только в нем произведение любых двух элементов имеет смысл.

Система, для элементов которой определены два действия; сложение и умножение, подчиненных обычным законам действий над числами (за исключением коммутативности и обратимости для умножения), называется *кольцом*. Если умножение определено для элементов нормированного пространства, то последнее называется *нормированным кольцом* *). При этом, чтобы связать операцию умножения с метрикой пространства, требуют непрерывность произведения.

Таким образом, пространство $B(X, X)$ является нормированным кольцом (непрерывность произведения следует из неравенства (1) **).

В нормированном кольце, в частности в пространстве $B(X, X)$, могут быть определены степени любого элемента. Пусть $U \in B(X, X)$. По определению

$$U^0 = I, \quad U^n = U^{n-1}U, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где I — тождественный оператор в X (см. (2)).

Так как это определение ничем не отличается от соответствующего определения для чисел, то для любых целых положительных m и n

$$U^m U^n = U^{m+n},$$

откуда следует, что все степени одного и того же оператора U перестановочны между собой.

Далее, применяя последовательно (1), найдем

$$\|U^n\| \leq \|U\|^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

При этом знак равенства, вообще говоря, не имеет места.

Будем считать в дальнейшем пространство X полным. Тогда по теореме 1.2 будет полным и пространство $B(X, X)$. В этом предположении рассмотрим «геометрическую прогрессию»

$$I + U + U^2 + \dots + U^n + \dots \quad (4)$$

*) В литературе часто употребляют термин *нормированная алгебра*, а в случае полноты по норме — *банахова алгебра*.

**) Теорией нормированных колец мы будем заниматься лишь в связи с пространством $B(X, X)$. Читателя, желающего ближе познакомиться с нормированными кольцами, мы отсылаем к книге М. А. Наймарка (см. Наймарк).

Выясним, при каких условиях этот ряд сходится. Из (3) непосредственно вытекает, что сходимость во всяком случае имеет место, когда

$$\|U\| < 1, \quad (5)$$

так как тогда ряд (4) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$1 + \|U\| + \|U\|^2 + \dots + \|U\|^n + \dots$$

и, следовательно ввиду полноты пространства $B(X, X)$ сходится (см. IV.1.5). Однако, в отличие от числового случая, условие (5) не является необходимым для сходимости ряда (3).

Теорема 1. *Каков бы ни был оператор $U \in B(X, X)$, существует*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} = c_U.$$

При этом, если $c_U < 1$, то ряд (4) сходится, если $c_U > 1$ — расходится.

Доказательство. Обозначим $a = \inf_n \sqrt[n]{\|U^n\|}$ и докажем, что $c_U = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} = a$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем m такое, что

$$\sqrt[m]{\|U^m\|} < a + \varepsilon.$$

Пусть, далее,

$$M = \max[1, \|U\|, \dots, \|U^{m-1}\|].$$

Рассмотрим произвольное n , представим его в форме $n = k_n m + l_n$ ($0 \leq l_n \leq m-1$). При этом на основании (3)

$$\sqrt[n]{\|U^n\|} \leq \sqrt[n]{\|U^{l_n}\| \|U^m\|^{k_n}} \leq M^{1/n} \|U^m\|^{k_n/n} < M^{1/n} (a + \varepsilon)^{(n-l_n)/n}.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^{1/n} (a + \varepsilon)^{(n-l_n)/n} = a + \varepsilon,$$

то найдется N_ε такое, что

$$M^{1/n} (a + \varepsilon)^{(n-l_n)/n} < a + 2\varepsilon, \quad n \geq N_\varepsilon.$$

Следовательно, для $n \geq N_\varepsilon$

$$a \leq \sqrt[n]{\|U^n\|} < a + 2\varepsilon,$$

откуда и следует существование $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} = a$.

Сходимость (в случае $c_U < 1$) или расходимость (в случае $c_U > 1$) ряда (4) получается теперь с помощью применения признака сходимости Коши к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \|U^n\|$.

Следствие. Для того чтобы ряд (4) сходиллся, необходима и достаточно, чтобы при некотором k было

$$\|U^k\| < 1. \quad (6)$$

Действительно, если ряд (4) сходится, то $\|U^n\| \rightarrow 0$, и потому (6) выполнено при достаточно большом k . Наоборот, если (6) имеет место, то $c_U = \inf_n \sqrt[n]{\|U^n\|} \leq \sqrt[k]{\|U^k\|} < 1$ и, следовательно, ряд (4) сходится.

4.3. Рассмотрим вопрос об обращении действия умножения операторов. Пусть имеется линейный оператор U , отображающий нормированное пространство X в нормированное пространство Y . Будем говорить, что оператор U имеет обратный (или, иначе, обратим), если существует оператор V , отображающий Y в X и такой, что

$$VU = I_X, \quad UV = I_Y, \quad (7)$$

где I_X , соответственно I_Y , есть оператор, осуществляющий тождественное преобразование пространства X , соответственно пространства Y *). Оператор V называется обратным по отношению к U и обозначается $V = U^{-1}$.

Непосредственно из определения следует, что обратный оператор U^{-1} , так же как и данный, линейен. В самом деле, если $y_1, y_2 \in Y$, то в силу второго из соотношений (7)

$$y_k = U(x_k), \quad x_k = V(y_k); \quad k = 1, 2.$$

Поэтому на основании первого из соотношений (7), будем иметь

$$V(y_1 + y_2) = V(U(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = V(y_1) + V(y_2).$$

Аналогично доказывается однородность оператора U^{-1} .

Далее, из определения следует, что оператор U является обратным по отношению к U^{-1} , т. е. $(U^{-1})^{-1} = U$.

Высказанное определение обратного оператора носит формальный характер. Чтобы выяснить его сущность, докажем, что если существует обратный оператор U^{-1} , то оператор U осуществляет взаимно однозначное отображение пространства X на пространство Y .

*) В дальнейшем мы будем использовать обозначения I_X , I_Y и т. п., не оговаривая их каждый раз. Значок, указывающий на пространство, в котором определен оператор, мы иногда будем опускать в случаях, когда это не может вызвать недоразумений.

Действительно, возьмем $x_1 \neq x_2$ ($x_1, x_2 \in X$). Если бы оказалось, что $U(x_1) = U(x_2)$, то по первому из соотношений (7) мы имели бы

$$x_1 = VU(x_1) = VU(x_2) = x_2.$$

Далее, каждый $y \in Y$ является образом некоторого $x \in X$ (и такой x по доказанному может быть только один). Именно, в качестве x следует взять элемент $x = V(y)$. Тогда на основании второго из соотношений (7)

$$U(x) = UV(y) = y.$$

Наоборот, пусть оператор U осуществляет взаимно однозначное отображение X на Y . Сопоставим элементу $y \in Y$ его прообраз, т. е. такой элемент $x \in X$, что $U(x) = y$. Это приводит к оператору V , отображающему Y на X . Нетрудно проверить, что V — линейный оператор, причем $V = U^{-1}$.

В самом деле, соотношения $x = V(y)$ и $y = U(x)$ эквивалентны, поэтому

$$VU(x) = V(y) = x, \quad UV(y) = U(x) = y.$$

Из сказанного, между прочим, вытекает, что обратный оператор, если он существует, может быть только один.

Изложенное позволяет рассмотреть понятие обратного оператора еще с одной точки зрения. Пусть имеется уравнение

$$U(x) = y, \quad (8)$$

где y — произвольный, но фиксированный элемент из Y , а x — искомый элемент пространства X . Ясно, что если существует обратный оператор U^{-1} , то уравнение (8) имеет единственное решение при любом $y \in Y$, причем это решение есть $x = U^{-1}(y)$.

Факт однозначной разрешимости уравнения (8) еще не обеспечивает существования непрерывного обратного оператора U^{-1} .

Теорема 2. Пусть уравнение (8) имеет решение при любом $y \in Y$ и пусть существует положительное число m такое, что при каждом $x \in X$

$$\|U(x)\| \geq m\|x\|. \quad (9)$$

Тогда оператор U имеет непрерывный обратный U^{-1} , причем

$$\|U^{-1}\| \leq 1/m. \quad (10)$$

Доказательство. Очевидно, отображение, осуществляемое оператором U , взаимно однозначно, так как если $x_1 \neq x_2$, то

$$\|U(x_1) - U(x_2)\| \geq m\|x_1 - x_2\| > 0.$$

Кроме того, из разрешимости уравнения (8) при любом $y \in Y$ следует, что $U(X) = Y$.

Таким образом, как показано выше, существует линейный оператор $V = U^{-1}$. Так как $x = V(y)$ означает $y = U(x)$, то из (9) получим

$$\|y\| \geq m \|V(y)\|, \quad y \in Y,$$

или

$$\|U^{-1}(y)\| = \|V(y)\| \leq \frac{1}{m} \|y\|, \quad y \in Y. \quad (11)$$

Иначе говоря, U^{-1} — ограниченный и, следовательно, непрерывный оператор. Оценка (10) получается непосредственно из (11).

З а м е ч а н и е. Условия теоремы являются также и необходимыми для существования непрерывного обратного оператора U^{-1} .

Необходимость первого условия очевидна. Необходимость второго условия легко проверяется, если взять $m = 1/\|U^{-1}\|$.

В качестве иллюстрации доказанной теоремы рассмотрим оператор U в $L^2(a, b)$, определенный в 2.7:

$$y = U(x), \quad y(s) = x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t) dt$$

(ядро $K(s, t)$ предполагается симметричным).

Считая, что λ не является характеристическим значением ядра, мы на основании известных фактов теории интегральных уравнений можем заключить, что уравнение (8) имеет в данном случае решение при любом $y \in L^2$ (см. Петровский). Далее, в 2.7 было показано (мы используем прежние обозначения), что

$$\|y\|^2 = \|U(x)\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\|U(x)\|^2 \geq m^2 \sum_{-\infty}^{\infty} h_k^2 = m^2 \|x\|^2,$$

где

$$m = \inf \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

а через λ_k обозначены характеристические значения ядра $K(s, t)$ (при $k=0, -1, -2, \dots$ надо считать $\lambda_k = \infty$). Так как $\lambda_k \neq \lambda$ и $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то $m > 0$. Следовательно, существует непрерывный оператор U^{-1} , причем

$$\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{m} = \sup \left| 1 + \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \right|, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

4.4. Сохраняя лишь одно из соотношений (7), мы приходим к понятию левого, соответственно правого, обратного оператора. Точнее говоря, оператор V_l из $U(X)$ в X называется *левым обратным* по отношению к оператору U , если

$$V_l U = I_X.$$

Аналогично оператор V , из Y в X называется *правым обратным* по отношению к оператору U , если

$$UV = I_Y.$$

Левый обратный оператор мы будем обозначать символом U_l^{-1} , правый U_r^{-1} ; при этом значки иногда будут опускаться, когда из контекста ясно, о каком обратном операторе идет речь. Приведенное выше рассуждение показывает, что левый обратный оператор обязательно линеен.

Наличие левого или правого обратного оператора позволяет сделать некоторые заключения о разрешимости уравнения (8).

Именно, если существует левый обратный оператор U_l^{-1} , то решение уравнения (8), если оно существует, единственно. Иными словами, если имеется левый обратный оператор, то U осуществляет взаимно однозначное отображение X на $U(X)$. Действительно, при проверке этого обстоятельства в случае существования обратного оператора мы использовали лишь первое из соотношений (7), которое имеет место и для левого обратного.

Следует иметь в виду, что, вообще говоря, множество $U(X)$ не совпадает с Y и, таким образом, оператор U_l^{-1} определен не на всем Y .

Аналогично можно убедиться, что существование правого обратного оператора влечет разрешимость (по, вообще говоря, неоднозначную) уравнения (8) при любом $y \in Y$ (решением будет $x = U_r^{-1}(y)$), т. е. в этом случае $U(X) = Y$.

Как следует из сказанного выше, если существует левый обратный U_l^{-1} и правый обратный U_r^{-1} , то они равны между собой; при этом существует обратный $U^{-1} = U_l^{-1} = U_r^{-1}$. В связи с этим мы иногда будем называть обратный оператор двусторонним обратным.

В заключение отметим, что для существования непрерывного левого обратного оператора необходимо и достаточно, чтобы оператор U удовлетворял условию (9).

4.5. Случай, когда $Y = X$, интересен тем, что если существует непрерывный обратный по отношению к данному оператору $U \in B(X, X)$, то он является элементом того же пространства $B(X, X)$.

Соображения, высказанные в 4.2 по поводу ряда (4):

$$I + U + U^2 + \dots + U^n + \dots,$$

приводят к следующей теореме (см. Банах [2]).

Теорема 3 (Банах). Пусть X — B -пространство и $U \in B(X, X)$. Тогда, если

$$\|U\| \leq q < 1, \quad (12)$$

то оператор $I - U$ имеет непрерывный обратный, причем

$$\|I - U^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}. \quad (13)$$

Доказательство. В 4.2 было показано, что ряд (4) при условии теоремы, т. е. при условии (5), сходится. Обозначим через V сумму этого ряда. Имеем

$$\begin{aligned} V(I - U) &= (I + U + \dots + U^n + \dots)(I - U) = \\ &= (I + U + \dots + U^n + \dots) - (U + U^2 + \dots + U^{n+1}) = I \end{aligned} \quad (14)$$

и, аналогично,

$$(I - U)V = I. \quad (15)$$

Таким образом, $V = (I - U)^{-1}$.

Далее, в силу (3)

$$\begin{aligned} \|V\| &\leq \|I\| + \|U\| + \dots + \|U^n\| + \dots \leq 1 + q + \dots \\ &\dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q}, \end{aligned}$$

что и дает оценку (13).

Замечание. Так как соотношения (14) и (15) выполнены всегда, когда ряд (4) сходится, то в соответствии с теоремой 1 и следствием из нее линейный непрерывный оператор $(I - U)^{-1}$ будет существовать и тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} < 1, \quad (16)$$

или если при некотором $k = 1, 2, \dots$

$$\sqrt[k]{\|U^k\|} < 1. \quad (17)$$

4.6. Теорема Банаха показывает, что оператор $I - U$, мало отличающийся от тождественного оператора I , имеющего непрерывный обратный ($I^{-1} = I$), сам имеет непрерывный обратный. Этот факт поддается обобщению.

Теорема 4. Пусть $U_0 \in B(X, Y)$, где X и Y — два B -пространства, и пусть существует $U_0^{-1} \in B(Y, X)$. Тогда, если оператор $U \in B(X, Y)$ удовлетворяет условию

$$\|U\| < \frac{1}{\|U_0^{-1}\|}, \quad (18)$$

то оператор $V = U_0 + U$ имеет непрерывный обратный V^{-1} , причем

$$\|V^{-1}\| \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}U\|} \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}\|\|U\|}.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$W = U_0^{-1}V = I_X + U_0^{-1}U.$$

Так как

$$\|U_0^{-1}U\| \leq \|U_0^{-1}\| \|U\| < 1,$$

то по теореме Банаха оператор W имеет непрерывный обратный W^{-1} . При этом

$$\|W^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|U_0^{-1}U\|} \leq \frac{1}{1 - \|U_0^{-1}\| \|U\|}. \quad (19)$$

Имеем далее

$$U_0^{-1}VW^{-1} = I_X,$$

откуда

$$VW^{-1} = U_0,$$

и, следовательно,

$$VW^{-1}U_0^{-1} = I_Y.$$

С другой стороны,

$$W^{-1}U_0^{-1}V = I_X.$$

Последние два равенства позволяют заключить, что оператор $W^{-1}U_0^{-1}$ является непрерывным обратным по отношению к оператору V .

Из равенства $V^{-1} = W^{-1}U_0^{-1}$ с помощью (19) получаем оценку

$$\|V^{-1}\| \leq \|W^{-1}\| \|U_0^{-1}\| \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}U\|} \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}\| \|U\|}.$$

§ 5. Метод последовательных приближений

5.1. Рассмотрим уравнение

$$x - U(x) = y, \quad (1)$$

где U — непрерывный линейный оператор в B -пространстве X , y — данный и x — искомый элементы пространства X .

Одним из распространенных методов нахождения решения уравнения (1) является так называемый *метод последовательных приближений*, который состоит в том, что, задавшись произвольным элементом $x_0 \in X$ — начальным приближением, — строят, исходя из него, последовательность $\{x_n\}$ приближенных решений

$$x_{n+1} = y + U(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Если при этом получается сходящаяся последовательность, пределом которой является решение рассматриваемого уравнения, то говорят, что процесс последовательных приближений для уравнения (1), начатый с элемента x_0 , сходится (к решению уравне-

ния (1)). Поскольку $U \in B(X, X)$, из одного факта сходимости последовательности $\{x_n\}$ вытекает, что $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ есть решение

уравнения (1). Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ в соотношении (2).

Вопрос о сходимости процесса последовательных приближений для уравнения (1) оказывается связанным со сходимостью ряда

$$I + U + \dots + U^n + \dots, \quad (3)$$

сумма которого (в случае сходимости) есть $(I - U)^{-1}$ (см. замечание к теореме Банаха — теореме 4.3).

Теорема 1. Если ряд (3) сходится, то, каково бы ни было начальное приближение x_0 , процесс последовательных приближений для уравнения (1) сходится к единственному решению x^* уравнения (1). При этом имеет место оценка

$$\|x^* - x_n\| \leq \|(I - U)^{-1}\| \|U^n\| \|x_1 - x_0\|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

В частности, если выполнено условие теоремы Банаха, эта оценка может быть заменена оценкой

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \|x_1 - x_0\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Применяя последовательно формулу (2), найдем

$$x_n = y + U(y) + \dots + U^{n-1}(y) + U^n(x_0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Отсюда ясно, что если ряд (3) сходится, то, поскольку в этом случае $U^n(x_0) \rightarrow 0$, существует

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} U^k(y) = (I - U)^{-1}(y).$$

Так как x^* есть, очевидно, решение уравнения (1), то этим доказана первая часть теоремы.

Чтобы получить оценку (4), заменим в равенстве (5) x_0 на x^* . Тогда, как это ясно из формулы (2), $x_n = x^*$ ($n = 1, 2, \dots$). Таким образом, мы приходим к соотношению

$$x^* = y + U(y) + \dots + U^{n-1}(y) + U^n(x^*), \quad n = 1, 2, \dots$$

Вычитая из него равенство (5) и переходя к нормам, получим

$$\|x^* - x_n\| \leq \|U^n\| \|x^* - x_0\|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Обозначим $\tilde{x} = x^* - x_0$. Принимая во внимание, что x^* есть решение уравнения (1) и, следовательно, $x^* - U(x^*) = y$, будем иметь

$$\begin{aligned} (I - U)(\tilde{x}) &= \tilde{x} - U(\tilde{x}) = x^* - U(x^*) - x_0 + U(x_0) = \\ &= y + U(x_0) - x_0 = x_1 - x_0; \end{aligned}$$

отсюда находим

$$\tilde{x} = (I - U)^{-1}(x_1 - x_0).$$

Используя это в (6), приходим к требуемой оценке.

5.2. Теорема 1 имеет многообразные применения. Остановимся на некоторых из них.

Пусть сначала X — m -мерное пространство. Линейный оператор $U \in B(X, X)$ определяется в этом случае квадратной матрицей $A = (a_{jk})$ и уравнение (1) может быть записано в развернутой форме в виде системы уравнений:

$$\xi_j - \sum_{k=1}^m a_{jk} \xi_k = \eta_j$$

$$j = 1, 2, \dots, m; \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m); \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m). \quad (7)$$

Последовательные приближения $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_m^{(n)})$ ($n = 0, 1, \dots$) к решению находятся по формулам

$$\xi_j^{n+1} = \sum_{k=1}^m a_{jk} \xi_k^{(n)} + \eta_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad n = 0, 1, \dots$$

Условие (12) предыдущего параграфа, обеспечивающее сходимость процесса последовательных приближений к решению, зависит от принятой в X нормировки. Так, если $X = l_m^\infty$, то, поскольку в этом случае (см. 2.8)

$$\|U\| = \max_j \sum_{k=1}^m |a_{jk}|$$

получаем, что при условии

$$\sum_{k=1}^m |a_{jk}| < 1, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_j^{(n)} = \xi_j^*$ ($j = 1, 2, \dots, m$), причем $\xi_1 = \xi_1^*, \xi_2 = \xi_2^*, \dots, \xi_m = \xi_m^*$ является решением (единственным) системы (7).

Принимая $X = l_m^1$, получаем другое условие:

$$\sum_{j=1}^m |a_{jk}| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

Наконец, взяв $X = l_m^2$, в силу имеющейся в этом случае оценки

$$\|U\| \leq \left[\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m |a_{jk}|^2 \right]^{1/2}$$

приходим к условию

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m |a_{jk}|^2 < 1. \quad (10)$$

Любопытно отметить, что если матрица A симметрична и $X = I_m^2$, то условие $\|U\| < 1$ не только достаточно, но и необходимо для сходимости процесса последовательных приближений.

В самом деле, как было показано в 2,8, в данном случае

$$\|U\| = |\lambda_1|,$$

где λ_1 — наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы A . Беря в качестве y в системе (7) собственный вектор, отвечающий λ_1 , и полагая $x_0 = 0$, получим

$$x_1 = y; \quad x_2 = U(x_1) + y = (\lambda_1 + 1)y; \dots;$$

$$x_{n+1} = U(x_n) + y = (\lambda_1^n + \dots + \lambda_1 + 1)y, \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда и следует, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $\{\xi_j^{(n)}\}$ не имеет предела, если $|\lambda_1| \geq 1$ ($\eta_j \neq 0$).

Таким образом, когда матрица A симметрична, процесс последовательных приближений сходится к решению тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A меньше единицы по абсолютной величине.

В главе XIII будет доказан общий результат, из которого справедливость указанного выше факта следует и без предположения о симметрии матрицы A . Предоставляем читателю проверить это обстоятельство непосредственно.

Укажем еще на оценки наибольшего по модулю собственного значения λ_1 произвольной матрицы A . Обозначив через $x_1 \in X$ собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_1 , будем иметь $U(x_1) = \lambda_1 x_1$ и, следовательно,

$$|\lambda_1| \|x_1\| = \|U(x_1)\| \leq \|U\| \|x_1\|,$$

т. е. $|\lambda_1| \leq \|U\|$. Принимая за X пространство I_m^∞ , получим отсюда

$$|\lambda_1| \leq \max_j \sum_{k=1}^m |a_{jk}|.$$

Взяв $X = I_m^1$, приходим к оценке

$$|\lambda_1| \leq \max_k \sum_{j=1}^m |a_{jk}|.$$

Наконец, если $X = I_m^2$ то

$$|\lambda_1| \leq \|U\| \leq \left[\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m |a_{jk}|^2 \right]^{1/2} *).$$

5.3. Перейдем к изучению бесконечных систем. Рассмотрим систему уравнений

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k = \eta_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (11)$$

*) По поводу итерационных методов решения конечных систем см. Фаддеев, Фаддеева, гл. III.

Мы будем называть *решением* системы такую числовую последовательность $\{\xi_j^*\}$, что при $\xi_j = \xi_j^*$ ряды в левой части (12) сходятся и все уравнения (11) обращаются в тождества.

Системы такого рода встречаются при исследовании граничных задач для уравнений математической физики и интегральных уравнений*).

Предположим сначала, что бесконечная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jh} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

системы (11) удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < 1. \quad (12)$$

При этом, как было указано в III.3.1, матрица A определяет линейный непрерывный оператор U в пространстве l^2 :

$$z = U(x), \quad \zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k,$$

$$j = 1, 2, \dots; \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots), \quad z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots).$$

Условие (12) дает

$$\|U\| \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \right]^{1/2} < 1,$$

поэтому к системе (11), записанной в форме одного уравнения вида (1):

$$x - U(x) = y, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots),$$

применима теорема 1, на основании которой для каждого $y \in l^2$ существует единственное (в пространстве l^2) решение $x^* = \{x_h^*\}$, которое может быть получено методом последовательных приближений:

$$\xi_j^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k^{(n)} + \eta_j, \quad j = 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^* - \xi_j^{(n)}|^2 = 0$$

$\{\xi_h^{(0)}\}$ — произвольная последовательность из l^2 .

*) По поводу бесконечных систем см. Канторович [4]. Литературу по бесконечным системам см. Канторович, Крылов.

Заменяем теперь условие (12) более слабым:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty. \quad (13)$$

Хотя и при этом условии матрица A определяет в l^2 линейный непрерывный оператор U , но неравенство $\|U\| < 1$, вообще говоря, уже не выполняется, в связи с чем теорема 1 неприменима.

Покажем, что исследование системы (11) при условии (13) сводится к исследованию конечной системы (мы предполагаем, что последовательность $\{\eta_j\}$ правых частей является элементом пространства l^2).

Найдем такое n_0 , что

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < 1.$$

Закрепим первые n_0 неизвестных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0}$ и рассмотрим систему

$$\xi_j - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \xi_k = \eta_j + \sum_{k=1}^{n_0} a_{jk} \xi_k, \quad j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots \quad (14)$$

Поскольку

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |a_{jk} \xi_k|^2 = |\xi_k|^2 \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \leq |\xi_k|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} |a_{js}|^2 < \infty,$$

$$k = 1, 2, \dots, n_0,$$

то последовательность правых частей системы (14) входит в l^2 , поэтому на основании сказанного выше рассматриваемая система имеет единственное решение $\tilde{\xi}_{n_0+1}, \tilde{\xi}_{n_0+2}, \dots$ в l^2 , зависящее от зафиксированных значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0}$. Выясним характер этой зависимости. Для этого рассмотрим системы

$$\xi_j - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \xi_k = a_{js}, \quad j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots; \quad s = 1, 2, \dots, n_0,$$

$$\xi_j - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \xi_k = \eta_j, \quad j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots,$$

решения которых (единственные, как уже отмечалось) обозначим $\{c_{ks}\}$ и $\{\tilde{\eta}_{ks}\}$ ($k = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots; s = 1, 2, \dots, n_0$) соответственно.

но. Таким образом, имеют место равенства

$$c_{js} - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk}c_{ks} = a_{js}, \quad j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots; \quad s = 1, 2, \dots, n_0, \quad (15)$$

$$\tilde{\eta}_j - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk}\tilde{\eta}_k = \eta_j, \quad j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots \quad (16)$$

Умножая первые равенства на ξ_s , суммируя и складывая с последним, получим соотношение

$$\left(\tilde{\eta}_j + \sum_{s=1}^{n_0} c_{js}\xi_s \right) - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \left(\tilde{\eta}_k + \sum_{s=1}^{n_0} c_{ks}\xi_s \right) = \eta_j + \sum_{s=1}^{n_0} a_{js}\xi_s, \\ j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots,$$

откуда вытекает, что последовательность $\left\{ \tilde{\eta}_k + \sum_{s=1}^{n_0} c_{ks}\xi_s \right\}$ является решением системы (14), поэтому ввиду единственности последнего

$$\tilde{\xi}_k = \tilde{\eta}_k + \sum_{s=1}^{n_0} c_{ks}\xi_s, \quad k = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$$

Полученный результат можно сформулировать следующим образом: данная система (11) равносильна системе

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\xi_k = \eta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_0, \\ \xi_j - \sum_{k=1}^{n_0} c_{jk}\xi_k = \tilde{\eta}_j, \quad j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots \quad (17)$$

Подставим в первую группу уравнений вместо ξ_k с $k > n_0$ выражения, полученные для них из второй группы:

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{n_0} a_{jk}\xi_k - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \left(\eta_k + \sum_{s=1}^{n_0} a_{ks}\xi_s \right) = \eta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_0, \quad (18)$$

или, если обозначить (ср. с (15) и (16))

$$c_{jk} = a_{jk} + \sum_{s=n_0+1}^{\infty} a_{js}c_{sk}, \quad \tilde{\eta}_j = \eta_j + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk}\tilde{\eta}_k, \quad j, k = 1, 2, \dots, n_0^*)$$

*) Так как ряды $\sum_{s=n_0+1}^{\infty} |a_{js}|^2$, $\sum_{s=n_0+1}^{\infty} |c_{sk}|^2$ и $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\tilde{\eta}_k|^2$ сходятся, то сходятся и ряды, стоящие в правой части.

то уравнения (18) можно переписать в форме

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{n_0} c_{jk} \xi_k = \tilde{\eta}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_0. \quad (19)$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнения второй группы из системы (17):

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{n_0} c_{jk} \xi_k = \tilde{\eta}_j, \quad j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, \quad (20)$$

получим бесконечную систему, эквивалентную данной системе (11).

Решение построенной системы может быть осуществлено в два приема: во-первых, из конечной системы (19) находим значения первых n_0 неизвестных; во-вторых, подставляя их в уравнения (20), определяем значения остальных неизвестных.

Так как второй шаг осуществим всегда, когда осуществим первый, то таким образом установлено, что решение бесконечной системы (11) сводится к решению конечной системы (19). С помощью этого обстоятельства можно показать, что система (11) при условии (13) обладает всеми свойствами конечных систем. Поскольку в главе XIII мы придем к этому результату из других, общих соображений, здесь мы укажем лишь на одно такое свойство: если однородная система, соответствующая (11) (т. е. получающаяся из (11) при $\eta_1 = \eta_2 = \dots = 0$), имеет в l^2 единственное решение (очевидно, нулевое), то данная система (11) имеет единственное решение, какова бы ни была последовательность $\{\eta_j\}$ правых частей.

Действительно, если система (11) однородна, то будет однородной и система (19), а так как для конечных систем высказанное утверждение справедливо, то неоднородная система (19) имеет единственное решение, откуда и следует доказываемый результат.

Предоставляем читателю проверить, что однородная система (11) имеет конечное число линейно независимых решений, а также вывести условия разрешимости неоднородной системы в случае, когда это число больше нуля.

5.4. Предположим теперь, что матрица A удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leq 1 - \rho, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где $\rho > 0$. Система (11), удовлетворяющая этому условию, называется *вполне регулярной*.

Введем в пространстве l^∞ оператор U :

$$z = U(x),$$

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k, \quad j = 1, 2, \dots; \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots); \quad z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots).$$

Поскольку вследствие (21)

$$|\zeta_j| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| |\xi_k| \leq \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leq (1 - \rho) \|x\|, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

$z = U(x)$ имеет смысл при любом $x \in l^\infty$ и является элементом пространства l^∞ . При этом

$$\|z\| = \|U(x)\| \leq (1 - \rho) \|x\|.$$

Отсюда, принимая во внимание очевидную линейность оператора U , заключаем, что U — линейный непрерывный оператор в l^∞ и

$$\|U\| \leq 1 - \rho. \quad (23)$$

Как и в 3.3, систему (41) можно записать теперь в виде одного уравнения типа (4):

$$x - U(x) = y, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots). \quad (24)$$

Неравенство (23) обеспечивает применимость к уравнению (24) теоремы 1, на основании которой это уравнение имеет при любом $x \in l^\infty$ единственное решение (в пространстве l^∞), которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Таким образом, вполне регулярная система имеет единственное ограниченное решение, какова бы ни была ограниченная последовательность $\{\eta_j\}$ правых частей.

З а м е ч а н и е. В высказанном предложении гарантируется единственность ограниченного решения вполне регулярной системы. При этом не исключено, что система имеет еще и неограниченные решения. Так, система

$$\xi_j - \frac{1}{j+1} \xi_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

имеет бесконечно много решений

$$\xi_1 = a, \quad \xi_2 = 2a, \dots, \quad \xi_k = k!a, \dots,$$

где a — произвольная постоянная. Однако если $a \neq 0$, все эти решения неограничены.

Аналогичное замечание можно сделать и по поводу систем, рассмотренных в 5.3.

Если рассмотреть системы, для которых существуют такие n_0 и M , что

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_{jk}| \leq 1 - \rho, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leq M, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \rho > 0,$$

то для них можно высказать все, что было установлено в 5.3 для систем, удовлетворяющих условию (13); при этом рассуждения переносятся без каких-либо существенных изменений.

5.5. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t) dt = y(s),$$

предполагая ядро $K(s, t)$ непрерывным.

Вводя интегральный оператор U в пространстве $C[a, b]$ или в пространстве $L^2(a, b)$ (см. 2.4 или 2.6), мы можем записать интегральное уравнение в виде

$$x - \lambda U(x) = y. \quad (25)$$

Если

$$|\lambda| < 1/\|U\|, \quad (26)$$

то по теореме 4.3 оператор $I - \lambda U$ имеет непрерывный обратный

$$(I - \lambda U)^{-1} = I + \lambda U + \lambda^2 U^2 + \dots + \lambda^n U^n + \dots$$

Следовательно, единственное решение x^* уравнения (25) имеет вид

$$x^* = (I - \lambda U)^{-1}(y) = y + \lambda U(y) + \lambda^2 U^2(y) + \dots + \lambda^n U^n(y) + \dots \quad (27)$$

Этот ряд называется *рядом Неймана*.

Покажем, что операторы U^n так же, как и U , суть интегральные. Действительно, $v = U^2(x)$ означает $v = U(z)$, где $y = U(x)$, т. е.

$$v(s) = \int_a^b K(s, t) z(t) dt, \quad z(t) = \int_a^b K(t, u) x(u) du.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v(s) &= \int_a^b K(s, t) \left[\int_a^b K(t, u) x(u) du \right] dt = \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) K(t, u) dt \right] x(u) du = \int_a^b K_2(s, u) x(u) du, \\ K_2(s, u) &= \int_a^b K(s, t) K(t, u) dt. \end{aligned}$$

По индукции можно доказать, что $v = U^n(x)$ означает

$$v(s) = \int_a^b K_n(s, u) x(u) du, \quad n = 2, 3, \dots,$$

где $K_n(s, u)$ определяется из рекуррентного соотношения

$$K_n(s, u) = \int_a^b K_{n-1}(s, t) K(t, u) dt, \quad n = 2, 3, \dots,$$

раскрыв которое, получаем

$$K_n(s, u) = \int_a^b \dots \int_a^b K(s, t_1) K(t_1, t_2) \dots K(t_{n-1}, u) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}.$$

Функции $K_n(s, u)$ называются *повторными*: или *итерированными ядрами*.

Ряд Неймана может быть записан теперь в развернутой форме:

$$\begin{aligned} x^*(s) = y(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) y(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(s, t) y(t) dt + \dots \\ \dots + \lambda^n \int_a^b K_n(s, t) y(t) dt + \dots \end{aligned}$$

Характер сходимости этого ряда зависит от того, в каком пространстве мы рассматриваем оператор U .

Условия сходимости ряда Неймана получаются из (26), если заменить там $\|U\|$ ее выражением. Так, если рассматривается пространство $C[a, b]$, то (см. (2.4))

$$\|U\| = \max_s \int_a^b |K(s, t)| dt \leq M(b-a), \quad M = \max_{s,t} |K(s, t)|,$$

и условие (26) приобретает вид

$$|\lambda| < \frac{1}{\max_s \int_a^b |K(s, t)| dt},$$

или, проще,

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

В случае пространства $L^2(a, b)$ имеется оценка (см. 2.6)

$$\|U\| \leq \left[\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt \right]^{1/2}.$$

Следовательно, достаточным условием сходимости (в L^2) ряда Неймана будет

$$|\lambda| < \frac{1}{\left[\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt \right]^{1/2}}.$$

Если ядро $K(s, t)$ симметрично, то в 2.6 было указано точное равенство

$$\|U\| = 1/|\lambda_1|,$$

где λ_1 — наименьшее по абсолютной величине характеристическое значение ядра $K(s, t)$. Поэтому в случае симметричного ядра сходимость ряда Неймана (опять в L^2) будет иметь место для

$$|\lambda| < |\lambda_1|.$$

Точно так же, как и в 5.2 для конечных систем, здесь можно проверить, что при $|\lambda| \geq |\lambda_1|$ ряд Неймана уже не будет сходиться при любом $y \in L^2$. Таким образом, в этом случае условие (26) не только достаточно, но и необходимо для сходимости ряда Неймана.

Аналогичным путем с помощью неравенства $|\lambda_1| \geq 1/\|U\|$ получаются оценки (спизу) наименьшего по модулю характеристического значения ядра:

$$|\lambda_1| \geq \frac{1}{\max_s \int_a^b |K(s, t)| dt} \geq \frac{1}{M(b-a)}, \quad |\lambda_1| \geq \frac{1}{\left[\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt \right]^{1/2}}.$$

Отметим в заключение следующее обстоятельство. В силу замечания к теореме Банаха, (4.5) сходимость ряда Неймана будет иметь место и тогда, когда при некотором $n = 1, 2, \dots$

$$|\lambda| < 1/\sqrt[n]{\|U^n\|},$$

т. е. (в пространстве $C[a, b]$)

$$|\lambda| < \frac{1}{\left[\max_s \int_a^b |K_n(s, t)| dt \right]^{1/n}},$$

или (в пространстве $L^2(a, b)$)

$$|\lambda| < \frac{1}{\left[\int_a^b \int_a^b |K_n(s, t)|^2 ds dt \right]^{1/2n}}.$$

§ 6. Кольцо операторов в гильбертовом пространстве

6.1. Рассмотрим более подробно кольцо $B(H, H)$ линейных операторов в гильбертовом пространстве H . Выясним сначала, как связана операция перехода к сопряженному оператору с алгебраическими операциями кольца. Имеют место следующие предложения:

$$a) \quad [U_1 + U_2]^* = U_1^* + U_2^*. \quad (1)$$

В самом деле, для любых $x, y \in H$ справедливы соотношения

$$([U_1 + U_2]x, y) = (x, [U_1 + U_2]^*y),$$

$$(U_1x, y) = (x, U_1^*y),$$

$$(U_2x, y) = (x, U_2^*y).$$

Складывая второе и третье, найдем

$$([U_1 + U_2]x, y) = (x, U_1^*y + U_2^*y) = (x, [U_1^* + U_2^*]y),$$

откуда ввиду произвольности x

$$[U_1 + U_2]^*y = [U_1^* + U_2^*]y,$$

что и означает (1).

$$b) \quad [\lambda U]^* = \bar{\lambda} U^*. \quad (2)$$

Имеем

$$([\lambda U]x, y) = (x, [\lambda U]^*y), \quad x, y \in H. \quad (3)$$

По $[\lambda U]x = \lambda Ux$, поэтому

$$([\lambda U]x, y) = \lambda (Ux, y) = \lambda (x, U^*y) = (x, [\bar{\lambda} U^*]y).$$

Сравнивая это с (3), получаем (2).

$$c) \quad [U_1 U_2]^* = U_2^* U_1^*. \quad (4)$$

Действительно,

$$([U_1 U_2]x, y) = (x, [U_1 U_2]^*y), \quad x, y \in H.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} ([U_1 U_2]x, y) &= (U_1(U_2x), y) = (U_2x, U_1^*y) = \\ &= (x, U_2^*(U_1^*y)) = (x, [U_2^* U_1^*]y). \end{aligned}$$

Рассуждая, как и выше, получим (4).

d) Если оператор U имеет линейный обратный U^{-1} , то сопряженный оператор U^* также имеет линейный обратный *), причем

$$(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*. \quad (5)$$

*) Напомним, что в гильбертовом пространстве слова «линейный оператор» означают «линейный непрерывный оператор».

В самом деле, так как $U^{-1}U = UU^{-1} = I$, то на основании пункта с)

$$U^*(U^{-1})^* = (U^{-1})^*U^* = I^* = I.$$

Отсюда и следует справедливость утверждения.

В случае, когда операторы U_1 и U_2 самосопряженные, предложения а) — с) приводят к следующим результатам:

е) Если λ, μ — вещественные числа, то оператор $\lambda U_1 + \mu U_2$ самосопряженный.

ф) Произведение $U_1 U_2$ будет самосопряженным тогда и только тогда, когда $U_1 U_2 = U_2 U_1$, т. е. когда U_1 и U_2 перестановочны.

Действительно, поскольку U_1, U_2 — самосопряженные операторы, на основании пункта с)

$$[U_1 U_2]^* = U_2 U_1,$$

откуда и вытекает требуемый результат.

Пусть имеется последовательность операторов $\{U_n\}$ и оператор U . Будем говорить, что последовательность $\{U_n\}$ слабо сходится к U , если для любых $x, y \in H$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n x, y) = (U x, y).$$

Ясно, что предел слабо сходящейся последовательности самосопряженных операторов есть самосопряженный оператор.

Точно так же, если $U_n x \rightarrow U x$ при любом $x \in H$ (в этом случае мы будем говорить, что последовательность операторов $\{U_n\}$ сходится к оператору U на H) и U_n — самосопряженные операторы, то и U самосопряженный.

И, наконец, если $U_n \rightarrow U$ в пространстве $B(H, H)$, то самосопряженность операторов U_n также влечет самосопряженность оператора U .

Оба последних результата становятся очевидными, если заметить, что в обоих случаях последовательность $\{U_n\}$ слабо сходится к оператору U .

6.2. Оператор U в гильбертовом пространстве $\bar{H}$ называется *положительным* ($U \geq 0$), если $(U x, x) \geq 0$ для любого $x \in H$.

Нетрудно проверить, что в комплексном пространстве положительный оператор — самосопряженный. Действительно, пусть $(U x, x)$ вещественно при любом $x \in H$. Так как

$$(U x, y) = \frac{1}{4} \{[(U(x+y), x+y) - (U(x-y), x-y)] + \\ + i[(U(x+yi), x+yi) - (U(x-yi), x-yi)]\}$$

и выражения в скобках вещественны, то, поменяв местами x и

у, будем иметь

$$\begin{aligned}(Uy, x) &= \frac{1}{4} \{[(U(y+x), y+x) - (U(y-x), y-x)] + \\ &+ i[(U(y+xi), y+xi) - (U(y-xi), y-xi)]\} = \\ &= \frac{1}{4} \{[(U(x+y), x+y) - (U(x-y), x-y)] - \\ &- i[(U(x+yi), x+yi) - (U(x-yi), x-yi)]\} = \overline{(Ux, y)}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$(Ux, y) = \overline{(Uy, x)} = (x, Uy),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. По существу мы доказали, что оператор U , для которого выражение (Ux, x) вещественно для любого $x \in H$, самосопряженный. Нетрудно видеть, что это условие и необходимо для того, чтобы U был самосопряженным оператором.

Будем говорить, что оператор U_1 больше оператора U_2 ($U_1 \geq U_2$), если разность $U_1 - U_2$ — положительный оператор.

Отметим, что оператор U^*U (или UU^*) будет положительным, каков бы ни был оператор U . В самом деле,

$$(U^*Ux, x) = (Ux, Ux) \geq 0.$$

В частности, если $U^* = U$, т. е. если U самосопряженный, то $U^2 \geq 0$.

Также ясно, что сумма положительных операторов является положительным оператором.

Отметим еще, что линейная комбинация положительных операторов с вещественными неотрицательными коэффициентами будет снова положительным оператором.

Далее, любая степень U^n положительного оператора U является положительным оператором. Действительно, если $n = 2m$ четное *), то

$$(U^n x, x) = (U^m x, U^m x) = \|U^m x\|^2 \geq 0, \quad x \in H.$$

Если же $n = 2m + 1$ нечетное, то

$$(U^n x, x) = (U(U^m x), U^m x) = (Uy, y) \geq 0, \quad x \in H, \quad y = U^m x.$$

Из сказанного вытекает, что линейная комбинация степеней положительного оператора U с неотрицательными коэффициентами, т. е. оператор вида

$$\phi(U) = a_0 U^n + a_1 U^{n-1} + \dots + a_n I, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \geq 0,$$

будет положительным оператором. Оператор $\phi(U)$ мы будем называть *операторным полиномом от U* .

*) Если $n = 0$ и, следовательно, $U^n = I$, то утверждение, очевидно, также верно.

Пусть U — положительный оператор. Справедливо неравенство

$$|(Ux, y)|^2 \leq (Ux, x)(Uy, y), \quad x, y \in H, \quad (6)$$

которое является обобщением неравенства Буняковского (последнее получается из (6), если $U = I$). Доказательство неравенства (6) почти дословно повторяет доказательство неравенства Буняковского, приведенное в IV.5.1, в связи с чем мы предоставляем его читателю.

6.3. Основываясь на неравенстве (6), докажем своеобразную «теорему о пределе монотонной последовательности».

Теорема 1. Пусть имеется возрастающая последовательность $\{U_n\}$ самосопряженных операторов. Тогда, если $\sup_n \|U_n\| = A < \infty$, то существует линейный оператор U такой, что для любого $x \in H$

$$Ux = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x,$$

при этом

$$\|U\| \leq A. \quad (7)$$

Доказательство. Возьмем $m \geq n$. Оператор $U_m - U_n$ положительный, поэтому для любого $x \in H$

$$(U_m x, x) - (U_n x, x) = [(U_m - U_n)x, x] \geq 0,$$

т. е. числовая последовательность $\{(U_n x, x)\}$ возрастающая. Так как

$$|(U_n x, x)| \leq \|U_n x\| \|x\| \leq A \|x\|^2, \quad (8)$$

то существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n x, x)$.

Далее, применяя неравенство (6) к оператору $U_m - U_n$ ($m \geq n$), можно написать, учитывая (8),

$$\begin{aligned} |(U_m x - U_n x, y)|^2 &\leq [(U_m x, x) - (U_n x, x)][(U_m y, y) - (U_n y, y)] \leq \\ &\leq 2A \|y\|^2 [(U_m x, x) - (U_n x, x)]. \end{aligned}$$

Положим здесь

$$y = U_m x - U_n x.$$

Это приводит к соотношению

$$\|U_m x - U_n x\|^2 \leq 2A [(U_m x, x) - (U_n x, x)], \quad x \in H.$$

Выражение в правой части по доказанному стремится к нулю при $m, n \rightarrow \infty$. Следовательно, существует

$$Ux = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x.$$

Оператор U , так определяемый, аддитивен и однороден. А так как

$$\|U_n x\| \leq \|U_n\| \|x\| \leq A \|x\|,$$

то в пределе

$$\|Ux\| \leq A\|x\|,$$

т. е. U — ограниченный оператор и $\|U\| \leq A$. Теорема доказана.
Замечание. Теорема, разумеется, справедлива и для убывающей последовательности операторов.

6.4. Пусть имеется положительный оператор U . Положительный оператор V называется *квадратным корнем* из оператора U , если $V^2 = U$. При этом обозначают $V = \sqrt{U}$ или $V = U^{1/2}$.

Теорема 2. Пусть U — положительный оператор. Существует единственный квадратный корень $V = \sqrt{U}$ из оператора U . При этом V перестановочен с любым оператором, перестановочным с U .

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|U\| \leq 1$. Положим $U_0 = I - U$. Оператор U_0 — положительный, так как

$$(U_0x, x) = (x, x) - (Ux, x) \geq \|x\|^2 - \|U\| \|x\|^2 \geq 0, \quad x \in H.$$

В силу (6) имеем

$$|(U_0x, y)|^2 \leq (U_0x, x)(U_0y, y) \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

При $y = U_0x$ мы приходим к неравенству

$$\|U_0x\| \leq \|x\|.$$

Таким образом,

$$\|U_0\| \leq 1. \quad (9)$$

Определим последовательность операторов $\{V_n\}$, полагая

$$V_1 = 0, \quad V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_0 + V_n^2), \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Учитывая оценку (9), без труда можно проверить по индукции, что

$$\|V_n\| \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Установим теперь, что операторы V_n и $V_{n+1} - V_n$ являются операторными полиномами от U_0 с неотрицательными коэффициентами. Для $n=1$ это очевидно. Далее, поскольку действия с операторными полиномами производятся по тем же правилам, что и для обычных полиномов, из формулы (10) вытекает, что если V_n есть операторный полином от U_0 с неотрицательными коэффициентами, то таким же полиномом будет и V_{n+1} . Если, опять воспользовавшись формулой (10), записать

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{2}(U_0 + V_n^2) - \frac{1}{2}(U_0 + V_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(V_n^2 - V_{n-1}^2) = \\ &= \frac{1}{2}(V_n + V_{n-1})(V_n - V_{n-1}), \end{aligned}$$

то, предполагая уже доказанным, что $V_n - V_{n-1}$ есть операторный полином с неотрицательными коэффициентами, и учитывая, что $V_n + V_{n-1}$ по доказанному является таким полиномом, получим, что оператор $V_{n+1} - V_n$, будучи произведением операторных полиномов от U_0 с неотрицательными коэффициентами, сам будет операторным полиномом от U_0 с неотрицательными коэффициентами.

Используя положительность операторного полинома с неотрицательными коэффициентами (см. 6.2), можно заключить, что $V_n \geq 0$ и $V_{n+1} - V_n \geq 0$. Иначе говоря, последовательность $\{V_n\}$ возрастающая и V_n , будучи положительными, будут также и самосопряженными. Так как по (11) последовательность $\{V_n\}$ ограничена, то на основании теоремы 1 существует оператор V_0 такой, что

$$V_0 x = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n x.$$

При этом, поскольку V_n — положительные операторы, V_0 также положителен, а вследствие (11)

$$\|V_0\| \leq 1. \quad (12)$$

Пусть оператор $\bar{U}$ перестановочен с оператором U и, следовательно, с U_0 . Операторы V_n также, очевидно, перестановочны с $\bar{U}$, а тогда

$$\bar{U} V_0 x = \bar{U} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} V_n x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U} V_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n \bar{U} x = V_0 \bar{U} x, \quad x \in H,$$

т. е. V_0 перестановочен с $\bar{U}$. В частности, V_0 перестановочен с любым из операторов V_n . Отсюда $V_0^2 - V_n^2 = (V_0 + V_n)(V_0 - V_n)$, и поэтому

$$\|V_0^2 x - V_n^2 x\| \leq \|V_0 + V_n\| \|V_0 x - V_n x\| \leq 2 \|V_0 x - V_n x\| \rightarrow 0, \quad x \in H,$$

так что

$$V_0^2 x = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^2 x, \quad x \in H.$$

Переходя в соотношении

$$V_{n+1} x = \frac{1}{2} (U_0 x + V_n^2 x), \quad n = 1, 2, \dots; \quad x \in H$$

к пределу при $n \rightarrow \infty$, найдем

$$V_0 x = \frac{1}{2} (U_0 x + V_0^2 x), \quad x \in H.$$

Следовательно, полагая $V = I - V_0$, будем иметь

$$V^2 = I - 2V_0 + V_0^2 = [I - 2V_0] + [2V_0 - U_0] = I - U_0 = U.$$

Учитывая (12), мы докажем положительность оператора V так же, как в свое время доказали положительность оператора U_0 . Таким образом, $V = \sqrt{U}$.

Заметим еще, что V , так же как и V_0 , перестановочен с любым оператором, перестановочным с U .

Докажем теперь единственность квадратного корня. Пусть V' — квадратный корень из U . Так как

$$UV' = V'^2 = V'U,$$

то V' перестановочен с U и, следовательно, V также перестановочен с V' . Возьмем произвольный $x \in H$ и обозначим $y = V'x - Vx$. Имеем

$$\begin{aligned} (V'y, y) + (Vy, y) &= ([V' + V][V' - V]x, y) = \\ &= ([V'^2 - V^2]x, y) = ([U - U]x, y) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, поскольку $(Vy, y) \geq 0$ и $(V'y, y) \geq 0$,

$$(Vy, y) = (V'y, y) = 0.$$

Обозначим через W какой-нибудь квадратный корень из V . Так как

$$\|Wy\|^2 = (Wy, Wy) = (W^2y, y) = (Vy, y) = 0,$$

то $Wy = 0$ и, тем более, $Vy = W(Wy) = 0$. Аналогично $V'y = 0$. Но тогда

$$\|V'x - Vx\|^2 = ([V' - V]^2x, x) = ([V' - V]y, x) = 0$$

и $V'x = Vx$ для любого $x \in H$. Следовательно, $V' = V$.

Теорема полностью доказана *).

Следствие. Если U_1 и U_2 — положительные перестановочные между собой операторы, то их произведение — также положительный оператор.

Действительно, оператор $\sqrt{U_2} = V$ перестановочен с U_1 , поэтому $(U_1U_2x, x) = (U_1V^2x, x) = (VU_1Vx, x) = (U_1(Vx), Vx) \geq 0$ ($x \in H$).

6.5. В случае, когда U — самосопряженный оператор, теорема V.4.1 об области сходимости ряда

$$I + U + \dots + U^n + \dots \quad (13)$$

упрощается.

Теорема 3. Если U — самосопряженный оператор, то для сходимости ряда (13) необходимо и достаточно, чтобы $\|U\| < 1$.

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\|U^2\| = \|U\|^2. \quad (14)$$

*) Приведенное доказательство принадлежит Виссеру (существование) и Сёкефальви-Надю (единственность). См. Рисс, Сёкефальви-Надь.

Действительно,

$$\|U\|^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|^2}{\|x\|^2} = \sup_{x \neq 0} \frac{(U^2x, x)}{\|x\|^2} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|U^2x\|}{\|x\|} = \|U^2\|,$$

и противоположное неравенство $\|U^2\| \leq \|U\|^2$ выполнено для любого оператора U .

Из (14) следует

$$\|U^{2m}\| = \|U\|^{2m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

$$c_U = \lim_{n \rightarrow \infty} \|U^n\|^{1/n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|U^{2m}\|^{1/2m} = \|U\|. \quad (16)$$

Учитывая результат теоремы 4.1 и соотношение (16), достаточно проверить, что ряд (13) расходится, если $c_U = \|U\| = 1$. Но в этом случае согласно (15)

$$\|U^{2m}\| = 1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

и общий член ряда (13) не стремится к нулю.

6.6. В нормированном кольце $B(H, H)$ операторов в гильбертовом пространстве H большую роль играет семейство проекторов (3.4). Как будет показано в гл. IX, § 5, любой самосопряженный оператор может быть с помощью особой конструкции сведен к проекторам. Этим обстоятельством объясняется важность приводимых ниже теорем о проекторах.

Два проектора P_1 и P_2 называются *ортогональными*, если $P_1P_2 = 0$ *). Обозначим через H_1 , соответственно через H_2 , подпространство, на которое проектирует проектор P_1 , соответственно P_2 . Для того чтобы проекторы P_1 и P_2 были ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы были ортогональны подпространства H_1 и H_2 . Действительно, пусть $P_1P_2 = 0$, $x' \in H_1$, $x'' \in H_2$. Используя пункт б) из 3.4 и теорему 3.2, будем иметь

$$(x', x'') = (P_1x', P_2x'') = (x', P_1P_2x'') = 0.$$

Если, наоборот, $H_1 \perp H_2$ и $x \in H$, то $P_2x \in H_2$ и, следовательно, $P_2x \perp H_1$, а тогда по пункту с) из 3.4 $P_1P_2x = 0$, т. е. $P_1P_2 = 0$.

Теорема 4. Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ — проекторы. Для того чтобы оператор $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ был проектором, необходимо и достаточно, чтобы проекторы $P_1, P_2, \dots, P_n$ были попарно ортогональны.

Доказательство. Необходимость. Пусть P — проектор. В силу теоремы 3.2

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (P^2x, x) = (Px, x), \quad x \in H \quad (17)$$

*) Поскольку 0 является самосопряженным оператором, то по пункту ф) из 6.1 операторы P_1 и P_2 перестановочны, так что $P_2P_1 = P_1P_2 = 0$, и определение не зависит от порядка, в котором упоминаются проекторы.

и аналогично

$$\|P_k x\|^2 = (P_k x, x), \quad x \in H; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|P_1 x\|^2 + \|P_2 x\|^2 &\leq \sum_{k=1}^n \|P_k x\|^2 = \sum_{k=1}^n (P_k x, x) = (Px, x) = \\ &= \|Px\|^2 \leq \|x\|^2, \quad x \in H. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим произвольный элемент $y \in H$ и положим в (18) $x = P_1 y$. Так как $P_1 x = P_1^2 y = P_1 y$, это даст

$$\|P_1 y\|^2 + \|P_2 P_1 y\|^2 \leq \|P_1 y\|^2.$$

Отсюда следует, что $P_2 P_1 y = 0$ и $P_2 P_1 = 0$ — проекторы P_1 и P_2 ортогональны. Так же докажем попарную ортогональность других проекторов.

Достаточность. Проверим, что оператор $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2 и тем самым является проектором. Поскольку P есть сумма самосопряженных операторов, он и сам есть самосопряженный оператор (6.1, пункт d). Убедимся, что $P^2 = P$. Ввиду того, что P_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — попарно ортогональные проекторы, т. е.

$$P_j P_k = \begin{cases} 0 & (j \neq k), \\ P_k & (j = k), \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots, n,$$

имеем

$$P^2 = \left(\sum_{k=1}^n P_k \right)^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n P_j P_k = \sum_{k=1}^n P_k = P.$$

Теорема доказана.

В предположении, что выполнены условия теоремы, выясним структуру подпространства H , на которое проектирует проектор $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$. Обозначим через H_k подпространства, соответствующие проектору P_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Пусть $x \in H$. Тогда

$$x = Px = P_1 x + P_2 x + \dots + P_n x = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

где $x_k = P_k x \in H_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Пусть, наоборот, x — элемент, допускающий представление в форме

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad x_k \in H_k; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Поскольку $PP_k = \sum_{j=1}^n P_j P_k = P_k$ и $x_k = P_k x_k = PP_k x_k$, то

$$Px = \sum_{k=1}^n Px_k = \sum_{k=1}^n PP_k x_k = \sum_{k=1}^n x_k = x,$$

т. е. $x \in H$. Ввиду того, что $P_k x_j = 0$ ($j \neq k$),

$$x_k = \sum_{j=1}^n P_k x_j = P_k \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) = P_k x, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

откуда, в частности, следует единственность представления x в форме (19).

Резюмируя, можно сказать, что подпространство H состоит из всех элементов x , допускающих представление в форме (19). H называется *ортогональной суммой* подпространств $H_1, H_2, \dots, H_n$ и обозначается

$$\tilde{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n = \bigoplus_{k=1}^n H_k.$$

6.7. Перейдем теперь к изучению разности и произведения проекторов. Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 1. Пусть P_1 и P_2 — проекторы, проектирующие на подпространства H_1 и H_2 соответственно. Следующие четыре условия эквивалентны:

а) $P_1 \geq P_2$; б) $H_1 \supset H_2$; в) $P_1 P_2 = P_2$; д) $P_2 P_1 = P_2$.

Доказательство. Из а) следует б). Действительно, пусть $x \in H$. Так как $P_1 x \perp x - P_1 x$, то

$$\|x\|^2 = \|P_1 x\|^2 + \|x - P_1 x\|^2. \quad (20)$$

Если $x \in H_2$, то $P_2 x = x$ и $(P_2 x, x) = (x, x) = \|x\|^2$. Тем более

$$\|x\|^2 \geq \|P_1 x\|^2 = (P_1 x, P_1 x) = (P_1 x, x) \geq (P_2 x, x) = \|x\|^2,$$

так что из (20) получаем $x = P_1 x$, что означает $x \in H_1$.

Из б) вытекает в). Пусть $x \in H$. Учитывая, что $P_2 x \in H_2$ и, следовательно, $P_2 x \in H_1$, имеем $P_1 P_2 x = P_2 x$.

Из в) вытекает д). Поскольку произведение самосопряженных операторов P_1 и P_2 есть проектор и, значит, самосопряженный оператор, P_1 и P_2 перестановочны: $P_2 P_1 = P_1 P_2 = P_2$.

Из д) вытекает а). В самом деле, для $x \in H$

$$(P_2 x, x) = \|P_2 x\|^2 = \|P_2 P_1 x\|^2 \leq \|P_1 x\|^2 = (P_1 x, x).$$

Теорема 5. Пусть P_1 и P_2 — проекторы. Для того чтобы $P = P_1 - P_2$ был проектором, необходимо и достаточно, чтобы $P_1 \geq P_2$.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть P — проектор. Так как $P_1 = P + P_2$, то по предыдущей теореме $PP_2 = 0$, т. е. $(P_1 - P_2)P_2 = P_1 P_2 - P_2 = 0$ и выполнен пункт в) леммы.

Достаточность. Очевидно, P — самосопряженный оператор. Далее по пунктам в) и д) леммы

$$P^2 = P_1^2 - P_1 P_2 - P_2 P_1 + P_2^2 = P_1 - P_2 - P_2 + P_2 = P;$$

остается применить теорему 3.2.

Обозначим через $\tilde{H}$ подпространство, на которое проектирует проектор P . Предоставляем читателю доказать, что $\tilde{H}$ состоит из всех элементов $x \in H_1$, ортогональных подпространству H_2 . Подпространство $\tilde{H}$ называется *ортогональным дополнением* подпространства H_2 в подпространстве H_1 и обозначается $\tilde{H} = H_1 \ominus H_2$.

Замечание. Если $P_1 = I$, то условие теоремы, очевидно, выполнено при любом P_2 . Таким образом, $P = I - P_2$ является проектором, каков бы ни был проектор P_2 . При этом P проектирует H на ортогональное дополнение $H \ominus H_2$ подпространства H_2 .

Докажем теорему, относящуюся к произведению проекторов.

Теорема 6. Пусть P_1 и P_2 — проекторы. Чтобы оператор $P = P_1 P_2$ был проектором, необходимо и достаточно, чтобы P_1 и P_2 были перестановочны.

Доказательство. Условие необходимо уже для того, чтобы P был самосопряженным оператором.

Достаточность условия проверяется опять с помощью теоремы 3.2, если учесть, что P — самосопряженный оператор и

$$P^2 = P_1 P_2 P_1 P_2 = P_1^2 P_2^2 = P.$$

Предоставляем читателю проверить, что подпространство, на которое проектирует проектор P , есть в данном случае пересечение подпространств H_1 и H_2 .

6.8. Применение теоремы 1 к возрастающей (или убывающей) последовательности $\{P_n\}$ проекторов приводит к следующему важному факту.

Теорема 7. Пусть $\{P_n\}$ — монотонная последовательность проекторов. Тогда для любого $x \in H$ существует

$$Px = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n x, \quad (21)$$

причем оператор P является проектором на подпространство $\tilde{H}$, где

$$\tilde{H} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n},$$

если последовательность $\{P_n\}$ возрастающая, и

$$\tilde{H} = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n,$$

если эта последовательность убывающая. Здесь H_n означают подпространства, соответствующие проекторам P_n ($n = 1, 2, \dots$).

Доказательство. Пусть $\{P_n\}$ — возрастающая последовательность. Существование предела (21) следует из теоремы 1, так как $\|P_n\| \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$). Докажем, что P есть проектор на $\tilde{H}$. Для этого достаточно проверить, что если $x \in \tilde{H}$, то $Px = x$, а если $x \perp \tilde{H}$, то $Px = 0$. Обозначим $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ и возьмем $x \in \Omega$.

Найдем m такое, что $x \in H_n$ ($n \geq m$). Это значит, что $P_n x = x$ ($n \geq m$), а тогда $Px = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = x$. Учитывая, что $\tilde{H} = \bar{\Omega}$, получим, что $Px = x$ и для $x \in \tilde{H}$. Пусть теперь $x \perp \tilde{H}$. Тогда, тем более, $x \perp H_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Поэтому $P_n x = 0$ и, переходя к пределу, получим $Px = 0$.

Сходные рассуждения приводят к цели и в случае, когда последовательность $\{P_n\}$ убывающая.

Замечание. Теорема остается верной, если вместо последовательности $\{P_n\}$ рассматривать семейство проекторов $\{P_\lambda\}$, зависящих от непрерывно меняющегося вещественного параметра.

Следствие. Пусть $\{P_k\}$ — совокупность попарно ортогональных проекторов. Тогда при любом $x \in H$ сходится ряд

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x \quad (22)$$

и оператор P является проектором.

Действительно, надо применить доказанную теорему к возрастающей последовательности $\{P^{(n)}\}$ $\left(P^{(n)} = \sum_{k=1}^n P_k; n = 1, 2, \dots \right)$ проекторов.

Предоставляем читателю проверить, что проектор P проектирует H на подпространство $\tilde{H}$, состоящее из всех элементов $x \in H$, которые допускают представление в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad x_k \in H_k; \quad k = 1, 2, \dots; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty.$$

Подпространство $\tilde{H}$ называется *ортогональной суммой* (ср. 6.6) подпространств $H_1, H_2, \dots$ и обозначается

$$\tilde{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k.$$

§ 7. Слабая топология и рефлексивные пространства

7.1. В III.2.2 мы установили теорему Хана — Банаха для ЛВП и вывели ряд важнейших следствий из нее, связанных с наличием достаточного множества линейных непрерывных функционалов. Сейчас мы приведем результаты по этой тематике в формулировке, наиболее удобной в нормированном случае.

Теорема 1 (Хан — Банах). Пусть X — нормированное пространство, f_0 — линейный непрерывный функционал, заданный на подпространстве $X_0 \subset X$. Тогда существует линейный непрерывный функционал f , заданный на всем X и являющийся распространением f_0 , причем $\|f\| = \|f_0\|$.

Доказательство. Так как f_0 непрерывен на X_0 , то $|f_0(x)| \leq \|f_0\| \|x\|$ ($x \in X_0$). В силу теоремы II.4.2 существует расширение f функционала f_0 на X , для которого $|f(x)| \leq \|f_0\| \|x\|$ ($x \in X$), откуда $\|f\| \leq \|f_0\|$. С другой стороны, из $X_0 \subset X$ выводим $\|f_0\| \leq \|f\|$, что и доказывает теорему.

Из следствия 2 теоремы III.2.4 получаем

Теорема 2. Для любого отличного от нуля элемента x_0 нормированного пространства X существует такой функционал $f \in X$, что

$$\|f\| = 1, \quad f(x_0) = \|x_0\|,$$

т. е. на элементе x_0 реализуется знак равенства в неравенстве $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$.

Следствие. Для любого $x \in X$ имеем

$$\|x\| = \sup \{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| \leq 1\}.$$

Обобщением теоремы 2 является

Теорема 3. Пусть Ω — линейное множество, содержащееся в нормированном пространстве X , и $x_0 \in X$ — элемент, расстояние от которого до Ω равно $d > 0$ ($\rho(x_0, \Omega) = d$).

Тогда существует такой функционал $f \in X^*$, что

$$f(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \|f\| = 1, \quad f(x_0) = d.$$

Доказательство. Обозначим через X_0 элементарное линейное расширение множества Ω , полученное присоединением к Ω элемента x_0 , т. е. $X_0 = \mathcal{L}(\Omega, x_0)$. Так как $x \notin \Omega$, то представление $x \in X_0$ в форме

$$x = \lambda x_0 + x', \quad x' \in \Omega,$$

единственно. Положим для $x \in X_0$

$$f_0(x) = \lambda d.$$

Ясно, что f_0 — линейный функционал. При этом $f_0(x_0) = d$ и $f_0(x) = 0$ для $x \in \Omega$. Далее,

$$\|x\| = \|\lambda x_0 + x'\| = |\lambda| \left\| x_0 + \frac{x'}{\lambda} \right\| \geq |\lambda| \rho(x_0, \Omega) = |\lambda| d = |f_0(x)|.$$

Поэтому функционал f_0 ограниченный и $\|f_0\| \leq 1$. Чтобы получить противоположное неравенство, подберем $x' \in \Omega$ так, что $\|x_0 - x'\| < d + \varepsilon$. Тогда

$$d = f_0(x_0) = f_0(x_0 - x') \leq \|f_0\| \|x_0 - x'\| < \|f_0\| (d + \varepsilon),$$

откуда

$$\|f_0\| < \frac{d}{d + \varepsilon}$$

и ввиду произвольности ε будет $\|f_0\| = 1$.

Применяя к f_0 теорему 1 о распространении функционала, мы и получим функционал f с требуемыми свойствами.

Замечание 1. Теорема 2 о достаточном числе функционалов является частным случаем теоремы 3. Именно, если $\Omega = \{0\}$, то $\rho(x_0, \Omega) = \|x_0\|$.

Замечание 2. В теоремах 2 и 3 иногда удобнее использовать другую формулировку, которая получается, если вместо f рассмотреть функционал $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{d} f(x).$$

Функционал $\tilde{f}$ обладает следующими свойствами:

$$\tilde{f}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \|\tilde{f}\| = \frac{1}{d}, \quad \tilde{f}(x_0) = 1.$$

Дадим одно применение теоремы 3. Будем говорить, что система элементов $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) нормированного пространства X допускает биортогонализацию, если существует такая система функционалов $\{f_\alpha\}$ ($\alpha \in A$), $f_\alpha \in X^*$, что

$$f_{\alpha'}(x_\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha' \neq \alpha, \\ 1, & \alpha' = \alpha. \end{cases}$$

Теорема 4. Для того чтобы система $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) допускала биортогонализацию, необходимо и достаточно, чтобы она была минимальной, т. е. чтобы ни один из элементов x_α не принадлежал замкнутой линейной оболочке совокупности остальных.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_\alpha\}$ — система, допускающая биортогонализацию. Если при некотором α_0 оказалось бы

$$x_{\alpha_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} x_{\alpha_k}, \quad \alpha_k \neq \alpha_0,$$

то

$$f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} f_{\alpha_0}(x_{\alpha_k}) = 0,$$

тогда как в действительности $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = 1$.

Достаточность. Пусть теперь $\{x_\alpha\}$ — минимальная система. Обозначим через $X_{\alpha'}$ замкнутую линейную оболочку совокупности элементов $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \neq \alpha'$). Так как $x_{\alpha'} \notin X_{\alpha'}$, а $X_{\alpha'}$ — замкнутое линейное множество, то по теореме 3 (точнее, по замечанию 2 к ней) найдется функционал $f_{\alpha'}$, обращающийся в нуль на $X_{\alpha'}$ (т. е. $f_{\alpha'}(x_\alpha) = 0$ при $\alpha \neq \alpha'$) и такой, что $f_{\alpha'}(x_{\alpha'}) = 1$. Семейство функционалов $\{f_{\alpha'}\}$ удовлетворяет требованиям определения, т. е. система $\{x_\alpha\}$ допускает биортогонализацию.

Замечание. Всякая конечная система $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимых элементов минимальна. Действительно,

$x_i \notin \mathcal{L}(\{x_k\})$ ($k \neq i$) в силу линейной независимости, а по замкнутости конечномерного линейного множества x_i не принадлежит и его замыканию.

Из этого замечания следует, что для всякой конечной системы линейно независимых элементов существует система функционалов, биортогональная к ней.

Применяя теорему 4 к гильбертову пространству и учитывая общую форму линейного функционала в гильбертовом пространстве (см. V.3.2), мы приходим к следующему результату.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность элементов гильбертова пространства H . Для того чтобы в H существовала последовательность $\{y_n\}$, биортогональная к данной, т. е. такая, что

$$(x_m, y_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была минимальной.

Теорема о распространении линейного функционала в вещественном случае доказана Ханом. По существу имеется у Банаха [2]. Следствия из теоремы о распространении линейного функционала указаны в монографии Банаха.

7.2. В III.3.1 мы для любой дуальной пары векторных пространств, определили соответствующую слабую топологию. Далее нас будет интересовать следующая ситуация. Пусть X — нормированное пространство, X^* — его сопряженное. Будем рассматривать топологию $\sigma(X, X^*)$ на X , которую мы будем называть *слабой топологией* нормированного пространства X , и топологию $\sigma(X^*, X)$ на X^* , которую мы будем называть *(*)-слабой топологией* пространства X^* . Таким образом, на X^* рассматриваются две слабые топологии: *(*)-слабая* — $\sigma(X^*, X)$ и *слабая* — $\sigma(X^*, X^{**})$, причем $\sigma(X^*, X) \leq \sigma(X^*, X^{**})$ (последнее неравенство является строгим в перефлексивном случае; см. ниже). Сходимость в слабой ((*)-слабой) топологии мы будем называть *слабой ((*)-слабой) сходимостью*, а сходимость по норме — *сильной сходимостью*. Аналогично понимаются термины *слабая компактность*, *слабая ограниченность*, *слабая замкнутость* и т. д.

Лемма 1. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара векторных пространств, причем Y содержит счетное тотальное на X множество $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда топология $\sigma(X, Y)$ метризуема на слабо компактных множествах.

Доказательство. Пусть K — $\sigma(X, Y)$ -компактное множество в X . Определим метрику на K по формуле

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n) \|f_n\|^{-1} |f_n(x - y)|, \quad x, y \in K.$$

Так как K слабо компактно, то K слабо ограничено, откуда $\rho(x, y) < \infty$. Если $\rho(x, y) = 0$, то $f_n(x - y) = 0$ при всех n . Следовательно, в силу тотальности $\{f_n\}$ на X получаем $x = y$. Остальные свойства метрики для ρ очевидны.

Рассмотрим тождественное отображение $i: (K, \sigma(X, Y)) \rightarrow (K, \rho)$, где (K, ρ) — метрическое пространство с метрикой ρ . Очевидно, что i — непрерывное отображение, а тогда по следствию 3 теоремы 1.2.5 i — гомеоморфизм, чем и доказана метризуемость пространства $(K, \sigma(X, Y))$.

Важную роль в различных вопросах играет класс сепарабельных B -пространств. Мы приведем здесь некоторые результаты об этом классе.

Следствие. Если X — сепарабельное нормированное пространство, то топология $\sigma(X, X^)$ метризуема на слабо компактных множествах.*

Доказательство. Проверим, что выполнено условие леммы 1. Пусть $\{x_n\}$ — счетное всюду плотное в X множество. В силу теоремы 2 для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $f_n \in X^*$, $\|f_n\| = 1$, для которого $f_n(x_n) = \|x_n\|$. Предположим, что $f_n(x) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $x = 0$. Выберем последовательность $x_{n_m} \rightarrow x$. Тогда

$$\|x_{n_m}\| = |f_{n_m}(x_{n_m})| = |f_{n_m}(x_{n_m}) - f_{n_m}(x)| \leq \|f_{n_m}\| \|x_{n_m} - x\| \rightarrow 0,$$

откуда $x_{n_m} \rightarrow 0$ и, следовательно, $x = 0$.

Теорема 5. *Если сопряженное X^* к нормированному пространству X сепарабельно, то X сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — всюду плотное подмножество в X^* . В силу определения нормы функционала для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $x_n \in X$, для которого $\|x_n\| \leq 1$ и $|f_n(x_n)| \geq (1/2)\|f_n\|$. Множество E линейных комбинаций элементов x_n с рациональными коэффициентами счетно. Покажем, что E — плотно в X . Очевидно, что $\bar{E}$ — замкнутое линейное множество. Если $\bar{E} \neq X$, то по теореме 2 найдется $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, такое, что $f(x) = 0$, $x \in \bar{E}$. Пусть $f_{n_k} \rightarrow f$ по норме. Тогда

$$(1/2)\|f_{n_k}\| \leq |f_{n_k}(x_{n_k})| = |(f_{n_k} - f)(x_{n_k})| \leq \|f_{n_k} - f\| \rightarrow 0,$$

откуда $f_{n_k} \rightarrow 0$, $f = 0$, что противоречит равенству $\|f\| = 1$.

Пусть X — нормированное пространство. Полярной к замкнутому единичному шару *) B_X пространства X является замкнутый единичный шар B_{X^*} сопряженного пространства. Тогда по теореме Алаоглу — Бурбаки (теорема III.3.7) шар B_{X^*} $\sigma(X^*, X)$ -компактен. Отметим, что B_{X^*} не всегда (*)-слабо секвенциально компактен (например, если $X = l^\infty$; см. X.3.4), однако если X сепарабельно, то B_{X^*} секвенциально компактен.

*) Здесь и далее $B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$.

Теорема 6. Если X — сепарабельное нормированное пространство, то единичный шар B_{X^*} со $(*)$ -слабой топологией метризуем, а тем самым и секвенциально компактен.

Доказательство. Рассмотрим пространство X как множество линейных функционалов на X^* и соответствующую дуальную пару $\langle X^*, X \rangle$. Счетное всюду плотное в X множество, очевидно, тотально на X^* . Теперь применима лемма 1.

Замечание. Если шар B_{X^*} метризуем в $(*)$ -слабой топологии, то пространство X сепарабельно.

7.3. Пусть X — нормированное пространство. Поскольку X^* в свою очередь является нормированным пространством, имеет смысл говорить о пространстве $X^{**} = (X^*)^*$, сопряженном к X^* , — это есть совокупность всех линейных непрерывных функционалов на X^* . Точно так же можно рассматривать пространство X^{***} и т. д.

Рассмотрим каноническое вложение $\pi_X: X \rightarrow X^{**}$ (см. III.3.2), которое мы далее будем обозначать просто π . Напомним, что каждому $x \in X$ отображение π сопоставляет функционал F_x на X^* , определяемый формулой

$$F_x(f) = \overline{f(x)}, \quad f \in X^*.$$

Ясно, что

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\| \|f\|,$$

откуда $F_x \in X^{**}$. Таким образом, π отображает X в X^{**} . В силу следствия теоремы 2

$$\begin{aligned} \|\pi(x)\| = \|F_x\| &= \sup \{|F_x(f)| : f \in X^*, \|f\| \leq 1\} = \\ &= \sup \{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| \leq 1\} = \|x\|, \end{aligned}$$

откуда получаем, что π — линейная изометрия пространства X на подпространство $\pi(X)$ в X^{**} .

B -пространство X называется *рефлексивным*, если $\pi(X) = X^{**}$, т. е. X изометрично X^{**} при каноническом вложении π . Поскольку соответствие, осуществляющее изометрию, имеет в данном случае специальный вид, наличия линейной изометрии между пространствами X и X^{**} недостаточно для заключения о рефлексивности пространства X (соответствующий пример см. в статье Джеймса [1]).

Легко видеть, что любое конечномерное B -пространство рефлексивно. Предоставляем читателю доказать, опираясь на теорему 3.1 об общей форме линейного функционала в гильбертовом пространстве, что гильбертово пространство рефлексивно. Как мы увидим ниже, пространства L^p ($1 < p < \infty$) рефлексивны, а L^1 , L^∞ , $C[0, 1]$, c_0 — нет.

Теорема 7. Для рефлексивности B -пространства X необходимо и достаточно, чтобы замкнутый единичный шар B_X был слабо компактен.

Доказательство. Необходимость. В силу рефлексивности X шар B_X совпадает с замкнутым единичным шаром $B_{X^{**}}$ пространства X^{**} , который $\sigma(X^{**}, X^*)$ -компактен по теореме Алаоглу — Бурбаки.

Достаточность. Если мы покажем, что множество $\pi(B_X)$ совпадает с $B_{X^{**}}$, то мы получим $\pi(X) = X^{**}$. По теореме о биполяре $B_X^{\circ\circ}$ есть $\sigma(X^{**}, X^*)$ -замыкание множества $\pi(B_X)$. Так как шар B_X слабо компактен, то множество $\pi(B_X)$ $\sigma(X^{**}, X^*)$ -замкнуто, откуда $B_X^{\circ\circ} = \pi(B_X)$. С другой стороны, по определению биполяры $B_X^{\circ\circ} = B_{X^{**}}$, откуда и получаем требуемое соотношение $\pi(B_X) = B_{X^{**}}$.

Следствие 1. Любое замкнутое подпространство рефлексивного B -пространства X рефлексивно.

Доказательство. Пусть Y — замкнутое подпространство в X , B_Y — его замкнутый единичный шар. Так как шар B_X слабо компактен в X и $B_Y = B_X \cap Y$, то в силу следствия 3 теоремы III.3.2 шар B_Y слабо компактен в Y . Опять применяя теорему 7, получаем, что пространство Y рефлексивно.

Следствие 2. B -пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда рефлексивно его сопряженное X^* .

Доказательство. Если X рефлексивно, то топологии $\sigma(X^*, X)$ и $\sigma(X^*, X^{**})$ совпадают на X^* . Так как по теореме Алаоглу — Бурбаки шар B_{X^*} $(*)$ -слабо компактен, то в силу отмеченного свойства этот шар слабо компактен и по теореме 7 X^* рефлексивно.

Если X^* рефлексивно, то, как уже доказано, X^{**} рефлексивно. Так как $\pi(X)$ — замкнутое подпространство в X^{**} , то по следствию 1 $\pi(X)$, а тогда и X , рефлексивно.

Следствие 3. Слабая и $(*)$ -слабая топологии пространства X^* совпадают на единичном шаре B_{X^*} тогда и только тогда, когда X рефлексивно.

Доказательство. Если слабая и $(*)$ -слабая топологии совпадают на B_{X^*} , то шар B_{X^*} слабо компактен, а тогда X^* рефлексивно. Значит, по следствию 2 X рефлексивно. Обратное утверждение очевидно.

Замечание. Если B -пространства X и Y изоморфны и X рефлексивно, то Y рефлексивно.

С дальнейшими примерами рефлексивных B -пространств мы познакомимся ниже.

7.4. Здесь мы сформулируем без доказательства несколько важных результатов, связанных со слабой топологией.

Пусть X — B -пространство. Как можно описать множество $\pi(X)$? Конечно, оно состоит из всех функционалов $F \in X^{**}$, которые $\sigma(X^*, X)$ -непрерывны. Однако проверка $(*)$ -слабой непрерывности на неограниченных направлениях функционалов весьма затруднительна. В связи с этим заслуживает внимания

Теорема 8 (А. Гротендик). Если X — B -пространство, то $F \in \pi(X)$ тогда и только тогда, когда

$$\text{из } f_\alpha \rightarrow 0 \text{ (в } (X^*, X)) \text{ и } \|f_\alpha\| \leq 1, \quad \alpha \in A, \quad (*)$$

следует, что $F(f_\alpha) \rightarrow 0$.

Если X — сепарабельное B -пространство, то в условии $(*)$ направления можно заменить последовательностями.

Пseudобство работы с неограниченными направлениями функционалов мотивирует важность и следующей теоремы.

Теорема 9 (Крейн — Шмудля). Если X — B -пространство, то выпуклое подмножество E в X^* является $(*)$ -слабо замкнутым, если $(*)$ -слабо замкнуто при любом $n \in \mathbb{N}$ множество $\{x \in E: \|x\| \leq n\}$.

В теоремах 8 и 9 условие полноты X является необходимым для их справедливости. Доказательства см. в Шефер — I (гл. IV, § 6).

§ 8. Распространение линейных операторов

8.1. Теорема Хана — Баха утверждает, что любой линейный непрерывный функционал, заданный на подпространстве нормированного пространства X , допускает линейное непрерывное продолжение на все X . Для операторов аналогичное утверждение уже не имеет места. В этом параграфе мы рассмотрим, какие положительные результаты можно получить в этом направлении.

Условимся в обозначениях. Пусть U_0 и U — два оператора, переводящие соответственно множества Ω_0 и Ω пространства X в пространство Y . Если $\Omega_0 \subset \Omega$ и для $x \in \Omega_0$ имеет место $U(x) = U_0(x)$, то U называется *распространением* (или *продолжением*) оператора U_0 . При этом пишут $U_0 \subset U$.

Теорема 1*). Пусть X и Y — нормированные пространства и U_0 — оператор из $\Omega \subset X$ в Y . Для того чтобы U_0 допускал линейное непрерывное распространение U на множество $\mathcal{L}(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная C , что

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k U_0(x_k) \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\|, \quad (1)$$

каковы бы ни были совокупности $x_1, x_2, \dots, x_n$ из Ω и чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Доказательство. Необходимость. Если распространение U существует, то, поскольку элемент $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ при-

*). См. Рисс [2].

надлежит $\mathcal{L}(\Omega)$, имеем

$$U(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k U(x_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_0(x_k).$$

Но по линейности и ограниченности оператора U имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k U_0(x_k) \right\| = \|U(x)\| \leq \|U\| \|x\| = \|U\| \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\|,$$

т. е. (1) выполнено при $C = \|U\|$.

Достаточность. Из (1) сразу же следует, что если линейная комбинация элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна нулевому элементу $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0$, то и $\sum_{k=1}^n \alpha_k U_0(x_k) = 0$.

Возьмем теперь произвольный элемент $x \in \mathcal{L}(\Omega)$:

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, \quad x_k \in \Omega; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Положим

$$U(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_0(x_k). \quad (3)$$

Докажем, что несмотря на возможную многозначность представления (2), значение оператора (3) определяется элементом x однозначно. Действительно, если $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \lambda'_k x_k$ *), то

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda'_k) x_k = 0. \text{ Следовательно, как было отмечено выше,}$$

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda'_k) U_0(x_k) = 0. \text{ Стало быть}$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k U_0(x_k) = \sum_{k=1}^n \lambda'_k U_0(x_k).$$

Линейность оператора U без труда проверяется. В самом

$$\text{деле, если } x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, \text{ а } y = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k, \text{ то } x + y = \sum_{k=1}^n (\lambda_k + \mu_k) x_k \text{ и}$$

$$U(x + y) = \sum_{k=1}^n (\lambda_k + \mu_k) U_0(x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \lambda_k U_0(x_k) + \sum_{k=1}^n \mu_k U_0(x_k) = U(x) + U(y).$$

*) Считая элементы x_k в обеих суммах одинаковыми, мы не уменьшаем общности, так как в каждой сумме можно приписать слагаемое с недостающими x_k с нулевыми коэффициентами.

Из (1) вытекает ограниченность оператора U , так как

$$\|U(x)\| \leq C\|x\|, \quad x \in \mathcal{L}(\Omega).$$

Очевидно также, что U есть распространение оператора U_0 .

Теорема полностью доказана.

8.2. Следующая теорема устанавливает возможность распространения линейного непрерывного оператора с данного множества на его замыкание.

Теорема 2 (о распространении по непрерывности). Пусть X и Y — нормированные пространства, причем Y — полное. Всякий линейный непрерывный оператор U_0 из $\Omega \subset X$ в Y допускает единственное линейное непрерывное распространение U на замыкание $\bar{\Omega}$ множества Ω , при этом $\|U\| = \|U_0\|$.

Доказательство. Пусть $x \in \bar{\Omega}$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$ элементов из Ω , сходящаяся к x . Рассмотрим в пространстве Y последовательность $\{U_0(x_n)\}$. Так как $\|U_0(x_n) - U_0(x_m)\| \leq \|U_0\| \|x_n - x_m\|$, то она сходится в себе, поэтому вследствие полноты пространства Y существует $\lim_{n \rightarrow \infty} U_0(x_n)$.

Докажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. В самом деле, если $x'_n \in \Omega$ и $x'_n \rightarrow x$, то

$$\|U_0(x'_n) - U_0(x_n)\| \leq \|U_0\| \|x'_n - x_n\| \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} U_0(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_0(x_n)$.

Положим теперь

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_0(x_n).$$

Линейность оператора U очевидна, а переход к пределу в неравенстве $\|U_0(x_n)\| \leq \|U_0\| \|x_n\|$ дает $\|U(x)\| \leq \|U_0\| \|x\|$, т. е. ограниченность оператора U , и неравенство $\|U\| \leq \|U_0\|$. Так как, с другой стороны,

$$\|U\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in \bar{\Omega}}} \|U(x)\| \geq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in \Omega}} \|U_0(x)\| = \|U_0\|,$$

то $\|U\| = \|U_0\|$.

Если, наконец, $V \supset U_0$ — линейный непрерывный оператор из $\bar{\Omega}$ в Y , то из соотношения $U_0(x_n) = V(x_n)$ ($x_n \in \Omega$, $x_n \rightarrow x$) в силу непрерывности оператора V предельным переходом получаем $U(x) = V(x)$, т. е. операторы U и V совпадают.

Теорема доказана.

Следствие. Если линейный непрерывный оператор U , отображающий нормированное пространство X в B -пространство Y , обращается в нуль на плотном в X множестве, то $U(x) = 0$ для любого $x \in X$.

8.3. Если линейный оператор U_0 определен на плотном в пространстве X множестве Ω , то по теореме 2 его можно распространить на все X с сохранением линейности и нормы. Если, однако, отбросить условие плотности Ω в X , то, вообще говоря, такое распространение оказывается невозможным.

Вопрос о существовании продолжения оператора U_0 , имеющего ту же норму, что и U_0 , решается в зависимости от свойств пространства обрывов — Y .

Для удобства дальнейших формулировок введем определения: систему множеств $\mathfrak{A} = \{A\}$ будем называть *сцепленной*, если каждая пара множеств из этой системы имеет непустое пересечение.

Будем говорить, что нормированное пространство Y есть *пространство типа $\mathfrak{M}$* , если Y является нормированным пространством, каждое сцепленное семейство замкнутых шаров которого имеет непустое пересечение.

Простейшим примером пространства типа $\mathfrak{M}$ является числовая прямая (вещественная). Действительно, замкнутый шар в этом пространстве представляет собой замкнутый промежуток. Рассмотрим поэтому сцепленное множество $\{[a_\xi, b_\xi]\}$ ($\xi \in \Xi$) замкнутых промежутков и проверим, что это множество имеет непустое пересечение. Фиксируем для этого некоторое $\xi_0 \in \Xi$. Поскольку промежутки $[a_\xi, b_\xi]$ и $[a_{\xi_0}, b_{\xi_0}]$ имеют общие точки, каково бы ни было $\xi \in \Xi$, то

$$a_{\xi_0} \leq b_\xi, \quad \xi \in \Xi.$$

Следовательно,

$$a_{\xi_0} \leq \inf_{\xi \in \Xi} b_\xi.$$

А так как $\xi_0 \in \Xi$ произвольно, то отсюда

$$\bar{a} = \sup_{\xi \in \Xi} a_\xi \leq \inf_{\xi \in \Xi} b_\xi = \bar{b}.$$

Таким образом, любая точка промежутка $[\bar{a}, \bar{b}]$ входит в каждый из промежутков $[a_\xi, b_\xi]$, что и доказывает утверждение.

Аналогичными рассуждениями, которые мы предоставляем читателю, доказывается, что вещественные пространства $l^\infty(T)$ и $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, если мера μ σ -конечна, также являются пространствами типа $\mathfrak{M}$.

Отметим, что комплексная плоскость, рассматриваемая как нормированное пространство (комплексное), не является пространством типа $\mathfrak{M}$, так как легко указать систему из трех кругов на плоскости, каждые два из которых пересекаются, а общее пересечение которых пусто.

Далее в этом параграфе все пространства предполагаются вещественными.

Класс пространств типа $\mathfrak{M}$ является довольно узким. Читатель может убедиться, что, кроме пространств $l^\infty(T)$ и $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, ни одно из рассмотренных выше конкретных нормированных пространств не является пространством типа $\mathfrak{M}$.

Укажем, наконец, что всякое пространство Y типа $\mathfrak{M}$ полно.

Действительно, пусть $\{y_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов пространства Y . Обозначим

$$r_n = \sup_{m \geq n} \|y_m - y_n\|$$

и рассмотрим семейство замкнутых шаров $\{B_{r_n}(y_n)\}$ ($n = 1, 2, \dots$). Это — сцепленное семейство, так как при $m > n$

$$\|y_m - y_n\| \leq r_n.$$

и, следовательно, $y_m \in B_{r_n}(y_n) \cap B_{r_m}(y_m)$. Если Y — пространство типа $\mathfrak{M}$,

то существует элемент $y \in Y$, входящий в каждый из шаров $B_{r_n}(y_n)$, т. е. имеем

$$\|y - y_n\| \leq r_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

и поскольку $r_n \rightarrow 0$, то $y_n \rightarrow y$. Полнота Y проверена.

Следующие ниже основные теоремы 3 и 4 доказаны Нахбиным [1]. В этой же работе дается характеристика пространств типа $\mathfrak{M}$ с точки зрения теории упорядоченных пространств. Уточнение этой характеристики дано Келли [1]. По поводу распространения линейных операторов см. также Акилов [1], [2], Какутани [1] и монографию Канторович, Вулих, Пинскер.

Теорема 3. Пусть X — нормированное пространство, а X_0 — линейное множество, содержащееся в X^* . Пусть, далее, U_0 — линейный непрерывный оператор, отображающий X_0 в пространство Y типа $\mathfrak{M}$. Тогда существует линейное непрерывное распространение U оператора U_0 , отображающее X в Y , причем $\|U\| = \|U_0\|$.

Доказательство. Пусть X_0 — линейное подмножество пространства X . Элементарным расширением линейного множества X_0 назовем линейное множество X_1 , состоящее из всех элементов вида

$$x' = \lambda x_1 + x, \quad x \in X_0, \quad (4)$$

где x_1 — данный элемент из X .

Докажем, что при выполнении условий теоремы всякий линейный непрерывный оператор U_0 , переводящий $X_0 \subset X$ в Y , допускает линейное распространение U_1 с сохранением нормы на любое элементарное расширение X_1 множества X_0 **).

Очевидно, если оператор U_1 существует, он полностью определяется указанием элемента $y_0 = U_1(x_1)$. Так как норма распространяемого оператора должна остаться неизменной, то для этого элемента выполняется соотношение

$$\|y_0 - U_0(x)\| = \|U_1(x_1) - U_1(x)\| \leq \|U_1\| \|x_1 - x\| = \|U_0\| \|x_1 - x\|.$$

Таким образом, необходимым условием существования оператора U_1 является наличие общей точки у всех замкнутых шаров $B^{(x)} = B_r(y)$ с центром в точке $y = U_0(x)$ и радиусом $r = r_x = \|U_0\| \|x_1 - x\|$.

Докажем, что это условие является также достаточным. Действительно, обозначив через $\mathfrak{R}$ совокупность всех шаров рассмотренного вида, предположим, что имеется точка y_0 , принадлежащая всем шарам семейства $\mathfrak{R}$. Положим

$$U_1(x_1) = y_0.$$

При этом для $x' \in X_1$ в соответствии с (4)

$$U_1(x') = \lambda U_1(x_1) + U_1(x) = \lambda y_0 + U_0(x).$$

Отсюда ввиду однозначности представления (4) следует линейность оператора U_1 , а так как в силу условия (при $\lambda \neq 0$)

$$\|U_1(x')\| = \left\| \lambda \left\| y_0 + U_0 \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right\| \right\| \leq r_{-x/\lambda} |\lambda| = |\lambda| \|U_0\| \left\| x_1 + \frac{x}{\lambda} \right\| = \|U_0\| \|x'\|,$$

то U_1 — линейный непрерывный оператор, причем $\|U_1\| \leq \|U_0\|$. Обратное неравенство очевидно, поэтому окончательно $\|U_1\| = \|U_0\|$.

*) Имея в виду теорему 2 и полноту пространства Y , можно считать, что X_0 — замкнутое множество.

**) Речь идет о собственном расширении, т. е. когда $x_1 \notin X_0$. В этом случае, как нетрудно видеть, представление (4) единственно.

Итак, надо доказать лишь, что шары $B^{(x)}$ семейства $\mathfrak{K}$ имеют непустое пересечение, для чего, принимая во внимание условия теоремы, достаточно проверить, что $\mathfrak{K}$ — сцепленное семейство.

Для этого возьмем два произвольных шара, $B(x'_1)$ и $B(x'_2)$ из $\mathfrak{K}$. Имеем

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= r_{x'_1} + r_{x'_2} = \|U_0\| [\|x_1 - x'_1\| + \|x_1 - x'_2\|] \geq \\ &\geq \|U_0\| \|(x_1 - x'_1) - (x_1 - x'_2)\| \geq \|U_0\| (x'_1 - x'_2) = \|y'_1 - y'_2\|, \end{aligned}$$

т. е. сумма радиусов не меньше расстояния между центрами шаров, следовательно, шары $B(x'_1)$ и $B(x'_2)$ пересекаются*), а это ввиду их произвольности и означает, что семейство $\mathfrak{K}$ сцепленное.

Итак, мы доказали возможность элементарного расширения. Для завершения доказательства воспользуемся леммой Цорна (I.1.2). Обозначим через A совокупность всевозможных линейных операторов, являющихся распространением (с сохранением нормы) оператора U_0 . В A введем порядок следующим образом: для $V', V'' \in A$ будем считать $V' \leq V''$, если $V' \subset V''$. Проверим соблюдение условия леммы Цорна. Пусть A_0 — совершенно упорядоченная часть множества A . Положим

$$\tilde{X} = \bigcup_{V \in A_0} \Omega_V.$$

Поскольку из любых двух множеств Ω_V , входящих в это объединение, одно обязательно содержится в другом, то $\tilde{X}$ — линейное множество. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \tilde{X}$. Существует $V' \in A_0$ такой, что $x \in \Omega_{V'}$. Определим

$$V(x) = V'(x).$$

Это определение не зависит от выбора оператора V' , так как если $x \in \Omega_{V''}$, то ввиду того, что либо $V' \leq V''$, либо $V'' \leq V'$, будет $V'(x) = V''(x)$. Также легко установить, что V — линейный оператор, причем $\|V\| = \|U_0\|$. Далее, очевидно, V является распространением любого оператора $V \in A_0$ и, следовательно, распространением оператора U_0 . Таким образом, $V \in A$ и $V \leq \tilde{V}$ ($V \in A_0$). Применяя лемму Цорна, мы найдем оператор U — максимальный элемент в A . Оператор U — искомый, так как если бы $\Omega_U \neq \tilde{X}$, то нашлось бы элементарное расширение множества Ω_U , более широкое, чем Ω_U , и по доказанному ранее на него можно было бы распространить оператор U с сохранением нормы. Обозначая полученное распространение через U_1 , мы имели бы $U_1 \in A$ и $U \leq U_1$, что невозможно, поскольку $U \neq U_1$.

Теорема полностью доказана.

8.4. Условие возможности распространения линейного оператора, сформулированное в теореме 3, является и необходимым. Прежде чем доказать этот результат, дадим следующее определение.

B -пространство Y называется P_1 -пространством, если какое бы B -пространство X ни взять, всякий непрерывный линейный оператор U_0 , отобража-

*) Если $B_{r_1}(y_1)$ и $B_{r_2}(y_2)$ — два замкнутых шара пространства Y и $r_1 + r_2 \geq \|y_1 - y_2\|$, то их пересечение непусто; например, $\frac{r_2}{r_1 + r_2} y_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_2} y_2 \in B_{r_1}(y_1) \cap B_{r_2}(y_2)$.

ющий произвольное подпространство $X_0 \subset X$ в Y , допускает линейное распространение U с сохранением нормы на все X .

Теорема 4. Для B -пространства Y следующие утверждения эквивалентны:

- 1) Y — P_1 -пространство;
- 2) если B -пространство X содержит Y в качестве подпространства, то существует линейный непрерывный проектор из X на Y , имеющий норму 1;
- 3) Y — пространство типа $\mathfrak{M}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть Y — подпространство в B -пространстве X . Тогда тождественный оператор $U_0: Y \rightarrow Y$ допускает распространение $U: X \rightarrow Y$, $\|U\| = \|U_0\| = 1$. Очевидно, что U — искомый проектор.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть T есть шар B_{Y^*} сопряженного пространства. Как мы установили в 7.3, существует линейная изометрия пространства Y на подпространство B -пространства $l^\infty(T)$. По условию существует проектор нормы 1 из $l^\infty(T)$ на Y . Уже отмечалось, что $l^\infty(T)$ — пространство типа $\mathfrak{M}$. Очевидно, что тип $\mathfrak{M}$ сохраняется при проектировании с нормой единица, поэтому Y — пространство типа $\mathfrak{M}$.

3) $\Rightarrow$ 1) доказано в теореме 3.

Можно доказать (см. Келли [1], Нахбин [1]), что B -пространство Y является P_1 -пространством тогда и только тогда, когда оно линейно изометрично B -пространству $C(Q)$, где Q — экстремально несвязный компакт.

К задаче о распространении линейного оператора можно подойти и с несколько иной точки зрения. Пусть X — данное нормированное пространство, X_0 — произвольное его подпространство и Y — произвольное B -пространство. Пусть U_0 — линейный непрерывный оператор, отображающий X_0 в Y . Для того чтобы существовал линейный оператор $U \supset U_0$, $\|U\| = \|U_0\|$, отображающий X в Y , необходимо и достаточно, чтобы X было унитарным пространством. Этот результат установлен Какутаи [1].

Глава VI

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ

Для приложения общей теории большое значение имеет знание общей формы линейных функционалов в конкретных пространствах. Под общей формой линейных функционалов данного класса (чаще всего рассматривается класс всех непрерывных функционалов в данном пространстве) мы понимаем такое аналитическое выражение, содержащее различного рода параметры (числа, функции и т. д.), которое при фиксированных значениях параметров дает функционал из данного класса, причем получающимися при этом функционалами исчерпываются все рассматриваемые функционалы.

В этой главе указывается общая форма линейных функционалов в ряде рассмотренных выше конкретных пространств.

§ 1. Интегральное представление функционалов на пространствах измеримых функций

1.1. В § 3 главы IV рассмотрению конкретных пространств мы предпослали изложение теории общих пространств измеримых функций. Точно так же мы поступим в этой главе при исследовании общего вида функционалов на этих пространствах.

Пусть X — ИП на (T, Σ, μ) , где мера μ σ -конечна. Линейный функционал f на X называется *порядково непрерывным*, если из $x_n, x \in X, x_n(t) \rightarrow 0$ п. в. и $|x_n(t)| \leq x(t)$ п. в. следует, что $f(x_n) \rightarrow 0$ *). Множество всех (o) -непрерывных функционалов на X , которое мы обозначим через $X_n^\sim$, является векторным пространством.

Обозначим через X' множество всех $x' \in S(T, \Sigma, \mu)$ таких, что $\text{supp } x' \subset \text{supp } X \pmod{\mu}$, $\int |xx'| d\mu < \infty$ для любого $x \in X$.

Легко видеть, что X' — ИП (может оказаться, что $X' = \{0\}$). ИП X' называется *дуальным* к X . По каждому $x' \in X'$ можно

*) Легко видеть, что это определение не изменится, если сходимость почти всюду заменить на сходимость по мере.

построить линейный функционал $f_{x'}$ на X по формуле

$$f_{x'}(x) = \int_T x(t) \overline{x'(t)} d\mu, \quad x \in X, \quad (1)$$

Из теоремы Лебега очевидно, что $f_{x'} \in X_n^{\sim}$. Мы покажем, что интегральными функционалами вида (1) исчерпывается пространство $X_n^{\sim}$.

Теорема 1. Формула (1) дает общий вид (о)-непрерывного функционала на ИП X . Отображение $x' \in X' \rightarrow f_{x'} \in X_n^{\sim}$ является линейным изоморфизмом; при этом $x' \geq 0$ тогда и только тогда, когда $f_{x'}(x) \geq 0$ для любого $x \in X_+$.

Доказательство. Пусть сначала X вещественно и $L^\infty(T, \Sigma, \mu) \subset X$. Докажем, что любой функционал $f \in X_n^{\sim}$ допускает представление (1). Для любого $A \in \Sigma$ положим

$$\varphi(A) = f(\chi_A).$$

Тогда, если $\mu(A_n) \rightarrow 0$, то $\varphi(A_n) = f(\chi_{A_n}) \rightarrow 0$, откуда φ — счетно-аддитивная функция множества на Σ , абсолютно непрерывная относительно μ . По теореме Радона — Никодима (см. теорему I.6.10) существует функция $x' \in L^1(T, \Sigma, \mu)$, для которой

$$f(\chi_A) = \varphi(A) = \int_A x' d\mu. \quad (2)$$

Докажем, что для любого $x \in X$ имеем

$$f(x) = \int_T x x' d\mu. \quad (3)$$

Пусть $B_+ = \{t \in T: x'(t) \geq 0\}$, $B_- = \{t \in T: x'(t) < 0\}$. Положим

$$f_+(x) = f(x\chi_{B_+}), \quad f_-(x) = f(x\chi_{B_-}), \quad x \in X.$$

Так как

$$f_+(\chi_A) = \int_A x'_+ d\mu, \quad f_-(\chi_A) = \int_A x'_- d\mu,$$

$$f_+, f_- \in X_n^{\sim}, \quad f = f_+ - f_-$$

то при доказательстве (3) можно считать, что $x' \geq 0$ и выполняно (2).

Пусть $x \in X_+$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$ конечнозначных функций такая, что $0 \leq x_n \uparrow x$. Тогда в силу $f \in X_n^{\sim}$ и теоремы Б. Леви получаем (3). Для произвольной функции $x \in X$ (3) выводим из соотношения $x = x_+ - x_-$. Из (3) вытекает, что $x' \in X'$.

Откажемся теперь от предположения $L^\infty \subset X$. Отметим сначала, что в силу следствия 2 леммы IV.3.1 функция x' , удовлетворяющая (3), единственна (с точностью до эквивалентности).

По следствию 1 леммы IV.3.1 найдется такая пеубывающая последовательность $\{A_n\} \subset \Sigma$, что $\chi_{A_n} \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) и $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \text{supp } X$. Рассмотрим ИП $x_n = \{x \in X: \text{supp } x \subset A_n\}$ и функционалы $f'_n(x) = f(x)$ ($x \in X_n$) на них. Тогда по доказанному найдутся $x'_n \in X'_n$ ($n \in \mathbb{N}$), для которых справедливо

$$f_n(x) = \int_T x x'_n d\mu, \quad x \in X_n. \quad (4)$$

Рассматривая функционалы f_n и f_{n+1} на X_{n+1} , в силу единственности представляющей функции в (3), получаем $x'_n(t) = x'_{n+1}(t)$ при п. в. $t \in A_n$. Следовательно, мы можем положить

$$x'(t) = \begin{cases} x'_n(t), & t \in A_n, \\ 0, & t \notin \text{supp } X. \end{cases}$$

Докажем соотношение (3) в этой ситуации. Как и выше, можно считать, что $x' \geq 0$ и выполнены равенства (4). Если $x_n = x \chi_{A_n}$ ($x \in X_+$), то $f(x_n) \rightarrow f(x)$, а с другой стороны, по теореме Б. Леви

$$\int_T x x'_n d\mu = \int_T x_n x' d\mu \rightarrow \int_T x x' d\mu,$$

откуда получаем (3) для $x \in X_+$, а следовательно, и для всех $x \in X$.

Если X — комплексное пространство, $f \in X_n^\sim$, то положим $f(x) = \text{Re } f(x) + i \text{Im } f(x)$. Тогда $\text{Re } f$ и $\text{Im } f$ — линейные функционалы на вещественном ИП X_R , причем $\text{Re } f, \text{Im } f \in (X_R)_n^\sim$. В силу доказанного найдутся $x'_1, x'_2 \in (X_R)'$, для которых

$$\text{Re } f(x) = \int x x'_1 d\mu, \quad \text{Im } f(x) = \int x x'_2 d\mu, \quad x \in X_R.$$

Положим $x' = x'_1 - i x'_2$. Тогда для любого $x \in X$ имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\text{Re } x) + i f(\text{Im } x) = \int (\text{Re } x) x'_1 d\mu + i \int (\text{Re } x) x'_2 d\mu + \\ &+ i \int (\text{Im } x) x'_1 d\mu - \int (\text{Im } x) x'_2 d\mu = \int x \bar{x}' d\mu, \end{aligned}$$

откуда получаем также, что $x' \in X'$.

Соотношение $f_{x'}(x) \geq 0$ для всех $x \in X_+$ эквивалентно $x' \geq 0$, это очевидно из следствия 2 леммы IV.3.1. На этом доказательство теоремы полностью закончено.

Теорема 1 по существу содержится уже в монографии Капторович, Вулих, Пинскер, но в явном виде она появилась в печати лишь в середине 1960-х годов сразу в работах нескольких авторов.

1.2. Наиболее заманчиво получить интегральное представление для всех непрерывных линейных функционалов на БИП X . Здесь мы обсудим, когда это возможно.

Пусть X — НИП на (T, Σ, μ) . Положим

$$X^\times = \{x' \in X': f_{x'} \in X^*\}.$$

Для любого $x' \in X^\times$ полагаем

$$\|x'\| = \|f_{x'}\|_{X^*} = \sup \left\{ \left| \int_T x \bar{x}' d\mu \right| : x \in X, \|x\| \leq 1 \right\}.$$

Теорема 2. $X^\times$ — БИП с условиями (B) и (C).

Доказательство. Для проверки монотонности нормы достаточно установить, что

$$\|x'\| = \sup \left\{ \int_T x |x'| d\mu : x \in X_+, \|x\| \leq 1 \right\}. \quad (5)$$

Равенство (5) вытекает из того, что если

$$\|x'\| < \left| \int_T x x' d\mu \right| + \varepsilon, \quad \|x\| \leq 1,$$

то $x_1(t) = \text{sign } x(t) \cdot x(t)$ удовлетворяет

$$x_1 \in X, \quad \|x_1\| \leq 1, \quad \left| \int_T x x' d\mu \right| \leq \int_T |x x'| d\mu = \int_T x_1 |x'| d\mu.$$

Для проверки (B) и (C) в силу леммы IV.3.5 достаточно убедиться, что из $x'_n \in X^\times$, $x' \in S$, $\|x'_n\| \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$), $x'_n \rightarrow x(\mu)$ вытекает $x' \in X^\times$ и $\|x'\| \leq 1$. Действительно, в силу леммы Фату для любого $x \in X_+$ имеем

$$|f_{x'}(x)| \leq \int_T x |x'| d\mu \leq \sup_n \int_T x |x'_n| d\mu \leq \|x\| \sup_n \|x'_n\| \leq \|x\|.$$

Отсюда $f_{x'} \in X^*$, $x' \in X^\times$ и $\|x'\| \leq 1$, чем и закончено доказательство.

Теорема 3. Если X — БИП, то $X_n^\sim \subset X^*$.

Доказательство. Пусть $f \in X_n^\sim$. Если мы предположим, что $f \notin X^*$, то найдется последовательность $x_n \rightarrow 0$ по норме, для которой $|f(x_n)| \geq \varepsilon > 0$ ($n \in \mathbb{N}$). В силу леммы IV.3.2 и $f \in X_n^\sim$ некоторая последовательность $f(x_{n_k}) \rightarrow 0$, чем получено противоречие.

Итак, если X — БИП, то $X^\times = X'$ (в этом случае мы будем употреблять обозначение X').

Теорема 4. Если X — НИП, то $X_n^\sim \supset X^*$ тогда и только тогда, когда в X выполнено условие (A).

Доказательство. Пусть $X_n \supset X^*$. Для любого $x \in X$ имеем

$$\|x\| = \sup \{ |f_{x'}(x)| : x' \in X^\times, \|x'\| \leq 1 \}. \quad (6)$$

Равенство (6) выводится аналогично равенству (5).

Предположим, что условие (A) в X не выполнено. Тогда найдется последовательность $0 \leq x_n \downarrow 0$ в X , для которой $\|x_n\| \geq \varepsilon > 0$ ($n \in \mathbb{N}$). В силу (6) найдется последовательность $\{x'_n\} \subset X^*$, $\|x'_n\| \leq 1$, такая, что $\int x_n x'_n d\mu \geq \varepsilon$ ($n \in \mathbb{N}$). Так как шар пространства X^* (*)-слабо компактен, то последовательность $\{f_{x'_n}\}$ имеет (*)-слабую предельную точку $f = f_{x'} \in X^\times$, $\|x'\| \leq 1$. Если $x \geq 0$, то $f_{x'}(x) = \lim_{x_n} f_{x'_n}(x) \geq 0$ (*), откуда $x' \geq 0$.

Так как $x_n \downarrow 0$, то найдется $k \in \mathbb{N}$, для которого

$$\int_T x_k x' d\mu < \varepsilon/4.$$

Так как f — предельная точка, то найдется $m \geq k$, для которого

$$\left| \int_T x_k x'_m d\mu - \int_T x_k x' d\mu \right| < \varepsilon/4.$$

Используя, что $x_m \leq x_k$, выводим

$$\int_T x_m x'_m d\mu \leq \int_T x_k x'_m d\mu < \varepsilon/2,$$

чем получено противоречие.

Обратно, пусть в X выполнено (A). Возьмем $f \in X^*$ и $x_n \rightarrow 0$ п. в.; $|x_n| \leq x \in X$. В силу условия (A) $x_n \rightarrow 0$ по норме, откуда $f(x_n) \rightarrow 0$. Следовательно, $X^* \subset X_n^\sim$. Из теорем 3 и 4 получаем

Следствие 1. Если X — БИП, то $X_n^\sim = X^*$ тогда и только тогда, когда в X выполнено условие (A).

Из следствия 1 и теоремы 1 выводим

Следствие 2. Если X — БИП, то формула (1) дает общий вид линейного непрерывного функционала на X тогда и только тогда, когда в X выполнено условие (A).

Следствие 2 показывает, что любой непрерывный линейный функционал на БИП X допускает интегральное представление тогда и только тогда, когда в X выполнено условие (A). Применение этого результата к конкретным пространствам мы отложим до следующего параграфа, а пока рассмотрим случай, когда условие (A) не выполнено.

*) Для каждого x выбирается, вообще говоря, своя подпоследовательность.

1.3. Теорема 5. Если X — НИП, то $\text{supp } X' = \text{supp } X^\times = \text{supp } X$ и тем самым множество $X^* \cap X_n^\sim$ разделяет точки на X .

Доказательство. Предположим, что $\text{supp } X^\times \neq \text{supp } X$. Тогда найдётся $A \in \Sigma(\mu)$, $\mu(A) > 0$, $\chi_A \in X$, такое, что $x' \chi_A = 0$ для любого $x' \in X^\times$, или, что то же самое, $f(\chi_A) = 0$ для любого $f \in X^* \cap X_n^\sim$. По следствию теоремы IV.3.1 единичный шар B_X ограничен в ТВП $S(T, \Sigma, \mu)$, а тогда и множество E , равное замыканию $B_X \cap L^2(T, \Sigma, \mu)$ в L^2 , ограничено в $S(T, \Sigma, \mu)$. В силу ограниченности E найдется число $\lambda > 0$ такое, что $\lambda \chi_A \notin E$. По теореме III.2.6 существует непрерывный линейный функционал f_0 на L^2 , для которого

$$\sup \{ |f_0(x)| : x \in E \} \leq 1 < f_0(\lambda \chi_A). \quad (7)$$

В силу теоремы V.3.1 существует функция $z_0 \in L^2$ такая, что

$$f_0(x) = \int_T x z_0 d\mu, \quad x \in L^2.$$

Так как $\text{supp } X = \text{supp } (X \cap L^2)$, то для любого $x \in B_X$ найдется последовательность $\{x_n\} \subset B_X \cap L^2$, $x_n \rightarrow x$ п. в. В силу теоремы Фату и (7) получаем

$$\int |x z_0| d\mu \leq \sup_n \int |x_n z_0| d\mu \leq 1.$$

Следовательно, функционал

$$f(x) = \int x z_0 d\mu, \quad x \in X,$$

определен на всем X и $f \in X^* \cap X_n^\sim$. В силу (7) $f(\lambda \chi_A) > 1$, чем получено противоречие с $f(\chi_A) = 0$. Итак, $\text{supp } X^\times = \text{supp } X' = \text{supp } X$.

Покажем теперь, что $X^* \cap X_n^\sim$ разделяет точки на X , т. е. для любого $x \in X$, $x \neq 0$ существует $f \in X^* \cap X_n^\sim$, $f(x) \neq 0$. Можно считать, что $x > 0$. Так как $\text{supp } X^\times = \text{supp } X$, то найдется $A \in \Sigma(\mu)$, $\mu(A) > 0$, $A \subset \text{supp } x$, для которого $\chi_A \in X^\times$. Тогда $\int x \chi_A d\mu > 0$. Теорема полностью доказана.

Мы установили, что множество $X^* \cap X_n^\sim$ тотально на X . Рассмотрим теперь вопрос, когда это множество восстанавливает норму на X .

Теорема 6 (Накано — Амеия — Мори). Если X — НИП, то эквивалентны следующие утверждения:

- 1) $\|x\| = \sup \{ |f(x)| : f \in X^* \cap X_n^\sim, \|f\| \leq 1 \}$ для любого $x \in X$;
- 2) в X выполнено условие (C).

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Если x_n , $x \in X$, $x_n \rightarrow x(\mu)$, $\|x_n\| \leq 1$, то в силу теоремы Фату $\|x\| \leq 1$. Тогда по лемме IV.3.4 в X выполнено (C).

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть сначала $X \subset L^1(T, \Sigma, \mu)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\|x\|_n = \inf \left\{ \max \left\{ \|y\|, n \int_T |z(t)| d\mu \right\} : y, z \in X_+, |x| = y + z \right\}, \quad x \in X.$$

Проверим, что $\|\cdot\|_n$ — монотонная норма на X . Нетривиально только то, что из $\|x\|_n = 0$ вытекает $x = 0$. Возьмем $y_h, z_h \in X_+$ такие, что

$$|x| = y_h + z_h, \quad \|y_h\| \rightarrow 0, \quad n \int |z_h| d\mu \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда по теореме IV.3.1 $y_h \rightarrow 0(\mu)$ и $z_h \rightarrow 0(\mu)$. Следовательно, $x = 0$.

Отметим, что

$$\|x\| \geq \|x\|_n, \quad n \int |x| d\mu \geq \|x\|_n.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \dots \leq \|x\|_n \leq \|x\|_{n+1} \leq \dots$$

Докажем, что

$$\|x\|_n \rightarrow \|x\|. \quad (8)$$

Возьмем $R > \|x\|_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда существуют $y_n, z_n \in X_+$, для которых

$$|x| = y_n + z_n, \quad \|y_n\| < R, \quad \int_T |z_n| d\mu < R/n.$$

Отсюда $z_n \rightarrow 0(\mu)$, а тогда $y_n = |x| - z_n \rightarrow |x|(\mu)$. Так как $0 \leq y_n \leq |x|$, то в силу условия (C)

$$\|x\| \leq \sup \|y_n\| \leq R.$$

Тем самым (8) доказано. Докажем теперь 1). Можно считать, что $x \geq 0$. В силу (8) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого $\|x\|_n > \|x\| - \varepsilon$.

Рассмотрим НИП $(X, \|\cdot\|_n)$. Так как $\|x\|_n \leq n \int |x| d\mu$, то $\|\cdot\|_n$ (о)-непрерывна, откуда по теореме 4 $(X, \|\cdot\|_n)^* \subset X_n^*$. Тогда найдется $f \in (X, \|\cdot\|_n)^*$, для которого

$$\|f\|_{(X, \|\cdot\|_n)^*} \leq 1, \quad \|x\|_n < |f(x)| + \varepsilon.$$

Отсюда

$$\|f\|_{X^*} \leq \|f\|_{(X, \|\cdot\|_n)^*} \leq 1, \quad \|x\| < \|x\|_n + \varepsilon < |f(x)| + 2\varepsilon,$$

чем и доказано 1) в случае, когда $X \subset L^1$. Общий случай сводится к рассмотренному при помощи следствия 1 леммы IV.3.1.

Пусть X — ИП. Тогда положим $X'' = (X')'$. Очевидно, что $X \subset X''$. Мы рассмотрим вопрос, когда $X = X''$. Если X — НИП,

то положим $X^{\times\times} = (X^{\times})^{\times}$. Очевидно, что $X \subset X^{\times\times}$. Норму на $X^{\times\times}$ обозначим $\|\cdot\|^{\times\times}$. Имеет место неравенство $\|x\| \geq \|x\|^{\times\times}$ ($x \in X$).

Теорема 7. Для НИП X следующие утверждения эквивалентны:

- 1) в X выполнены условия (B) и (C);
- 2) $X = X^{\times\times}$ и $\|\cdot\| = \|\cdot\|^{\times\times}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Так как в X выполнено условие (C), то по теореме (6) $\|x\| = \|x\|^{\times\times}$ для $x \in X$. Покажем, что $X = X^{\times\times}$. Так как $\text{supp } X = \text{supp } X^{\times} = \text{supp } X^{\times\times}$, то для любого $x \in (X^{\times\times})_+$ существует последовательность $\{x_n\} \subset X_+$, $0 \leq x_n \uparrow x$ (лемма IV.3.1). Используя (B), получаем, что $x \in X$.

2) $\Rightarrow$ 1), так как по теореме 2 в $X^{\times\times}$ выполнены условия (B) и (C).

Приложения полученных результатов к конкретным пространствам будут приведены в следующем параграфе. Литературные указания см. в главе X.

§ 2. Пространства $L^p(T, \Sigma, \mu)$

2.1. Применим теорию предыдущего параграфа к конкретным пространствам измеримых функций, прежде всего к пространствам $L^p(T, \Sigma, \mu)$, где меру μ мы будем предполагать σ -конечной (хотя это и не нужно при $1 < p < \infty$).

Теорема 1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Общий вид линейного непрерывного функционала f в пространстве $L^p(T, \Sigma, \mu)$ дается формулой

$$f(x) = \int_T x(t) \overline{y(t)} d\mu, \quad x \in L^p, \quad (1)$$

где y — произвольный элемент из $L^q(T, \Sigma, \mu)$. При этом

$$\|f\| = \|y\|_{L^q}. \quad (2)$$

Доказательство. Так как в L^p ($1 \leq p < \infty$) выполнено условие (A) (теорема IV.3.5), то по следствию 2 теоремы 1.4 формула (1) дает общий вид линейного непрерывного функционала. Равенство (2) получаем из V.2.3.

Рассмотрим теперь пространство $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$. Так как в нем в нетривиальных случаях нет условия (A) (см. IV.3.3), то формула (1) (с $y \in L^1(T, \Sigma, \mu)$) уже не дает общий вид линейного непрерывного функционала.

Обозначим $ba(\Sigma, \mu)$ множество (вещественных или комплексных) аддитивных функций (bounded additive) ϕ на Σ таких, что:

- 1) $\mu(A) = 0$ влечет $\phi(A) = 0$;
- 2) полная вариация $|\phi|(T) < \infty$.

Если в множестве $\text{ba}(\Sigma, \mu)$ ввести линейные операции по формулам

$$(\lambda\varphi)(A) = \lambda\varphi(A), \quad (\varphi_1 + \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) + \varphi_2(A), \quad A \in \Sigma,$$

то $\text{ba}(\Sigma, \mu)$ превращается в векторное пространство. Формула $\|\varphi\| = |\varphi|(T)$ определяет норму на $\text{ba}(\Sigma, \mu)$, с которой $\text{ba}(\Sigma, \mu)$ становится B -пространством.

Определим $\int_T x(t) d\varphi$ для $x \in L^\infty(T, \Sigma, \mu)$. Рассмотрим множество Ω измеримых конечнозначных функций вида

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{A_i}(t), \quad (3)$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $A_i \in \Sigma$ ($i = 1, 2, \dots, k$), причем множества A_i попарно дизъюнкты. Положим

$$\int_T x(t) d\varphi = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(A_i).$$

Предоставляем читателю проверить, что $\int_T x d\varphi$ не зависит от представления x в виде (3). В силу теоремы I.6.3 Ω плотно в $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$. Очевидно, что $\int_T x d\varphi$ — линейный функционал на Ω , причем

$$\left| \int_T x d\varphi \right| \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i| |\varphi(A_i)| \leq \max_{i=1}^k |\lambda_i| |\varphi|(T) \leq \|x\|_{L^\infty} \|\varphi\|.$$

По теореме V.8.2 $\int_T x d\varphi$ допускает линейное распространение по непрерывности на все $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, которое мы обозначаем тем же символом.

Теорема 2. *Общий вид линейного непрерывного функционала f в пространстве $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ дается формулой*

$$f(x) = \int_T x(t) d\varphi, \quad (4)$$

где φ — произвольный элемент из $\text{ba}(\Sigma, \mu)^*$. При этом $\|f\| = \|\varphi\|$ и $\varphi(A) \geq 0$ для любого $A \in \Sigma$ тогда и только тогда, когда $f(x) \geq 0$ для любого $x \in L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, $x \geq 0$.

Доказательство. При построении $\int_T x d\varphi$ нами было доказано, что формула (4) определяет $f \in (\bar{L}^\infty)^*$ и $\|f\| \leq \|\varphi\|$.

*) Если пространство $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ комплексное, то надо взять комплексное $\text{ba}(\Sigma, \mu)$, а если $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ вещественное, то — вещественное $\text{ba}(\Sigma, \mu)$.

Докажем обратное неравенство. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся $A_i \in \Sigma$ такие, что

$$\|\varphi\| \leq \sum_{i=1}^k |\varphi(A_i)| + \varepsilon, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^k A_i = T.$$

Положим $\tilde{x} = \sum_{i=1}^k \text{sign } \varphi(A_i) \chi_{A_i}$. Тогда $\|\tilde{x}\| \leq 1$ и $\int_T \tilde{x} d\varphi = \sum_{i=1}^k |\varphi(A_i)|$, откуда $\|\varphi\| \leq \int_T \tilde{x} d\varphi + \varepsilon \leq \|f\| + \varepsilon$. Следовательно, $\|f\| = \|\varphi\|$.

Нам осталось доказать, что любой $f \in (L^\infty)^*$ допускает представление (4). Положим $\varphi(A) = f(\chi_A)$ ($A \in \Sigma$). Тогда $|\varphi|(T) \leq \|f\|$ (см. рассуждение выше) и $\varphi \in \text{ba}(\Sigma, \mu)$. Из построения $\int_T x d\varphi$

очевидно, что $f(x) = \int_T x d\varphi$ ($x \in L^\infty$). Из приведенных конструкций очевидно также утверждение о положительности φ , чем теорема полностью доказана.

Отметим, что отображение $y \in L^q \rightarrow f \in (L^p)^*$ (соответственно $\varphi \in \text{ba} \rightarrow f \in (L^\infty)^*$), определяемое формулой (1) (соответственно (4)), является линейной изометрией L^q на $(L^p)^*$ (соответственно ba на L^∞). Поэтому часто говорят, что L^q есть сопряженное к L^p ($1 \leq p < \infty$) и записывают $(L^p)^* = L^q$. Аналогичную сокращенную запись мы будем применять и для представлений, полученных ниже.

Из получаемого равенства $(L^p)^{**} = (L^q)^* = L^p$ ($1 < p < \infty$) еще нельзя сделать заключения о рефлексивности пространства L^p , так как равенство $(L^p)^{**} = L^p$ понимается в смысле линейной изометрии, которая может и не быть того специального вида, который требуется в определении рефлексивности (см. V.7.3). Тем не менее из рассмотрения конкретной изометрии из теоремы 1 можно вывести, что пространство L^p ($1 < p < \infty$) рефлексивно. Действительно, возьмем $F \in (L^p)^{**}$ и докажем, что найдется $x \in L^p$, для которого

$$F(f) = \overline{f(x)}, \quad f \in (L^p)^*. \quad (5)$$

Обозначим через α линейную изометрию, которая каждому $y \in L^q$ сопоставляет функционал $f \in (L^p)^*$ по формуле (1). Если положить $F_1(y) = F(\alpha y)$, $y \in L^q$, то $F_1 \in (L^q)^*$. Тогда по теореме 1 найдется $x \in L^p$, для которого

$$F_1(y) = \int y(t) \overline{x(t)} d\mu, \quad y \in L^q.$$

Проверим, что для этого $x \in L^p$ выполнено равенство (5). Если $f \in (L^p)^*$ и $y = \alpha^{-1}(f) \in L^q$, то

$$F(f) = F_1(y) = \int y(t) \overline{x(t)} d\mu = \overline{\int x(t) \overline{y(t)} d\mu} = \overline{f(x)}.$$

При $p=1$ каноническое вложение $\pi: L^1 \rightarrow (L^1)^{**}$ переводит L^1 в множество функционалов на L^∞ , допускающих интегральное представление (1), которое, как уже было отмечено, в случае бесконечномерного L^1 строго уже, чем $(L^1)^{**} = (L^\infty)^*$. Тем самым L^1 и $L^\infty = (L^1)^*$ нерефлексивны в бесконечномерном случае.

Общая форма линейного функционала в пространстве $L^p(a, b)$ ($1 < p < \infty$) была указана Ф. Риссом, в $L^1(a, b)$ — Штейнгаузом (см. Ф. Рисс [2] и Штейнгауз [1] соответственно); обобщение на случай абстрактной меры получено Никодимом.

2.2. Остановимся коротко на частном случае пространств последовательностей. Из теоремы 1 получаем

Теорема 3. Пусть $1 \leq p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Общий вид линейного непрерывного функционала f в пространстве l^p дается формулой

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k, \quad x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p,$$

где $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольный элемент из l^q . При этом $\|f\| = \|y\|_q$.

Рассмотрим теперь пространство c_0 (см. IV.3.4). Докажем, что $(c_0)^* = l^1$.

Теорема 4. Общий вид линейного непрерывного функционала f в пространстве c_0 дается формулой

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k, \quad x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in c_0, \quad (6)$$

где $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольный элемент из l^1 . При этом $\|f\| = \|y\|_1$.

Доказательство. Так как в c_0 выполнено условие (A), то общий вид функционала дается формулой (6). Пусть $f \in (c_0)^*$. Положим $\tilde{x} = \{\tilde{\xi}_k\}$, где

$$\tilde{\xi}_k = \begin{cases} \text{sign } \eta_k, & k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Так как $\tilde{x} \in c_0$ и $\|\tilde{x}\| \leq 1$, то

$$f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^n |\eta_k| \leq \|f\|.$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| \leq \|f\|, \quad (7)$$

т. е. $y \in l^1$ и $\|y\|_{l^1} \leq \|f\|$.

Если $y \in l^1$, то

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k \right| \leq \max |\xi_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| = \|y\|_{l^1} \cdot \|x\|.$$

Отсюда обычным путем выводим, что f — линейный функционал и что $\|f\| \leq \|y\|_{l^1}$, а это ввиду (7) приводит к равенству $\|f\| = \|y\|_{l^1}$.

Хотя пространство c и не является БИП, некоторые дополнительные рассмотрения позволяют установить общую форму линейного функционала в нем.

Рассмотрим в пространстве c элемент $e_0 = (1, 1, \dots, 1, \dots)$. Если $x = \{\xi_k\}$ — произвольный элемент из c и $\xi_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k$, то, очевидно, $x - \xi_0 e_0 \in c_0$.

Пусть f — линейный непрерывный функционал в c ; рассматривая его только на c_0 , мы получим там также линейный непрерывный функционал f_0 . Пусть (для $x \in c_0$)

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k, \quad y = \{\eta_k\} \in l^1.$$

Обозначив $\eta_0 = f(e_0)$, найдем для произвольного $x \in c$

$$f(x) = f(\xi_0 e_0) + f_0(x - \xi_0 e_0) = \eta_0 \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k (\xi_k - \xi_0).$$

Положив $\alpha = \eta_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k$, получим окончательно

$$f(x) = \alpha \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k. \quad (8)$$

Предоставляем читателю доказать, что (8) дает общую форму линейного непрерывного функционала в c и что

$$\|f\| = |\alpha| + \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|.$$

Предоставляем читателю доказать, что B -пространства c_0 и c нерефлексивны.

2.3. Остановимся коротко на аналитическом представлении функционалов в других пространствах измеримых функций, введенных в § 3 главы IV.

Рассмотрим сначала пространства Орлича. Имеют место равенства (по запасу элементов)

$$(E_M)' = (L_M)' = L_{M^*}.$$

Теорема 5. *Общий вид (о)-непрерывного линейного функционала f в пространстве $L_M(T, \Sigma, \mu)$ дается формулой*

$$f(x) = \int_T x(t) \overline{y(t)} d\mu, \quad x \in L_M, \quad (9)$$

где y — произвольный элемент из $L_{M^*}(T, \Sigma, \mu)$. При этом

$$\|f\|_{(L_M, \|\cdot\|_1)^*} = \|y\|_2, \quad \|f\|_{(L_M, \|\cdot\|_2)^*} = \|y\|_1. \quad (10)$$

Общий вид $f \in (E_M)^*$ дается формулой (9), причем выполнены аналогичные формулы (10) (в которых вместо L_M стоит E_M). Таким образом, формула (9) дает общий вид линейного непрерывного функционала в L_M тогда и только тогда, когда M удовлетворяет Δ_2 -условию. Пространство Орлича L_M рефлексивно тогда и только тогда, когда M и M^* удовлетворяют Δ_2 -условию. Доказательства приведенных результатов см. Красносельский, Рутцкий, Т. Андо [4] удалось получить представление всех линейных непрерывных функционалов на произвольном пространстве Орлича.

Связь между пространствами Лоренца и Марцинкевича устанавливают следующие формулы, где равенство понимается по составу элементов и по норме:

$$M(\psi)' = \Lambda(\psi), \quad \Lambda(\psi)' = M(\psi).$$

Так как в $\Lambda(\psi)$ выполнено условие (A), то $\Lambda(\psi)^* = M(\psi)$. Пространство $M(\psi)^*$ существенно шире $\Lambda(\psi)$.

§ 3. Общая форма линейного функционала в пространстве $C(K)$

3.1. Пусть K — компакт. Обозначим через $\text{гса}(K)$ множество всех (вещественных или комплексных) регулярных счетно-аддитивных функций φ , заданных на σ -алгебре $\mathcal{B}$ всех борелевских множеств из K и имеющих конечную полную вариацию $|\varphi|(K) < \infty$.

Если в $\text{гса}(K)$ мы введем линейные операции аналогично тому, как это было сделано в $\text{ба}(\Sigma, \mu)$, и положим $\|\varphi\| = |\varphi|(K)$, то $\text{гса}(K)$ превращается в B -пространство.

Теорема 1. *Общий вид линейного непрерывного функционала f в пространстве $C(K)$ дается формулой*

$$f(x) = \int_K x(t) d\varphi, \quad x \in C(K),$$

где φ — произвольный элемент из $\text{гса}(K)^*$. При этом $\|f\| = \|\varphi\|$ и $\varphi(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $f(x) \geq 0$ для любого $x \in C(K)$.

*) Если пространство $C(K)$ комплексное, то надо взять комплексное $\text{гса}(K)$, если $C(K)$ вещественно, то — вещественное $\text{гса}(K)$.

Устанавливаемое теоремой 1 соответствие является линейной изометрией $C(K)^*$ и $gsc(K)$. Доказательство теоремы 1 довольно длинно и требует дальнейшего привлечения результатов теории меры и топологии, поэтому мы его опускаем (доказательство см. в Данфорд, Шварц — I; Зaanen — II). Теорема 1 для $K = [0, 1]$ была доказана Ф. Риссом (поэтому ее часто называют теоремой Рисса). Общая формулировка принадлежит А. А. Маркову и С. Какутани.

Остановимся теперь на переформулировке теоремы 1 для случая вещественного пространства $C[a, b]$. Дополним сначала сведения о функциях ограниченной вариации (см. IV.4.1).

Рассмотрим в промежутке $[a, b]$ возрастающую функцию $\varphi(t)$. Пусть $a < t_1 < t_2 \dots < t_n < b$ — произвольная система точек. Возьмем t'_k и t''_k так, что $a < t'_1 < t_1 < t'_1 < t'_2 < t_2 < t'_2 < \dots < t'_n < b$. Очевидно, имеем

$$\sum_{k=1}^n [\varphi(t''_k) - \varphi(t'_k)] \leq \varphi(b) - \varphi(a)$$

и, устремляя здесь $t'_k \rightarrow t_k - 0$, $t''_k \rightarrow t_k + 0$, получим в предделе

$$\sum_{k=1}^n [\varphi(t_k + 0) - \varphi(t_k - 0)] \leq \varphi(b) - \varphi(a).$$

Отсюда следует, что монотонная функция может иметь только конечное число разрывов скачок, в которых превышает заданное ε . Следовательно, множество всех точек разрыва монотонной функции не более чем счетно. Поскольку всякая функция ограниченной вариации представима в форме разности двух возрастающих функций, отмеченное обстоятельство имеет место и для функции ограниченной вариации.

Из сказанного вытекает, что множество точек непрерывности функции ограниченной вариации плотно в промежутке $[a, b]$.

Пусть $g(t)$ — функция ограниченной вариации. Рассмотрим функцию $\tilde{g}(t)$, определенную равенством

$$\tilde{g}(t) = \frac{1}{2} [g(t+0) + g(t-0)], \quad a < t < b,$$

$$\tilde{g}(b) = g(b), \quad \tilde{g}(a) = g(a).$$

Таким образом, функция $\tilde{g}(t)$ совпадает с $g(t)$ в точках непрерывности последней и при $t = a, b$. Функцию $g(t)$ мы будем называть *исправленной*.

Если функция $g(t)$ совпадает со своей исправленной, то мы будем называть ее *правильной*. Множество всех правильных функций, обращающихся в нуль при $t = a$, обозначим V_0 . Ясно, что V_0 является линейным подмножеством пространства V всех функций ограниченной вариации. Легко проверить, что это замк-

пудое множество. Таким образом, V_0 , являясь замкнутым подпространством B -пространства V , само есть B -пространство.

Для любой функции $x \in C[a, b]$ определен интеграл Стильтьеса $\int_a^b x(t) dg(t)$ относительно функции ограниченной вариации $g(t)$ (см. Вулих — III, гл. XI, § 5).

Теорема 2. *Общая форма линейного непрерывного функционала в пространстве $C[a, b]$ дается интегралом Стильтьеса*

$$f(x) = \int_a^b x(t) dg(t),$$

где $g(t)$ — произвольная функция ограниченной вариации. Если при этом $g(t)$ — правильная функция, то

$$\|f\| = \bigvee_a^b (g).$$

Функционал f определяет функцию $g \in V_0$ однозначно.

Так как интеграл Стильтьеса от непрерывной функции можно свести к интегралу по счетно-аддитивной функции множества (см. Вулих — III, гл. XI, § 5), то теорема 2 несложно получается из теоремы 1. Предоставляем читателю проверить детали (независимое от теоремы 1 доказательство см. в Колмогоров, Фомин). Пространство $C(K)$ не является рефлексивным в бесконечномерном случае (т. е. когда компакт K бесконечен). Предоставляем читателю проверить, что функционал $F_t(g) = g(t)$, $g \in V_0$, где $t \in [0, 1]$ — фиксированная точка, не входит в образ пространства $C[0, 1]$ при каноническом вложении.

3.2. Рассмотрим применение теоремы об общей форме линейного функционала в пространстве $C[a, b]$ к так называемой проблеме моментов.

Пусть в нормированном пространстве X дана последовательность $\{x_n\}$ линейно независимых элементов. Взяв произвольный линейный функционал $f \in X$, образуем числовую последовательность

$$f(x_n) = \mu_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Проблемой моментов в широком смысле называют задачу нахождения функционала f по последовательности $\{\mu_n\}$. При такой общей постановке вопроса его решение не может быть далеко продвинуто. Однако и в общем случае все же можно высказать некоторые условия разрешимости и единственности решения проблемы моментов.

Если множество $\{x_n\}$ фундаментально, то в силу сказанного в III.3.2 функционал f (в предположении, что он существует) единственным образом определяется последовательностью $\{\mu_n\}$.

Нетрудно видеть, что фундаментальность системы $\{x_n\}$ является также и необходимым условием единственности решения проблемы моментов.

Далее, если обозначить через φ функционал (быть может, неаддитивный), определенный на множестве $\{x_n\}$:

$$\varphi(x_n) = \mu_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

то, поскольку существование функционала f означает возможность линейного распространения φ на линейную оболочку $\mathcal{L}(\{x_n\})$, вследствие теоремы V.8.1 получаем, что необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы моментов является наличие такой постоянной $M > 0$, что для любых $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=0}^n \lambda_k \mu_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k \right\| \quad (3)$$

или, иначе,

$$\sup \frac{\left| \sum_{k=0}^n \lambda_k \mu_k \right|}{\left\| \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k \right\|} < \infty, \quad (4)$$

где supremum берется по всевозможным $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($n = 0, 1, \dots$).

Из всего многообразия конкретных проблем моментов рассмотрим только *степенную проблему моментов*, когда $X = C[a, b]$ и

$$x_n(t) = t^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Принимая во внимание общую форму линейного функционала в пространстве $C[a, b]$, можно сформулировать задачу в рассматриваемом случае так: определить, при каких условиях существует функция ограниченной вариации $g(t)$ такая, что

$$\int_a^b t^n dg(t) = \mu_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Отметим, что, поскольку в данном случае система $\{x_n\}$ полна в пространстве $C[a, b]$, решение проблемы моментов, если оно вообще существует, единственно.

Условие (4) разрешимости проблемы моментов (6) может быть записано в следующей форме:

$$\sup \frac{\left| \sum_{k=0}^n \lambda_k \mu_k \right|}{\max_{a < t < b} \left| \sum_{k=0}^n \lambda_k t^k \right|} < \infty. \quad (7)$$

Приведем, наконец, один более конкретный результат, относящийся к степенной проблеме моментов в промежутке $[0, 1]$.

Теорема 2 (Хаусдорф). Для того чтобы существовала функция ограниченной вариации $g(t)$ такая, что

$$\int_0^1 t^n dg(t) = \mu_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^n C_n^k |\Delta^{n-k} \mu_k| \leq M, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, а $\Delta^m \mu_k$ означают m -е разности для последовательности $\{\mu_k\}$, определяемые индуктивно равенствами

$$\begin{aligned} \Delta^{m+1} \mu_k &= \Delta^m \mu_k - \Delta^m \mu_{k+1}, & \Delta^0 \mu_k &= \mu_k, \\ m &= 0, 1, \dots; & k &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть проблема моментов (8) разрешима. Обозначим через f линейный функционал в пространстве $C[0, 1]$, порождаемый функцией $g(t)$. Обозначим далее

$$x_k^{(m)}(t) = t^k (1-t)^m, \quad m, k = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Так как

$$\begin{aligned} x_k^{(m+1)}(t) &= t^k (1-t)^{m+1} = t^k (1-t)^m - t^{k+1} (1-t)^m = \\ &= x_k^{(m)}(t) - x_{k+1}^{(m)}(t), \end{aligned}$$

то

$$f(x_k^{(m+1)}) = f(x_k^{(m)}) - f(x_{k+1}^{(m)}), \quad m, k = 0, 1, \dots$$

Кроме того,

$$f(x_k^{(0)}) = \mu_k.$$

Принимая во внимание (10), мы легко можем убедиться (используя метод индукции), что

$$f(x_k^{(m)}) = \Delta^m \mu_k, \quad m, k = 0, 1, \dots$$

Пусть теперь $\theta_k^{(n)} = \text{sign } \Delta^{n-k} \mu_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Рассмотрим

функцию

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^n \theta_k^{(n)} C_n^k x_k^{(n-k)}(t).$$

Ввиду того, что $x_k^{(m)}(t) \geq 0$ в $[0, 1]$, имеем

$$|\tilde{x}(t)| \leq \sum_{k=0}^n C_n^k x_k^{(n-k)}(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = [t + (1-t)]^n = 1.$$

Следовательно, $\|\tilde{x}\| \leq 1$. А тогда

$$\sum_{k=0}^n C_n^k |\Delta^{n-k} \mu_k| = \sum_{k=0}^n C_n^k \theta_k^{(n)} \Delta^{n-k} \mu_k = \sum_{k=0}^n C_n^k \theta_k^{(n)} f(x_k^{(n-k)}) = f(\tilde{x}) \leq \|f\|,$$

$$n = 0, 1, \dots,$$

что и доказывает необходимость условия, если положить $M = \|f\|$.

Достаточность. Пусть φ означает функционал, заданный на множестве $\{x_n\}$ формулой (2), где принято $x_n(t) = t^n$. Распространим φ на линейную оболочку множества $\{x_n\}$, т. е. на множество всех полиномов. Именно, если $x(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_n t^n$, то положим

$$f_0(x) = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_n \mu_n.$$

В силу линейной независимости функций $x_n(t)$ такое определение f_0 будет однозначным.

Определенный таким образом функционал f_0 будет, очевидно, аддитивным и однородным. Мы докажем, что условие (10) обеспечивает его непрерывность.

Отметим, что независимо от этого условия функционал f_0 непрерывен на множестве H_m полиномов, степень которых не превосходит m , так как H_m является конечномерным пространством (координатами служат коэффициенты полинома), и потому сходимость в H_m покоординатная.

Сохраняя прежние обозначения, будем иметь, как и раньше,

$$f_0(x_k^{(s)}) = \Delta^s \mu_k, \quad s, k = 0, 1, \dots$$

Рассмотрим теперь произвольный полином $x(t)$. Пусть степень его равна m . Введем последовательность соответствующих полиномов Бернштейна

$$x_n(t) = B_n(x; t) = \sum_{k=0}^n C_n^k x\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}. \quad (12)$$

Как известно, степень полинома $x_n(t)$ при любом $n = 1, 2, \dots$

не выше m^*), а так как $x_n(t)$ равномерно сходится к $x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ (см. Натансон — I, с. 23), то по сделанному выше замечанию

$$f_0(x_n) \rightarrow f_0(x),$$

но

$$|f_0(x_n)| \leq \sum_{h=0}^n C_n^h \left| x\left(\frac{k}{n}\right) \right| |f_0(x_n^{(n-h)})| \leq \|x\| \sum_{h=0}^n C_n^h |\Delta^{n-h} \mu_h| \leq M \|x\|.$$

Переходя в левой части к пределу при $n \rightarrow \infty$, найдем

$$|f_0(x)| \leq M \|x\|.$$

Так как x — произвольный полином, то непрерывность f_0 доказана. Теперь достаточно распространить f_0 на все $C[0, 1]$ по непрерывности (см. IV.8.2) и применить к полученному в результате распространения функционалу f теорему об общей форме линейного функционала в пространстве $C[0, 1]$, на основании которой

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dg(t), \quad x \in C[0, 1],$$

где $g(t)$ — функция ограниченной вариации.

Теорема полностью доказана.

*) Вот доказательство этого факта. Дифференцируя выражение (12) и замесая в первой сумме индекс суммирования k на $k+1$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dx_n}{dt} &= \sum_{h=0}^n C_n^h [kt^{h-1} (1-t)^{n-h} - (n-k)t^h (1-t)^{n-h-1}] x\left(\frac{k}{n}\right) = \\ &= n \sum_{h=0}^{n-1} C_{n-1}^h t^h (1-t)^{n-1-h} \left[x\left(\frac{k+1}{n}\right) - x\left(\frac{k}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

По индукции получим

$$\frac{d^s x_n}{dt^s} = n(n-1) \dots (n-s+1) \sum_{h=0}^{n-s} C_{n-s}^h t^h (1-t)^{n-s-h} \Delta^s x\left(\frac{k}{n}\right).$$

Так как $x(t)$ — полином степени m , то $\Delta^{m+1} x\left(\frac{k}{n}\right) = 0$. Поэтому $\frac{d^{m+1} x_n}{dt^{m+1}} = 0$, откуда и следует, что $x_n(t)$ — полином, степень которого не превосходит m .

Г л а в а VII

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Значительное число конкретных математических процессов может быть включено в абстрактную схему, описываемую с помощью последовательности линейных операторов. К таким задачам относятся, например, исследование сходимости рядов Фурье и интерполяционных полиномов, исследование формул механических квадратур, теория сингулярных интегралов и т. п. При этом в абстрактной форме изучение вопроса обычно сводится либо к установлению сходимости последовательности линейных операторов, либо к доказательству ограниченности норм операторов этой последовательности, либо к другим, аналогичным задачам.

§ 1. Основные теоремы

1.1. Главную роль среди теорем о последовательностях линейных операторов играет

Теорема 1. Если последовательность непрерывных линейных операторов $\{U_n\}$, переводящих B -пространство X в нормированное пространство Y , ограничена в каждой точке, т. е. если

$$\sup_n \|U_n(x)\| < \infty, \quad x \in X, \quad (1)$$

то нормы этих операторов ограничены в совокупности:

$$\|U_n\| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что если известна граница значений линейного оператора в некотором шаре:

$$\|U(x)\| \leq B, \quad x \in B_\delta(x_0),$$

то может быть дана оценка его нормы, а именно:

$$\|U\| \leq 2B/\delta.$$

Действительно, взяв любое x' с $\|x'\| < 1$, будем иметь

$$x = x_0 + \delta x' \in B_\delta(x_0).$$

Следовательно,

$$\|U(x_0) + \delta U(x')\| \leq B,$$

а потому

$$\|U(x')\| = \frac{1}{\delta} \|U(\delta x')\| \leq \frac{1}{\delta} [\|U(x_0) + \delta U(x')\| + \|U(x_0)\|] \leq \frac{2B}{\delta},$$

откуда и вытекает, что $\|U\| \leq 2B/\delta$.

Переходим к доказательству теоремы. Предположим, что последовательность $\{\|U_n\|\}$ неограничена. Введем функционал

$$p(x) = \sup_n \|U_n(x)\|.$$

Он неограничен в каждом шаре, так как если бы $p(x) \leq B$ и $B_0(x_0)$, то, как было отмечено, оказалось бы $\|U_n\| \leq 2B/\delta$ при любом $n = 1, 2, \dots$

Отсюда следует, что множество $E_k = \{x \in X: p(x) > k\}$ плотно в X . Далее, множество E_k открыто, так как если $x_0 \in E_k$, т. е. $p(x_0) > k$, то при некотором n_0 будет $\|U_{n_0}(x_0)\| > k$, а тогда по непрерывности $\|U_{n_0}(x)\|$ и $\|U_{n_0}(x)\| > k$ для x , достаточно близких к x_0 .

Множество E_k , как открытое и плотное к X , представляет собой вычет (см. I.4.7). Но пересечение счетной системы вычетов также является вычетом и, следовательно, непусто. Если

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, \text{ то}$$

$$\sup_n \|U_n(x_0)\| = \infty$$

вопреки предположению.

Замечание. Условие теоремы может быть ослаблено тем, что выполнения (1) достаточно требовать на множестве второй категории, а не на всем X (не предполагая полноты X).

Доказанную теорему можно сформулировать еще и так (принцип фиксации особенностей): если

$$\sup_n \|U_n\| = \infty,$$

то найдется такой элемент $x_0 \in X$, что

$$\sup_n \|U_n(x_0)\| = \infty. \quad (2)$$

При этом множество элементов, удовлетворяющих (2), является вычетом.

Последняя формулировка позволяет несколько обобщить высказанное предложение. Пусть $\{U_n^{(k)}\}$ ($k, n = 1, 2, \dots$) — непрерывные линейные операторы из X в Y , причем

$$\sup_n \|U_n^{(k)}\| = \infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда существует такой элемент x_0 , что

$$\sup_n \|U_n^{(k)}(x_0)\| = \infty, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Действительно, множество A_k тех $x \in X$, для которых

$$\sup_n \|U_n^{(k)}(x)\| = \infty,$$

является вычетом; следовательно, пересечение $A_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ непусто.

Ясно, что в качестве x_0 можно взять любой элемент из A_0 .

Доказанное предложение называют иногда принципом сгущения особенностей.

1.2. Применение теоремы 1 в случае, когда последовательность операторов $\{U_n\}$ сходится на X , т. е. при каждом $x \in X$ существует

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x), \quad (4)$$

приводит к важному результату о сходящихся последовательностях линейных операторов. Именно, при сделанных выше предположениях о пространствах X и Y имеет место

Теорема 2. Если последовательность непрерывных линейных операторов $\{U_n\}$ сходится на X к оператору U , то U — непрерывный линейный оператор, причем

$$\|U\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|. \quad (5)$$

Доказательство. Линейность оператора U очевидна. Далее, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n(x)\| = \|U(x)\| < \infty$, то $\sup_n \|U_n(x)\| < \infty$ и по теореме 1 последовательность норм $\{\|U_n\|\}$ ограничена. А тогда

$$\|U(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n(x)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\| \|x\|,$$

откуда и вытекает непрерывность оператора U и неравенство (5).

Замечание. Подчеркнем, что сходимости U_n к U по норме в пространстве $B(X, Y)$ может и не быть, в чем легко убедиться на примере: $X = l^1$, $Y = R^1$, $U_n = f_n$, где

$$f_n(x) = \xi_n, \quad x = \{\xi_k\} \in l^1; \quad n = 1, 2, \dots$$

Хотя $f_n(x) \rightarrow 0$, но $\|f_n\| = 1$ ($n = 1, 2, \dots$).

Ограниченность последовательности норм является в известном смысле и достаточным условием сходимости последовательности линейных операторов. Точнее говоря, справедлива (см. Банах, Штейнгауз [1])

Теорема 3 (Банах — Штейнгауз). Для того чтобы последовательность непрерывных линейных операторов $\{U_n\}$, отображающих B -пространство X в B -пространство Y , сходилась на X к непрерывному линейному оператору, необходимо и достаточно, чтобы

1) нормы операторов U_n были ограничены в совокупности

$$\|U_n\| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots;$$

2) последовательность $\{U_n(x')\}$ сходилась в себе, каков бы ни был элемент x' из некоторого плотного в X множества D .

Доказательство. Необходимость первого условия вытекает из теоремы 2. Необходимость второго очевидна.

Достаточность. Возьмем произвольное $x \in X$ и пайдем $x' \in D$ такое, что

$$\|x - x'\| < \varepsilon.$$

При достаточно больших m, n

$$\|U_m(x') - U_n(x')\| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|U_m(x) - U_n(x)\| &\leq \|U_m(x') - U_n(x')\| + \|U_m(x) - U_m(x')\| + \\ &+ \|U_n(x) - U_n(x')\| < \varepsilon + (\|U_m\| + \|U_n\|)\|x - x'\| < (2M + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, ввиду полноты пространства Y существует $U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x)$, а тогда по теореме 2 U — непрерывный линейный оператор.

Замечание 1. Теорема (в части достаточности) остается верной, если сходимост в себе последовательности $\{U_n(x')\}$ ($x' \in D$) заменить сходимостью к $U(x')$, где U — данный непрерывный линейный оператор. Полнота пространства Y при этом не нужна.

Замечание 2. Условие 2) можно заменить требованием сходимости на фундаментальном в X множестве D . В самом деле, сходимост на D влечет сходимост на $\mathcal{L}(D)$, которое уже будет плотным в X .

Замечание 3. Первое условие теоремы 3 может быть заменено согласно теореме 1 условием (1).

Следствие. Множество точек сходимости последовательности непрерывных линейных операторов или первой категории или все пространство.

Действительно, если множество точек сходимости второй категории, то по замечанию к теореме 1 последовательность норм ограничена. С другой стороны, множество точек сходимости, будучи множеством второй категории, плотно в некотором шаре, а так как оно, очевидно, линейное, то и во всем пространстве X . Применима теорема 3.

Замечание 4. Теоремы 1—2 и теорема 3 (в части достаточности) остаются верными, если в них вместо последовательности операторов рассматривать направление операторов.

§ 2. Некоторые приложения к теории функций

Теоремы предыдущего параграфа имеют многообразные применения. Остановимся на некоторых из них.

2.1. Первым рассмотрим вопрос о сходимости формул механических квадратур.

При приближенном вычислении интегралов обычно пользуются формулами механических квадратур, имеющими вид

$$\int_a^b x(t) dt \cong \sum_{k=0}^n A_k x(t_k), \quad a \leq t_0 < t_1 \dots < t_n \leq b.$$

Таковы, например, формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. К этому же типу относятся более сложные формулы Ньютона — Котеса и Гаусса. Общая теория кубатурных формул разработана С. Л. Соболевым (см. С. Л. Соболев — II).

Поскольку одна формула не может обеспечить сколь угодно высокой точности, естественно рассмотреть последовательность формул

$$\int_a^b x(t) dt \cong \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}),$$

$$a \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b; \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

и поставить вопрос об условиях, при которых погрешность при вычислении интегралов по этим формулам стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Если для данной функции x это обстоятельство имеет место, мы будем говорить, что формулы механических квадратур (1) *сходятся* для функции x .

Ответ на поставленный вопрос о сходимости формул механических квадратур дает

Теорема 1 (Сёге). *Для того чтобы формулы механических квадратур (1) сходились для любой непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы*

$$1) \sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| \leq M, \quad n = 0, 1, \dots;$$

2) *сходимость этих формул имела место для каждого полинома.*

Доказательство. В пространстве $C[a, b]$ рассмотрим функционалы

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$f(x) = \int_a^b x(t) dt.$$

Как было установлено в V.2.1,

$$\|f_n\| = \sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}|, \quad n = 0, 1, \dots$$

Таким образом, условие 1) означает ограниченность в совокупности норм функционалов f_n , а условие 2), что $f_n(x) \rightarrow f(x)$ для x , принадлежащих плотному в $C[a, b]$ множеству всех полиномов. Поэтому сформулированный результат есть частный случай теоремы Банаха — Штейнгауза (с учетом замечания 1 к ней).

Замечание 1. Если коэффициенты $A_k^{(n)}$ положительны при любых k и n , то первое условие является следствием второго.

Действительно, при $x(t) \equiv 1$ согласно второму условию имеет место сходимость формул, т. е.

$$b - a = \int_a^b dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A_k^{(n)}.$$

откуда и следует ограниченность сумм $\sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)}$.

Замечание 2. Во втором условии множество всех полиномов может быть заменено другим плотным в $C[a, b]$ множеством, например, множеством всех кусочно-линейных функций, или даже множеством, полным в $C[a, b]$, например, степенями независимой переменной (см. замечание 2 к теореме Банаха — Штейнгауза).

Замечание 3. Сказанное выше по поводу формул (1) без каких-либо изменений переносится на более общий случай формул

$$\int_a^b p(t) x(t) dt \cong \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}), \quad (2)$$

$$a \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b; \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $p(t)$ — фиксированная суммируемая функция, называемая весовой.

Одним из основных путей получения формул механических квадратур является следующий процесс. При каждом $n = 0, 1, \dots$ произвольным образом зададим в промежутке $[a, b]$ значения $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$ и построим по функции $x(t)$ ее интерполяционный полином Лагранжа $P_n(x; t)$, совпадающий с $x(t)$ в точках $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$. Как известно,

$$P_n(x; t) = \sum_{k=0}^n l_k^{(n)}(t) x(t_k^{(n)}),$$

где

$$l_k^{(n)}(t) = \frac{\omega_n(t)}{(t - t_k^{(n)}) \omega_n'(t_k^{(n)})},$$

$$\omega_n(t) = (t - t_0^{(n)})(t - t_1^{(n)}) \dots (t - t_n^{(n)}), k = 0, 1, \dots, n, n = 0, 1, \dots$$

Заменяя в интеграле $\int_a^b p(t) x(t) dt$ функцию $x(t)$ ее интерполяционным полиномом, приходим к формуле механических квадратур

$$\int_a^b p(t) x(t) dt \cong \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}), \quad A_k^{(n)} = \int_a^b p(t) l_k^{(n)}(t) dt. \quad (3)$$

Формулы, полученные описанным способом, называют *интерполяционными* (см. Натансон — I, с. 590).

Если функция $x(t)$ является полиномом степени не выше n , то ее интерполяционный полином совпадает с ней самой, поэтому формула (3) в этом случае будет точной. Итак, если $x(t)$ — произвольный полином, то для достаточно больших n погрешность формулы равна нулю, т. е. интерполяционные формулы механических квадратур всегда сходятся на множестве всех полиномов. Таким образом, необходимым и достаточным условием сходимости таких формул для любой непрерывной функции является лишь одно первое условие теоремы 1. В частности, согласно замечанию 1 сходимость будет обеспечена, если все коэффициенты $A_k^{(n)} \geq 0$.

Последнее обстоятельство имеет место, например, в случае, когда весовая функция положительна, а точки $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$ выбраны так, что полиномы $\omega_n(t)$ образуют ортогональную по весу $p(t)$ систему. Получающиеся при этом квадратурные формулы называются *формулами типа Гаусса*. Они отличаются от остальных интерполяционных формул механических квадратур тем, что точны для полиномов степени $2n + 1$ (см. Натансон — I, с. 601).

2.2. Рассмотрим пространство C , элементами которого являются периодические, с одним и тем же периодом (для определенности равным 2π) непрерывные функции, заданные на всей вещественной прямой. Каждую такую функцию можно, очевидно, трактовать как функцию, определенную на некотором промежутке $[a, a + 2\pi]$ длиной 2π и удовлетворяющую условию $x(a + 2\pi) = x(a)$. Это позволяет отождествить C с замкнутым подпространством в $C[a, a + 2\pi]$.

Отсюда следует, что оператор $y = U(x)$:

$$y(s) = \int_a^{a+2\pi} K(s, t) x(t) dt, \quad s \in [a, a + 2\pi], \quad (4)$$

с непрерывным ядром $K(s, t)$ будет линейным оператором из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}$. Предоставляем читателю проверить, что выражение для нормы оператора U будет

$$\|U\| = \max_s \int_a^{a+2\pi} |K(s, t)| dt \quad (5)$$

(ср. V.2.4).

Оператор (4) переводит, вообще говоря, периодические функции в непериодические. Чтобы U была оператором из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(s, t)$ было 2π -периодическим по первому аргументу, т. е. чтобы $K(s + 2\pi, t) = K(s, t)$. Если, наконец, ядро $K(s, t)$ определено на всей плоскости и 2π -периодично и по второму аргументу, то интегрировавшие в (4) и (5) можно производить по любому промежутку длиной 2π .

Образует ряд Фурье непрерывной 2π -периодической функции $x(t)$:

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin kt dt,$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Сопоставляя каждой функции $x(t)$ из $\mathcal{C}$ частную сумму $S_n(x)$ ее ряда Фурье, мы получим некоторый оператор S_n , переводящий $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}$. Как известно, эта сумма выражается интегралом Дирихле:

$$y = S_n(x), \quad y(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \frac{\sin(2n+1)\frac{t-s}{2}}{\sin \frac{t-s}{2}} dt,$$

т. е. оператор S_n имеет вид (4), причем вследствие непрерывности ядра S_n — непрерывный линейный оператор. Покажем, что $\|S_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Действительно, согласно (5) и в силу периодичности ядра

$$\begin{aligned} \|S_n\| &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1)\frac{t-s}{2}}{\sin \frac{t-s}{2}} \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin mt}{\sin t} \right| dt, \end{aligned}$$

где $m = 2n + 1$. Используя известные из анализа неравенства

$$|\sin t| \leq |t|; \quad \sin s \geq 2s/\pi, \quad 0 \leq s \leq \pi/2,$$

получим далее

$$\begin{aligned} \|S_n\| &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin mt}{\sin t} \right| dt > \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{k\pi/m}^{(2k+1)\pi/(2m)} \frac{|\sin mt|}{\sin t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^{\pi/(2m)} \frac{|\sin mt|}{\sin\left(t + \frac{k\pi}{m}\right)} dt \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^{\pi/(2m)} \frac{\frac{2}{\pi} mt}{t + \frac{k\pi}{m}} dt \geq \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\pi/(4m)}^{\pi/(2m)} \frac{\frac{2}{\pi} mt}{t + \frac{k\pi}{m}} dt \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\frac{2}{\pi} m \frac{\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m} + \frac{k\pi}{m}} \frac{\pi}{4m} \geq \frac{1}{8\pi} \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k} \geq \\ &\geq \frac{1}{8\pi} \sum_{k=2}^{m-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{8\pi} \ln \frac{m}{2} \geq \frac{1}{8\pi} \ln n. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|S_n\| \geq \frac{1}{8\pi} \ln n,$$

откуда и вытекает требуемый результат.

На основании теоремы 1.3 заключаем, что существует непрерывная периодическая функция, ряд Фурье которой не сходится равномерно ни к какой функции.

Приведенные рассуждения позволяют установить также существование непрерывной периодической функции, ряд Фурье которой расходится в произвольной наперед заданной точке.

Для этого рассмотрим в пространстве C последовательность функционалов f_n :

$$f_n(x) = S_n(x)(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{t-t_0}{2}}{\sin \frac{t-t_0}{2}} x(t) dt.$$

Так же, как и в V.2.2, норма функционала f_n определяется равенством

$$\|f_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1)\frac{t-t_0}{2}}{\sin \frac{t-t_0}{2}} \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt = \|S_n\|$$

и, следовательно, $\|f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Поэтому по теореме 1.1 существует

элемент $x_0 \in C$, для которого $\sup_n |f_n(x_0)| = \infty$, что и требовалось доказать.

Возьмем теперь произвольное счетное множество $e = \{t_k\}$ на числовой прямой и образуем функционалы $f_n^{(k)}$:

$$f_n^{(k)}(x) = S_n(x)(t_k), \quad k, n = 1, 2, \dots$$

Применяя к ним принцип сгущения особенностей, пайдем такой элемент $x_0 \in C$, для которого

$$\sup_n |f_n^{(k)}(x_0)| = \infty, \quad k = 1, 2, \dots,$$

т. е. такую функцию $x_0(t)$, ряд Фурье которой расходится в каждой точке множества e .

Пример непрерывной функции, ряд Фурье которой не всюду сходится, впервые указан Дю-буа-Реймоном (см. Зигмунд).

Если рассматривать S_n как линейный оператор из L^1 в L^1 , то вследствие симметрии ядра $\|S_n\|$ сохранит прежнее значение, и поэтому на основании теоремы 1.3 можно заключить о существовании суммируемой функции, ряд Фурье которой не сходится в среднем в L^1 .

2.3. Широкое обобщение предыдущих результатов может быть получено, если ввести понятие полиномиального оператора.

Рассмотрим опять пространство C периодических (с периодом 2π) непрерывных функций и обозначим через H_n его подпространство, состоящее из всех тригонометрических полиномов порядка не выше n .

Линейный непрерывный оператор U в пространстве C называется *полиномиальным* (тригонометрическим) *оператором порядка n* , если:

- 1) $U(x) \in H_n$, каков бы ни был элемент $x \in C$;
- 2) если $x \in H_n$, то $U(x) = x$.

Иначе говоря, полиномиальный оператор сопоставляет каждой 2π -периодической функции тригонометрический полином порядка не выше n , причем сами эти полиномы оставляет без изменения.

Простейшим примером полиномиального оператора является оператор S_n , изученный в 2.2. Другим примером может служить оператор, сопоставляющий функции ее интерполяционный (тригонометрический) полином, построенный по фиксированной системе узлов.

Введем следующие обозначения. Если $y = U(x)$, то значение функции y при данном s будем обозначать $U(x; s)$. Так, например, $S_n(x; s) = S_n(x)(s)$. Далее, если $x(t)$ — некоторая функция из C , то через $x^h(t)$ будет обозначаться функция, получающаяся из $x(t)$ сдвигом аргумента:

$$x^h(t) = x(t + h).$$

Ясно, что $x^h \in \mathcal{C}$ при любом h . Отметим еще, что ввиду равномерной непрерывности функции $x \in \mathcal{C}$

$$\|x^h - x\| = \max_t |x^h(t) - x(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (6)$$

Относительно полиномиальных операторов и их последовательностей могут быть установлены весьма важные общие факты. Все они опираются на следующую лемму, связывающую произвольный полиномиальный оператор с простейшим — S_n .

Лемма 1. Если U есть полиномиальный оператор порядка n , то справедливо тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x^\tau; s - \tau) d\tau = S_n(x; s), \quad x \in \tilde{\mathcal{C}}, \quad (7)$$

(тождество Зигмунда — Марцинкевича — Бермана).

Доказательство. Пусть сначала $x \in H_n$, тогда $x^\tau \in H_n$. Следовательно,

$$U(x^\tau; s - \tau) = x^\tau(s - \tau) = x(s).$$

А так как S_n — полиномиальный оператор порядка n , то

$$S_n(x; s) = x(s),$$

что и доказывает тождество в этом случае.

Пусть теперь $x(t) = \cos mt$ или $x(t) = \sin mt$, где $m > n$. Ограничиваясь для определенности первым случаем, будем иметь

$$\begin{aligned} x^\tau(t) = \cos m(t + \tau) &= \cos mt \cos m\tau - \sin mt \sin m\tau = \\ &= x_1(t) \cos m\tau + x_2(t) \sin m\tau. \end{aligned}$$

Поэтому, если положить

$$y_1 = U(x_1), \quad y_2 = U(x_2)$$

(y_1, y_2 — элементы из H_n), то

$$U(x^\tau; s - \tau) = y_1(s - \tau) \cos m\tau + y_2(s - \tau) \sin m\tau.$$

Но $y_1(s - \tau)$ и $y_2(s - \tau)$ представляют собой тригонометрические полиномы относительно τ , порядок которых не превышает n ; вследствие чего они ортогональны функциям $\cos m\tau$ и $\sin m\tau$. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x^\tau; s - \tau) d\tau = 0.$$

Очевидно, нулю равна и правая часть (7).

Итак, тождество (7) доказано в этом случае, а поскольку обе части его аддитивны относительно x , то тем самым (7) установлено для произвольного тригонометрического полинома.

Рассмотрим теперь левую часть тождества (7) и докажем, что при фиксированном s она представляет собой линейный непрерывный функционал в пространстве C . Обозначим левую часть (7) через $f_s(x)$ и проверим, что функционал f_s имеет смысл, каков бы ни был элемент $x \in C$. Для этого покажем, что под знаком интеграла стоит непрерывная функция от τ . Имеем

$$\begin{aligned} & |U(x^{\tau+h}; s - \tau - h) - U(x^{\tau}; s - \tau)| \leq \\ & \leq |U(x^{\tau+h}; s - \tau - h) - U(x^{\tau}; s - \tau - h)| + \\ & \quad + |U(x^{\tau}; s - \tau - h) - U(x^{\tau}; s - \tau)| \leq \\ & \leq \|U(x^{\tau+h} - x^{\tau})\| + |U(x^{\tau}; s - \tau - h) - U(x^{\tau}; s - \tau)| \leq \\ & \leq \|U\| \|x^{\tau+h} - x^{\tau}\| + |U(x^{\tau}; s - \tau - h) - U(x^{\tau}; s - \tau)|. \end{aligned}$$

При достаточно малых h первое слагаемое здесь сколь угодно мало вследствие (6), второе — ввиду непрерывности функции $U(x^{\tau}, t)$.

Функционал f_s , очевидно, аддитивен, а поскольку

$$|f_s(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |U(x^{\tau}; s - \tau)| d\tau \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|U\| \|x^{\tau}\| d\tau = \|U\| \|x\|,$$

то f_s — ограниченный функционал.

Если, наконец, обозначить $g_s(x) = S_n(x; s)$, то тождество (7) будет означать совпадение функционалов f_s и g_s . По ранее было доказано, что эти функционалы совпадают на плотном в C множестве всех тригонометрических полиномов. Поскольку f_s и g_s — непрерывные функционалы, из этого вытекает их совпадение на всем пространстве C , что и требовалось доказать.

Теорема 2. Среди всех тригонометрических полиномиальных операторов порядка n наименьшую норму имеет оператор S_n , т. е. всегда

$$\|U\| \geq \|S_n\| > A \ln n.$$

Действительно, в силу тождества (7)

$$\|S_n(x)\| = \max_s |S_n(x; s)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max_s |U(x^{\tau}; s - \tau)| d\tau \leq \|U\| \|x\|,$$

откуда $\|S_n\| \leq \|U\|$.

Теорема 3 (Лозипский — Харшиладзе). Если $\{U_n\}$ — последовательность тригонометрических полиномиальных операторов, причем U_n — оператор порядка n , то нормы их стремятся к бесконечности. В частности, такая последовательность не может оказаться сходящейся на всем пространстве C .

Первое утверждение непосредственно следует из предыдущей теоремы. Второе получается с помощью теоремы 1.1.

Как частный случай сформулированной теоремы отметим следующий важный факт. Каковы бы ни были узлы интерполяции, существует такая непрерывная 2π -периодическая функция, что построенная для нее последовательность интерполяционных полиномов не сходится равномерно (теорема Фабера).

Отметим без доказательства, что утверждения теорем 2 и 3 переносятся на случай пространства L^1 .

В пространстве $C[0, 1]$ можно аналогичным образом рассматривать полиномиальные операторы (алгебраические), понимая под этим такие непрерывные линейные операторы, которые переводят $C[0, 1]$ в подпространство H_n всех алгебраических полиномов степени не выше n , а элементы из H_n не изменяют. Однако удобнее провести исследование алгебраического случая путем сведения его к тригонометрическому (см. Натансон — I, с. 672).

Рассмотрим полиномиальный (алгебраический) оператор U_n , сопоставляющий непрерывной функции n -ю частную сумму ряда Фурье этой функции по заданной системе ортогональных полиномов. Применяя к последовательности операторов аналог теоремы 3 для алгебраического случая, приходим к такому результату (Николаев [1]): *какова бы ни была ортогональная система полиномов, существует такая непрерывная функция, ряд Фурье которой по этой системе полиномов не сходится равномерно.*

Теоремы 2 и 3 установлены С. М. Лозинским и Ф. И. Харшиладзе (см. Лозинский [1, 2]). С. М. Лозинским осуществлено далеко идущее развитие этих идей.

2.4. Рассмотрим вопрос о представлении функций сингулярными интегралами.

Пусть в квадрате $[a, b; a, b]$ задана последовательность суммируемых функций $\{K_n(s, t)\}$. Говорят, что функция $x(s)$ представима сингулярным интегралом, если последовательность

$$x_n(s) = \int_a^b K_n(s, t) x(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

сходится к $x(s)$ в том или ином смысле. Сингулярные интегралы систематически встречаются в различных вопросах анализа. Назовем для примера интегралы Дирихле, Фейера, Валле — Пуссена, Гильберта и др.

Ограничиваясь непрерывными ядрами, докажем теорему о сходимости сингулярных интегралов в среднем в пространстве $L^1(a, b)$.

Теорема 4. *Для того чтобы последовательность (8) сходилась к x в пространстве L^1 , какова бы ни была суммируемая*

функция x , необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \quad \int_a^b \left| \int_a^b K_n(s, t) x(t) dt - x(s) \right| ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (9)$$

для всякого x из полного в пространстве L^1 множества D ;

$$2) \quad \int_a^b |K_n(s, t)| ds \leq M, \quad t \in [a, b]; \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Действительно, если обозначить через U_n оператор в пространстве L^1 , порожденный ядром $K_n(s, t)$:

$$y = U_n(x), \quad y(s) = \int_a^b K_n(s, t) x(t) dt,$$

то первое условие означает, что $U_n(x) \rightarrow x$ для $x \in D$, а второе согласно V.2.5, что $\|U_n\| \leq M$. Таким образом, сформулированный результат есть частный случай теоремы Банаха — Штейнгауза (точнее говоря, замечания 2 к ней; см. 1.2).

Замечание 1. В части достаточности условие 1) можно заменить двумя более простыми:

$$\int_a^{\beta} K_n(s, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad s \in (\alpha, \beta) \subset [a, b], \quad (11)$$

$$\int_a^b |K_n(s, t)| dt \leq M, \quad s \in [a, b]; \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Легко проверить, что в этом случае в качестве D можно взять совокупность характеристических функций всевозможных промежутков, содержащихся в $[a, b]$.

Действительно, если $\tilde{x}$ — характеристическая функция промежутка $[\alpha, \beta]$, то при $s \in (\alpha, \beta)$

$$\tilde{x}_n(s) = \int_a^{\beta} K_n(s, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \tilde{x}(s);$$

если же $s \notin [\alpha, \beta]$ и, например, $a \leq s < \alpha$, то

$$\begin{aligned} \tilde{x}_n(s) &= \int_a^{\beta} K_n(s, t) dt = \int_a^{\beta} K_n(s, t) dt - \int_a^{\alpha} K_n(s, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - 1 = \\ &= 0 = \tilde{x}(s). \end{aligned}$$

Таким образом, $\tilde{x}_n(s) \rightarrow \tilde{x}(s)$ при всех $s \neq \alpha, \beta$, т. е. почти везде. Условие (12) обеспечивает возможность предельного перехода

под знаком интеграла в интеграле $\int_a^b \left| \int_a^b K_n(s, t) \tilde{x}(t) dt - \tilde{x}(s) \right| ds$,

вследствие чего устанавливается, что он имеет пределом нуль.

Замечание 2. Если ядра $K_n(s, t)$ симметричны, то условие (12) совпадает с условием 2) теоремы, и потому условия (11) и (12) в этом случае необходимы и достаточны.

Если рассматривать операторы U_n , порожденные ядрами $K_n(s, t)$, как операторы в пространстве $C[a, b]$, то аналогичным образом мы получим условия равномерной сходимости последовательности (8) к непрерывной функции $x(s)$.

Более подробные сведения о сингулярных интегралах читатель может получить в монографии Данфорд, Шварц — II и статье И. П. Натансона [1].

2.5. Рассмотрим в заключение вопрос об обобщенном суммировании рядов (см. Зигмунд).

Пусть имеется числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (13)$$

и пусть $\{s_k\}$ — последовательность его частных сумм. Введем бесконечную матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (14)$$

и образуем выражения

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} s_{k1} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

предполагая, что все ряды в правой части сходятся.

Говорят, что ряд (13) *обобщенно суммируем матрицей* (14), если существует конечный предел последовательности $\{\sigma_n\}$. Величину этого предела

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

называют *обобщенной суммой* ряда (13). Так, например, *метод суммирования Чезаро*, когда

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_{k1}$$

характеризуется матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Вместо того чтобы говорить об обобщенном суммировании рядов, можно рассматривать вопрос об определении обобщенного предела последовательности, соотнося данной числовой последовательности $x = \{\xi_k\}$ последовательность

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и исследуя ее поведение при $n \rightarrow \infty$. Ясно, что одна постановка задачи легко сводится к другой. Поскольку точка зрения последовательности оказывается удобнее, мы и остановимся на ней, сохраняя, однако, прежний термин «метод суммирования».

Естественно рассматривать только такие методы суммирования, которые применимы ко всякой сходящейся в обычном смысле слова последовательности и дают для нее в качестве обобщенного предела обычный предел. Метод суммирования, обладающий указанным свойством, называется *перманентным*, или *регулярным*. Условия перманентности метода суммирования, определяемого матрицей (14), сформулированы в следующей теореме.

Теорема 5 (Тёплиц). *Для того чтобы метод суммирования, определяемый матрицей (14), был перманентным, необходимо и достаточно, чтобы:*

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{nk} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots);$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} = 1;$
- 3) $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots).$

Доказательство. В пространстве с сходящихся последовательностей рассмотрим функционалы

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k, \quad x = \{\xi_k\}; \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\sigma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k.$$

В VI.2.2 было указано, что

$$\|\sigma_n\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

поэтому условие 3) означает ограниченность норм функционалов σ_n .

Далее, введем последовательности

$$x_0 = (1, 1, \dots, 1, \dots), \quad x_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

(единица на k -м месте). Так как

$$\sigma_n(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}, \quad \sigma_n(x_k) = \alpha_{nk}, \quad n, k = 1, 2, \dots,$$

то условия 1) и 2) могут быть записаны в виде

$$\sigma_n(x_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \sigma(x_k), \quad \sigma_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \sigma(x_0).$$

Поскольку совокупность элементов $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ полна в s , условия теоремы совпадают с условиями теоремы Банаха — Штейнгауза (с учетом замечаний 1 и 2). Таким образом, условия 1)—3) необходимы и достаточны для того, чтобы

$$\sigma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma(x),$$

а это и означает перманентность метода суммирования. Матрица, отвечающая методу Чезаро, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы. Отсюда следует известный факт перманентности метода средних арифметических (Чезаро).

СЛАБАЯ ТОПОЛОГИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В главах III и V мы уже имели дело с изучением простейших свойств слабой топологии. В этой главе рассмотрим более глубокие свойства этой топологии. В § 4 изучается одна задача математической экономики, при решении которой используются свойства слабой топологии и теорема об общем виде непрерывного линейного функционала в пространстве непрерывных функций.

§ 1. Слабо ограниченные множества

1.1. Начнем с формулировки важных следствий теоремы Банаха — Штейнгауза для слабой и (*)-слабой топологий. Прежде всего рассмотрим критерии слабой и (*)-слабой сходимости последовательностей.

Пусть имеется последовательность линейных непрерывных функционалов $\{f_n\}$, заданных на B -пространстве X . Если при каждом $x \in X$ существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad (1)$$

то согласно теореме VII.1.2. функционал f также будет линейным и непрерывным. При этом $f_n \rightarrow f(\sigma(X^*, X))$.

Теорема Банаха — Штейнгауза приводит к следующему критерию (*)-слабой сходимости.

Теорема 1. Пусть X — B -пространство. Для того чтобы было справедливо соотношение

$$f_n \rightarrow f(\sigma(X^*, X)), \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:

- 1) последовательность норм $\{\|f_n\|\}$ ограничена;
- 2) соотношение (1) имеет место для всех x из плотного в X множества D .

Замечание. В условии 2) можно ограничиться требованием, чтобы D было фундаментальным в X (ср. замечание 2 к теореме Банаха — Штейнгауза),

Непрерывность нормы по отношению к слабой сходимости не имеет места, т. е. из (2) не следует, что $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$. Можно лишь утверждать, что

$$\|f\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$$

(см. теорему VII.1.2).

Рассмотрим теперь слабую сходимость в X . Прежде всего отметим, что каноническое вложение π нормированного пространства X в X^{**} есть линейный изоморфизм ЛВП $(X, \sigma(X, X^*))$ на ЛВП $\pi(X)$, рассматриваемое как подпространство ЛВП $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ — ведь π в том и другом пространстве сходимость направления элементов означает сходимость на всех $f \in X^*$.

Это простое замечание позволяет в ряде случаев сводить исследование слабой топологии в X к рассмотрению $(*)$ -слабой топологии в X^{**} . Например, учитывая изометричность отображения π , из замечания к теореме 1 получаем, что если $x_n \rightarrow x(\sigma(X, X^*))$, то $\|x\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$. Из аналогичных соображений,

используя теорему 1, получаем

Теорема 2. Для того чтобы в нормированном пространстве X последовательность $x_n \rightarrow x(\sigma(X, X^*))$, необходимо и достаточно, чтобы:

$$1) \sup_n \|x_n\| < \infty;$$

2) $f(x_n) \rightarrow f(x)$ для плотного (фундаментального) в пространстве X^* множества функционалов f .

1.2. Рассмотрим теперь слабо ограниченные множества. Множество E в нормированном пространстве X называется *слабо ограниченным*, если для любого $f \in X^*$ имеем $\sup \{|f(x)| : x \in E\} < \infty$. Множество E в X^* называется $(*)$ -слабо ограниченным, если для любого $x \in X$ имеем $\sup \{|f(x)| : f \in E\} < \infty$. Очевидно, что слабая ограниченность множества $E \subset X$ эквивалентна его ограниченности в ЛВП $(X, \sigma(X, X^*))$, а $(*)$ -слабая ограниченность $E \subset X^*$ эквивалентна ограниченности его в ЛВП $(X^*, \sigma(X^*, X))$.

Теорема 3. Если X — B -пространство, то множество $E \subset X^*$ $(*)$ -слабо ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено по норме в X^* .

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь утверждение, что $(*)$ -слабо ограниченное множество E ограничено по норме. Допустим противное. Тогда из E можно выделить последовательность $\{f_n\}$ такую, что $\|f_n\| \geq n^2$ ($n \in \mathbb{N}$). Так как

$$\left| \frac{1}{n} f_n(x) \right| \leq \frac{1}{n} \sup \{|f(x)| : f \in E\} \rightarrow 0, \quad x \in X,$$

то $(1/n)f_n \rightarrow 0(\sigma(X^*, X))$, что несовместимо с условием 1) теоремы 1, поскольку $\|(1/n)f_n\| \geq n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Точно так же, как мы из теоремы 1 вывели теорему 3, из теоремы 2 выводится

Теорема 4. Если X — нормированное пространство, то множество $E \subset X$ слабо ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено по норме в X .

Доказательство этой теоремы мы обещали дать еще в главе III (см. теорему III.3.3), но только теперь теорема Банаха — Штейнгауза позволила нам это сделать. Так как слабо компактные множества слабо ограничены, то из теоремы 4 вытекает, что любое слабо компактное множество ограничено по норме.

Напомним также, что слабая замкнутость и замкнутость по норме совпадают для выпуклых подмножеств нормированного пространства X (см. теорему III.3.2). Ниже мы покажем, что, несмотря на это свойство, в бесконечномерном B -пространстве слабая и нормированная топологии различны.

Рассуждение, приведенное в начале п. 1.1, показывает, что если X — B -пространство, то пространство X^* $(*)$ -слабо секвенциально полно, т. е. если для любого $x \in X$ существует предел числовой последовательности $\{f_n(x)\}$ ($f_n \in X^*$), то существует $f \in X^*$, $f_n \rightarrow f$ ($\sigma(X^*, X)$).

Само пространство X не всегда обладает аналогичным свойством. B -пространство X называется *слабо секвенциально полным*, если секвенциально полно ЛВП $(X, \sigma(X, X^*))$, т. е. выполнено следующее свойство: если для любого $f \in X^*$ существует предел числовой последовательности $\{f(x_n)\}$ ($x_n \in X$), то существует $x \in X$, $x_n \rightarrow x$ ($\sigma(X, X^*)$). Из $(*)$ -слабой секвенциальной полноты X^* вытекает, что рефлексивное B -пространство X слабо секвенциально полно. В главе X мы увидим, что пространство c_0 не является слабо секвенциально полным, а перефлексивное пространство $L^1[0, 1]$ слабо секвенциально полно (см. теорему X.4.9). Существенное различие между слабой и сильной топологиями показывает

Теорема 5. Для того чтобы в нормированном пространстве X слабая топология совпадала с нормированной, необходимо и достаточно, чтобы X было конечномерным.

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы IV.1.2. Докажем необходимость. Из III.3.3 вытекает, что в этом случае шар сопряженного пространства B_{X^*} содержится в абсолютно выпуклой оболочке конечного числа функционалов, откуда X^* , а тогда и X , конечномерно.

§ 2. Теория Эберлейна — Шмульяна

Если E — подмножество топологического пространства X , то оно может обладать тремя свойствами, близкими к свойству компактности (см. I.2.7). Напомним их:

1) E относительно компактно, т. е. замыкание E компактно;

2) E относительно секвенциально компактно, т. е. любая последовательность в E содержит подпоследовательность, сходящуюся к точке из X ;

3) E относительно счетно компактно, т. е. любая последовательность в E имеет предельную точку из X .

В общем случае справедливы импликации $1) \Rightarrow 3)$ и $2) \Rightarrow 3)$. В I.5.1 мы доказали что в случае метрического пространства X свойства 1)—3) эквивалентны. Здесь мы установим, что аналогичная картина имеет место, если X — B -пространство, наделенное слабой топологией. Сразу отметим, что слабо компактное множество не обязан быть метризуемым. Действительно, рассмотрим любое рефлексивное сепарабельное B -пространство X (например, гильбертово пространство с несчетным базисом). Его шар B_X слабо компактен, но если бы он был метризуем в слабой топологии, то по следствию 1 теоремы I.5.2 множество B_X было бы слабо сепарабельным, а тогда, так как B_X выпукло, и сильно сепарабельным. Отсюда вытекает, что X сепарабельно, что противоречит его выбору.

Эквивалентность 1)—3) для слабой топологии была доказана в результате многолетних усилий ряда математиков (1940-е годы). Этот важный раздел теории B -пространств принято называть теорией Эберлейна — Шмульяна. В 1940 г. советский математик Шмульян доказал $3) \Rightarrow 2)$. К доказательству $2) \Rightarrow 1)$ вплотную подошел в 1941 г. ленинградский математик Ю. Ф. Сирвинт (см. посмертную работу [2], представленную в редакцию в 1941 г.)*, но окончательно она была установлена в работе Эберлейна 1947 г. В нашем изложении мы следуем Р. Уитли и Х. Козну.

Лемма 1. Пусть X — B -пространство, Y — конечномерное подпространство в X^* . Тогда найдется конечный набор $\{f_m\}_{m=1}^n$, $\|f_m\| = 1$ ($m = 1, 2, \dots, n$) элементов X^* такой, что для любого $F \in Y$ имеем

$$\max\{|F(f_m)|: 1 \leq m \leq n\} \geq \frac{1}{2} \|F\|. \quad (1)$$

Доказательство. Так как единичная сфера пространства Y компактна, то найдется конечная $1/4$ -сеть $\{F_m\}_{m=1}^n$ для этой сферы ($\|F_m\| = 1$, $m = 1, 2, \dots, n$). Выберем элементы $f_m \in X^*$, $\|f_m\| = 1$ в X^* такие, что $|F_m(f_m)| > 3/4$ ($m = 1, 2, \dots, n$). Возьмем $F \in Y$ и докажем (1). Можно считать, что $F \neq 0$. Тогда для функционала $F/\|F\|$ найдется F_m такой, что $\|F/\|F\| - F_m\| < 1/4$. Имеем $|F(f_m)| \geq \|F\| |F_m(f_m)| - \|F\| \|F_m(f_m) - (F/\|F\|)(f_m)\| \geq \|F\| |F_m(f_m)| - \|F\| \|F/\|F\| - F_m\| > \frac{3}{4} \|F\| - \frac{1}{4} \|F\| = \frac{1}{2} \|F\|$, откуда получаем (1).

*) В. Л. Шмульян и Ю. Ф. Сирвинт погибли на фронте в годы Великой Отечественной войны.

Лемма 2. Пусть E — относительно слабо счетно компактное подмножество B -пространства X . Обозначим через E_1 $\sigma(X^{**}, X^*)$ -замыкание множества $\pi(E)$, где $\pi: X \rightarrow X^{**}$ — каноническое вложение. Тогда E_1 $\sigma(X^{**}, X^*)$ -компактно и для любой точки $F \in E_1$ существует последовательность $\{x_n\} \subset E$ такая, что $\pi(x) = F$ для любой слабой предельной точки $x \in X$ этой последовательности.

Замечание. Очевидно, что последовательность $\{x_n\}$ из формулировки леммы 2 имеет единственную предельную точку.

Доказательство. Так как E относительно счетно компактно, то для каждого $f \in X^*$ множество $f(E)$ есть относительно компактное множество скаляров. Отсюда E слабо ограничено, а тогда и сильно ограничено (теорема 1.4). Следовательно, множество E_1 $\sigma(X^{**}, X^*)$ -компактно по теореме Алаоглу — Бурбаки.

Пусть $F \in E_1$. Построим по индукции искомую последовательность $\{x_n\}$. Выберем $f_1 \in X^*$, $\|f_1\| = 1$. Так как $F \in E_1$, то найдется $x_1 \in E$, для которого $|(F - \pi(x_1))(f_1)| < 1$.

Пространство Y_2 , порожденное функционалами F и $F - \pi(x_1)$, конечномерно. В силу леммы 1 найдутся векторы $f_2, \dots, f_{k(2)}$ нормы 1 в X^* такие, что

$$\max \{ |G(f_m)| : 2 \leq m \leq k(2) \} \geq \frac{1}{2} \|G\|$$

для любого $G \in Y_2$. Опять, используя тот факт, что $F \in E_1$, мы можем найти $x_2 \in E$ такое, что

$$\max \{ |(F - \pi(x_2))(f_m)| : 1 \leq m \leq k(2) \} < 1/2.$$

Используя лемму 1 для $Y_3 = \mathcal{L}(F - \pi(x_2), F - \pi(x_1), F)$, находим точки $f_{k(2)+1}, \dots, f_{k(3)}$ нормы 1 в X^* такие, что

$$\max \{ |G(f_m)| : k(2) < m \leq k(3) \} \geq \frac{1}{2} \|G\|$$

для любого $G \in Y_3$. В силу того, что $F \in E_1$, мы можем найти $x_3 \in E$ такое, что

$$\max \{ |(F - \pi(x_3))(f_m)| : 1 \leq m \leq k(3) \} < 1/3.$$

Продолжая этот процесс, получаем последовательность $\{x_n\} \subset E$, удовлетворяющую соотношениям

$$\max \{ |G(f_m)| : k(n-1) < m \leq k(n) \} \geq \frac{1}{2} \|G\| \quad (2)$$

для любого $G \in Y_n = \mathcal{L}(F - \pi(x_n), F - \pi(x_{n-1}), \dots, F)$, где $f_m \in X^*$, $\|f_m\| = 1$, и

$$\max \{ |(F - \pi(x_n))(f_m)| : 1 \leq m \leq k(n) \} < 1/n. \quad (3)$$

Пусть $x \in X$ — предельная точка последовательности $\{x_n\}$ в слабой топологии (такие существуют в силу относительной слабой счетной компактности (E)). Так как замкнутая по (норме) линейная

оболочка $\overline{\mathcal{L}}(\{x_n\})$ слабо замкнута, то $x \in \overline{\mathcal{L}}(\{x_n\})$. Отсюда $F - \pi(x) \in F - \overline{\mathcal{L}}(\{\pi(x_n)\}) \subset \overline{\mathcal{L}}(\{F, F - \pi(x_1), \dots, F - \pi(x_n), \dots\})$, где замыкание берется по норме в X^{**} .

В силу 2) для любого $G \in \mathcal{L}(\{F, F - \pi(x_1), \dots, F - \pi(x_n), \dots\})$ имеем

$$\sup_m |G(f_m)| \geq \frac{1}{2} \|G\|.$$

Следовательно, то же верно для любого G из замыкания этого подпространства, в частности, для $F - \pi(x)$. В силу (3) для фиксированного m имеем

$$|(F - \pi(x_n))(f_m)| < 1/p \quad \text{для } n \geq k(p) \geq m.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |(F - \pi(x))(f_m)| &\leq |(F - \pi(x_n))(f_m)| + |f_m(x_n - x)| \leq \\ &\leq 1/p + |f_m(x_n - x)| \end{aligned}$$

для $n \geq k(p) \geq m$. Так как x — слабая предельная точка для $\{x_n\}$, то для любого $N > m$ существует такой номер n , что

$$|f_m(x_n - x)| < 1/N, \quad n \geq k(N) \geq m.$$

Для такого x_n имеем (так как $k(N) \geq m$, то мы можем принять выше $p = N$)

$$|(F - \pi(x_n))(f_m)| + |f_m(x_n - x)| < 2/N.$$

Следовательно, в силу произвольности N , получаем, что $(F - \pi(x))(f_m) = 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Так как

$$\frac{1}{2} \|F - \pi(x)\| \leq \sup_m |(F - \pi(x))(f_m)| = 0,$$

то $F = \pi(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема 1. Пусть E — подмножество B -пространства X . Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) E относительно слабо компактно;
- 2) E относительно слабо секвенциально компактно;
- 3) E относительно слабо счетно компактно.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Если $\{x_n\}$ — последовательность элементов E , то обозначим через Y замкнутую линейную оболочку множества $\{x_n\}$. В силу следствия 3 теоремы III.3.2 получаем, что множество $E \cap Y$ относительно компактно в слабой топологии сепарабельного пространства Y . В силу следствия леммы V.7.1 слабое замыкание множества $E \cap Y$ слабо метризуемо. Тогда по теореме 1.5.2 найдется подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow x$ ($\sigma(Y, Y^*)$), а следовательно, и $x_{n_k} \rightarrow x$ ($\sigma(X, X^*)$).

2) $\Rightarrow$ 3) очевидно.

3) $\Rightarrow$ 1). Обозначим через E_1 $\sigma(X^{**}, X^*)$ -замыкание множества $\pi(E)$, а через E_2 — $\sigma(X, X^*)$ -замыкание множества E . В силу леммы 2 E_1 содержится в $\pi(X)$ и $\sigma(X^{**}, X^*)$ -компактно. Так как π — гомеоморфизм в слабой и $(*)$ -слабой топологиях (см. 1.1), то $\pi(E_2) = E_1$ и, следовательно, E_2 слабо компактно.

Замечание. Если E относительно слабо счетно компактно, то для любого x из слабого замыкания E существует последовательность $\{x_n\} \subset E$ такая, что $x_n \rightarrow x(\sigma(X, X^*))$.

Действительно, по лемме 2 существует последовательность $\{x_n\} \subset E$, для которой $\bar{x}$ — единственная предельная точка. По теореме 1 множество E_2 слабо компактно, а последовательность с единственной предельной точкой в компактном пространстве сходится к этой точке (следствие леммы 1.2.2). Следовательно, $x_n \rightarrow x(\sigma(X, X^*))$.

Следствие. Пусть E — подмножество B -пространства X . Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) E слабо компактно;
- 2) E слабо секвенциально компактно;
- 3) E слабо счетно компактно.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) в силу теоремы 1, а 2) $\Rightarrow$ 3) очевидно.

3) $\Rightarrow$ 1). Так как сходящаяся последовательность имеет единственную предельную точку (а именно: свой предел), то в силу замечания к теореме 1 E слабо замкнуто. Теперь по теореме 1 получаем, что E слабо компактно.

§ 3. Слабая сходимост в конкретных пространствах

В этом параграфе мы выясним, что означает слабая сходимост последовательности элементов в B -пространствах $L^p(T, \Sigma, \mu)$ и $C(K)$.

3.1. Докажем сначала лемму.

Лемма 1. Пусть $1 < p \leq 2$. Существует такая положительная постоянная c , что для всех вещественных u

$$|1 + u|^p \geq 1 + pu + c\theta(u),$$

где

$$\theta(u) = \begin{cases} |u|^3, & |u| < 1, \\ |u|^p, & |u| \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Введем функцию

$$\chi(u) = |1 + u|^p - 1 - pu, \quad \psi(u) = \frac{\chi(u)}{\theta(u)}.$$

Поскольку

$$\lim_{u \rightarrow 0} \psi(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^p - 1 - pu}{u^2} = \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2},$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(1+u)^p - 1 - pu}{|u|^p} = 1,$$

то существуют $\delta > 0$, $\Delta > 0$ и $c > 0$ такие, что

$$\psi(u) \geq c \quad \text{при} \quad |u| \leq \delta \quad \text{или} \quad |u| \geq \Delta. \quad (3)$$

Далее, имеем

$$\chi'(u) = p|1+u|^{p-1} \operatorname{sign}(1+u) - p, \quad \chi''(u) = p(p-1)|1+u|^{p-2}, \\ u \neq -1.$$

Так как $\chi''(u) > 0$, а $\chi'(0) = 0$, то при $u = 0$ функция $\chi(u)$ имеет единственный минимум. Но $\chi(0) = 0$, так что при $\delta \leq |u| \leq \Delta$ будет $\chi(u) > 0$ и, следовательно, $\psi(u) > 0$ для указанных u . Уменьшая, если нужно, найденное выше c , можно считать, что

$$\psi(u) \geq c, \quad \delta \leq |u| \leq \Delta.$$

Сочетая это с (3), приходим к требуемому результату.

3.2. В некоторых пространствах слабая сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x вместе со сходимостью последовательности норм $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ обеспечивает сходимость по норме последовательности $\{x_n\}$ к x .

Теорема 1. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась по норме к x в вещественном пространстве $L^p(T, \Sigma, \mu)$ ($1 < p < \infty$), необходимо и достаточно, чтобы

1) $x_n \rightarrow x$ слабо;

2) $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

Доказательство. Необходимость обоих условий очевидна. Докажем достаточность. Напомним, что так как $(L^p)^* = L^q$ ($1/p + 1/q = 1$), то слабая сходимость $x_n \rightarrow x$ означает, что для любого $y \in L^q$

$$\int x_n(t) y(t) d\mu \rightarrow \int x(t) y(t) d\mu.$$

Положим $A_0 = \{t \in T: x(t) = 0\}$. Предполагая $1 < p \leq 2$, воспользуемся неравенством (1) леммы 1. Заменив в этом неравенстве u на $\frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)}$ при $t \notin A_0$, получаем

$$\left| \frac{x_n(t)}{x(t)} \right|^p \geq 1 + p \frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)} + c\theta \left(\frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)} \right).$$

Умножим полученное неравенство на $|x(t)|^p$ и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int_T |x_n(t)|^p d\mu &\geq \int_{A_0} |x_n(t)|^p d\mu + \int_T |x(t)|^p d\mu + \\ &+ p \int_T |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t) (x_n(t) - x(t)) d\mu + \\ &+ c \int_{T \setminus A_0} |x(t)|^{p\theta} \left(\frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)} \right) d\mu. \quad (4) \end{aligned}$$

Обозначая через $\tilde{y}$ элемент L^p :

$$\tilde{y}(t) = |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t),$$

и через $\tilde{f}$ соответствующий ему линейный функционал на L^p , перепишем неравенство (4) в виде

$$\begin{aligned} c \int_{T \setminus A_0} |x(t)|^{p\theta} \left(\frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)} \right) d\mu + \int_{A_0} |x_n(t)|^p d\mu &\leq \\ &\leq [\|x_n\|^p - \|x\|^p + p(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_n))], \end{aligned}$$

откуда, учитывая условия теоремы, видим, что выражение в правой части, а значит, и оба интеграла в левой части последнего неравенства стремятся к нулю.

Если $A'_n = \{t \in T \setminus A_0 : |x_n(t) - x(t)| \geq |x(t)|\}$, $A''_n = \{t \in T \setminus A_0 : |x_n(t) - x(t)| < |x(t)|\}$, то, имея в виду определение функции θ (см. (2)), можем записать

$$\begin{aligned} \int_{T \setminus A_0} |x(t)|^{p\theta} \left(\frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)} \right) d\mu &= \\ &= \int_{A'_n} |x_n(t) - x(t)|^p d\mu + \int_{A''_n} |x(t)|^{p-2} |x_n(t) - x(t)|^2 d\mu. \quad (5) \end{aligned}$$

Как уже было отмечено, левая часть (5) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, оба интеграла в правой части (5) стремятся к нулю.

С другой стороны, принимая во внимание, что на множестве A''_n имеет место неравенство $|x_n(t) - x(t)| < |x(t)|$, получаем, используя неравенство Гёльдера,

$$\begin{aligned} \int_{A''_n} |x_n(t) - x(t)|^p d\mu &\leq \int_{A''_n} |x(t)|^{p-1} |x_n(t) - x(t)| d\mu = \\ &= \int_{A''_n} [|x(t)|^{p/2-1} |x_n(t) - x(t)|] |x(t)|^{p/2} d\mu \leq \\ &\leq \left[\int_{A''_n} |x(t)|^{p-2} |x_n(t) - x(t)|^2 d\mu \right]^{1/2} \left[\int_{A''_n} |x(t)|^p d\mu \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

т. е. ввиду стремления к нулю первого множителя и ограниченности второго

$$\int_{A_n''} |x_n(t) - x(t)|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно,

$$\int_{T \setminus A_0} |x_n(t) - x(t)|^p d\mu = \int_{A_n'} + \int_{A_n''} |x_n(t) - x(t)|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Окончательно имеем

$$\int_T |x_n(t) - x(t)|^p d\mu = \int_{T \setminus A_0} |x_n(t) - x(t)|^p d\mu + \int_{A_0} |x_n(t)|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

и сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x доказана.

Если $p > 2$, то вместо неравенства (1) надо воспользоваться неравенством

$$|1 + u|^p \geq 1 + pu + c|u|^p, \quad (1')$$

доказательство которого может быть скопировано с доказательства неравенства (1). Подставляя в неравенство (1') при $t \notin A_0$

$u = \frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)}$, умножая на $|x(t)|^p$ и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \int_T |x_n(t)|^p d\mu &\geq \int_{A_0} |x_n(t)|^p d\mu + \int_T |x(t)|^p d\mu + \\ &+ p \int_T |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t) (x_n(t) - x(t)) d\mu + c \int_{T \setminus A_0} |x_n(t) - x(t)|^p d\mu. \end{aligned}$$

Понимая под $\tilde{x}$ и $\tilde{f}$ то же, что и выше, и обозначая $c' = 1/\min(1, c)$, найдем

$$\int_T |x_n(t) - x(t)|^p d\mu \leq c' [\|x_n\|^p - \|x\|^p + p(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_n))]_+$$

откуда следует, что $x_n \rightarrow x$ по норме в L^p .

3.3. Выясним смысл слабой сходимости в $L^p(T, \Sigma, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$).

Теорема 2. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ слабо сходилась к x в пространстве $L^p(T, \Sigma, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \sup_n \|x_n\| < \infty;$$

$$2) \int_A x_n(t) d\mu \rightarrow \int_A x(t) d\mu \text{ для любого } A \in \Sigma(\mu).$$

Доказательство. Так как множество $\{\chi_A: A \in \Sigma(\mu)\}$ фундаментально в L^p (см. IV. 3.4), то теорема 2 есть частный случай теоремы 1.2.

Как видно из доказательства, условие 2) можно проверять не для всех $A \in \Sigma(\mu)$, а для некоторой совокупности множеств, характеристические функции которых образуют фундаментальное подмножество в L^p . В частности, в случае $L^p(a, b)$ достаточно рассмотреть совокупность множеств $A = [a, s]$, где $a \leq s \leq b$, а в случае L^p взять совокупность всех одноточечных множеств A , т. е. в этом случае условие 2) превращается в покоординатную сходимость.

3.4. Рассмотрим теперь слабую сходимость в пространстве $C(K)$.

Теорема 3. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ слабо сходилась к x_0 в пространстве $C(K)$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $|x_n(t)| \leq M$ для всех $t \in K$ ($n \in \mathbb{N}$);

2) $x_n(t) \rightarrow x_0(t)$ при каждом $t \in K$.

Доказательство. Необходимость обоих условий почти очевидна. Действительно, по теореме 1.2 $\sup \|x_n\| = M < \infty$, а тогда и $|x_n(t)| \leq M$.

Необходимость второго условия обосновывается так: для фиксированного $t \in K$ рассмотрим функционал f_t в пространстве $C(K)$, определяемый формулой

$$f_t(x) = x(t).$$

Ввиду наличия слабой сходимости $x_n \rightarrow x_0$ должно быть

$$f_t(x_n) \rightarrow f_t(x_0),$$

а это и есть условие 2).

Достаточность. Воспользуемся теоремой VI.3.1 о строении пространства $C(K)^*$. В силу этой теоремы требуется доказать, что для любой функции $\varphi = gsa(K)$ имеем

$$\int_K x_n(t) d\varphi \rightarrow \int_K x_0(t) d\varphi. \quad (6)$$

Проверим выполнение соотношения (6). Справедлива оценка

$$\left| \int_K x_n(t) d\varphi - \int_K x_0(t) d\varphi \right| \leq \int_K |x_n(t) - x_0(t)| d|\varphi|, \quad (7)$$

где $|\varphi|$ — полная вариация φ , являющаяся мерой на K . Так как эта мера конечна, то функция, тождественно равная M , суммируема относительно нее. По теореме Лебега правая часть в (7) стремится к нулю, откуда получаем (6).

Из теорем III. 3.2 и 3 вытекает

Следствие. Пусть последовательность $\{x_p(t)\}$ непрерывных функций ограничена и сходится в каждой точке компакта K к непрерывной функции $x_0(t)$. Тогда существуют такие выпуклые

комбинации $y_n(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} x_k(t)$, что последовательность $\{y_n(t)\}$ сходится к $x_0(t)$ равномерно.

3.5. Как мы показали выше (см. теорему 1.5), если слабая топология совпадает с нормированной, то B -пространство конечномерно. Приведем пример бесконечномерного пространства, в котором из слабой сходимости последовательности вытекает сильная сходимость. Это показывает, что рассмотрения последовательностей недостаточно для изучения слабой топологии.

Теорема 4 (Шур). Для последовательностей слабая сходимость в пространстве l^1 совпадает со сходимостью по норме.

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow x_0$ слабо. Заменяя x_n на $x_n - x_0$, можно считать, что $x_n \rightarrow 0$ слабо. Нужно доказать тогда, что и $\|x_n\| \rightarrow 0$. Предположим противное. Пусть существует такая подпоследовательность $\{x_{n_m}\}$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_m}\| = l > 0. \quad (8)$$

При переходе к подпоследовательности слабая сходимость не разрушается; далее, заменяя, если нужно, x_{n_m} на $x_{n_m}/\|x_{n_m}\|$, мы получим последовательность, по-прежнему слабо сходящуюся к нулевому элементу, причем нормы всех элементов этой последовательности равны единице.

Итак, можно считать, что данная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$x_n \rightarrow 0 \quad \text{слабо в } l^1, \quad (9)$$

$$\|x_n\| = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Пусть $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$. Введем функционалы f_k :

$$f_k(x) = \xi_k, \quad x = \{\xi_k\}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Вследствие (9) должно быть $f_k(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т. е.

$$\xi_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Положим теперь $n_1 = 1$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n_1)}| = \|x_{n_1}\| = 1.$$

Следовательно, найдется такой номер $p_1 > 0$, что

$$\sum_{k=1}^{p_1} |\xi_k^{(n_1)}| > 3/4.$$

Пусть уже выбраны целые числа $1 = n_1 < n_2 < \dots < n_j$ и $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_j$, так что

$$\sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\xi_k^{(n_s)}| < 1/4, \quad s = 1, 2, \dots, j, \quad (12)$$

$$\sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |\xi_k^{(n_s)}| > 3/4, \quad s = 1, 2, \dots, j. \quad (13)$$

Тогда вследствие (11) найдется такой номер $n_{j+1} > n_j$, что

$$\sum_{k=1}^{p_j} |\xi_k^{(n_{j+1})}| < 1/4.$$

Используя это неравенство, а также (10), получим

$$\sum_{k=p_{j+1}}^{\infty} |\xi_k^{(n_{j+1})}| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n_{j+1})}| - \sum_{k=1}^{p_j} |\xi_k^{(n_{j+1})}| > 3/4$$

и, следовательно, можно указать такой номер $p_{j+1} > p_j$, что

$$\sum_{k=p_{j+1}}^{p_{j+1}} |\xi_k^{(n_{j+1})}| > 3/4.$$

Проведенное рассуждение показывает, что существуют две такие последовательности $1 = n_1 < n_2 < \dots$ и $0 = p_0 < p_1 < \dots$ целых чисел, что неравенства (12) и (13) справедливы при каждом $s = 1, 2, \dots$

Обозначим теперь

$$\eta_k = \text{sign } \xi_k^{(n_s)}, \quad p_{s-1} < k \leq p_s; \quad k, s = 1, 2, \dots$$

Последовательность $\{\eta_k\} \in l^\infty$, поэтому в пространстве l^1 можно рассматривать линейный функционал f_0 :

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k, \quad x = \{\xi_k\}.$$

Оценим снизу величину $f_0(x_{n_s})$. Учитывая, что $|\eta_k| \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} |f_0(x_{n_s})| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k^{(n_s)} \right| \geq \\ &\geq \left| \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} \eta_k \xi_k^{(n_s)} \right| - \sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\eta_k \xi_k^{(n_s)}| - \sum_{k=p_s+1}^{\infty} |\eta_k \xi_k^{(n_s)}| \geq \\ &\geq \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |\xi_k^{(n_s)}| - \sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\xi_k^{(n_s)}| - \sum_{k=p_s+1}^{\infty} |\xi_k^{(n_s)}| = \\ &= 2 \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |\xi_k^{(n_s)}| - \|x_{n_s}\|. \end{aligned}$$

Поэтому, вследствие (10) и (13), $f_0(x_{n_s}) > 1/2$, что противоречит (9).

3.6. Рассмотрим теперь слабую сходимость в гильбертовом пространстве H .

Так как каждый линейный функционал f в H имеет вид

$$f(x) = (x, y), \quad x \in H$$

(см. V.3.2), то слабая сходимость $x_n \rightarrow x_0$ означает, что для любого $y \in H$

$$(x_n, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x_0, y).$$

Далее, в гильбертовом пространстве доказанный выше для пространств L^p факт, что слабая сходимость вместе со сходимостью норм влечет сходимость по норме, устанавливается просто. Действительно, пусть $x_n \rightarrow x_0$ слабо и, кроме того, $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$. Но

$$\|x_n - x_0\|^2 = (x_n - x_0, x_n - x_0) = (x_n, x_n) + (x_0, x_0) - (x_n, x_0) - \overline{(x_n, x_0)}$$

и $(x_n, x_0) \rightarrow (x_0, x_0)$, $(x_n, x_n) \rightarrow (x_0, x_0)$. Поэтому $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$.

По поводу содержания этого параграфа см. в основном Банах. Слабая сходимость в L^2 рассматривалась еще Гильбертом. Теорема 3 о слабой сходимости в пространстве $C[a, b]$ имеется у Ф. Рисса [2].

§ 4. Задача перемещения массы и порождаемое ею нормированное пространство

4.1. В связи с анализом некоторых вопросов организации и планирования производства в работе Канторовича [5] был изучен важный класс конечномерных экстремальных задач, в применении к которым методы классического математического анализа оказались малоэффективными. Эти исследования привели в конечном счете к возникновению новой математической дисциплины, получившей наименование линейного программирования.

Интересующая нас задача перемещения массы непосредственно связана со следующей простейшей задачей линейного программирования, которая широко используется в настоящее время в практике планирования железнодорожных, автомобильных, воздушных и водных перевозок.

Транспортная задача. Компоненты заданного вектора

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \quad (1)$$

(точнее, их абсолютные величины) характеризуют объемы производства (при $\varphi_k \leq 0$) или потребления (при $\varphi_k > 0$) некоторого однородного продукта в имеющихся m пунктах с номерами k из $K = \{1, 2, \dots, m\}$. При этом предполагается, что суммарный объем потребления совпадает с суммарным объемом производства, т. е.

$$\sum_{k \in K} \varphi_k = 0. \quad (2)$$

План перевозок определяется выбором матрицы

$$\Psi = [\Psi_{ij}]_{i,j \in K}, \quad \Psi_{ij} \geq 0, \quad i \in K, \quad j \in K, \quad (3)$$

элементы которой указывают намечаемые объемы перевозок из каждого пункта i в каждый пункт j . При реализации таких перевозок в каждый пункт $k \in K$, очевидно, будет ввезено $\sum_{i \in K} \psi_{ik}$ и вывезено из него $\sum_{j \in K} \psi_{kj}$

единиц рассматриваемого продукта. А это означает, что матрица (3) определяет допустимый план перевозок, если выполнены следующие балансовые соотношения:

$$\sum_{i \in K} \psi_{ik} - \sum_{j \in K} \psi_{kj} = \varphi_k, \quad k \in K. \quad (4)$$

Что касается суммарных затрат, связанных с реализацией каждого плана перевозок (3), то они в рассматриваемой модели определяются по формуле

$$\tau(\psi) = \sum_{i \in K} \sum_{j \in K} r_{ij} \psi_{ij}, \quad (5)$$

где r_{ij} — заданные неотрицательные величины, характеризующие затраты по перемещению единицы продукта из пункта i в пункт j .

Таким образом, совокупность допустимых планов перевозок определяется множеством Ψ_Φ неотрицательных решений (3) системы линейных уравнений (4). А искомый наиболее экономный, так называемый оптимальный план перевозок $\psi \in \Psi_\Phi$ характеризуется тем, что для него достигают минимума суммарные затраты (5).

С помощью общих результатов теории линейного программирования (или непосредственным рассуждением) легко проверяется, что поставленная экстремальная задача всегда разрешима. При этом допустимый план перевозок (3) в том и только в том случае является оптимальным, если найдется такой вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, что

$$u_j - u_i \leq r_{ij}, \quad i \in K, \quad j \in K, \quad (6)$$

причем $\psi_{ij}(u_j - u_i - r_{ij}) = 0$, $i \in K$, $j \in K$. Последнее означает, что если в рассматриваемом допустимом плане из пункта i в пункт j намечаются ненулевые перевозки ψ_{ij} , то соответствующее неравенство (6) должно выполняться, как равенство. Важно отметить, что приведенный признак оптимальности позволяет построить эффективные алгоритмы*), с помощью которых на современных ЭВМ могут решаться транспортные задачи с несколькими тысячами пунктов производства и потребления.

В заключение этого вводного пункта сделаем некоторые замечания относительно рассмотренной транспортной задачи и докажем одно предложение, которое нам потребуется ниже при исследовании задачи перемещения массы.

Компоненты заданного вектора (1), очевидно, можно представить в виде $\varphi_k = \varphi_k^+ - \varphi_k^-$, $k \in K$, где

$$\varphi_k^+ = \max \{0, \varphi_k\}, \quad \varphi_k^- = -\min \{0, \varphi_k\}, \quad \varphi_k^+ + \varphi_k^- = |\varphi_k|.$$

Тогда величины $\varphi^+(K) = \sum_{k \in K} \varphi_k^+$, $\varphi^-(K) = \sum_{k \in K} \varphi_k^-$, в силу условия (2), совпадают и равны половине суммы абсолютных величин компонент вектора (1).

Рассмотрим теперь функцию

$$v(\psi) = \sum_{i \in K} \sum_{j \in K} \psi_{ij} \quad (7)$$

*) Впервые такого рода алгоритмы были предложены в работе Канторовича и Гавурина [1] (эта работа написана в 1940 г. и цитируется в статье Канторовича [6]).

и покажем, что для любой матрицы $\psi \in \Psi_\varphi$ имеет место неравенство

$$v(\psi) \geq \varphi^+(K), \quad (8)$$

которое превращается в равенство в том и только в том случае, если

$$\sum_{i \in K} \psi_{ik} = \varphi_k^+, \quad \sum_{j \in K} \psi_{kj} = \varphi_k^-, \quad k \in K. \quad (9)$$

Действительно, из (4) и неотрицательности элементов вытекает, что

$$\sum_{i \in K} \psi_{ik} \geq \varphi_k^+, \quad \sum_{j \in K} \psi_{kj} \geq \varphi_k^-, \quad k \in K. \quad (10)$$

Суммируя первые или вторые из этих неравенств по всем $k \in K$, получаем требуемое неравенство (8). При этом ясно, что равенство достигается в том и только том случае, когда выполнены соотношения (9).

Заметим еще, что приведенная нижняя оценка (8) для функции (7) на множества Ψ_φ достигается, т. е. множество матриц (3), удовлетворяющих условиям (9), не пусто. Этим условиям удовлетворяет, например, матрица

$$\psi^* = [\psi_{ij}^*]_{i,j \in K}, \quad \psi_{ij}^* = \frac{\varphi_i^- \cdot \varphi_j^+}{\varphi^+(K)}, \quad i \in K, \quad j \in K. \quad (11)$$

Лемма 1. Если заданные неотрицательные величины r_{ij} в рассмотренной транспортной задаче удовлетворяют условию треугольника

$$r_{ij} \leq r_{ik} + r_{kj}, \quad i \in K, \quad j \in K, \quad k \in K, \quad (12)$$

то существует оптимальный план перевозок (3), для которого условие (8) выполняется как равенство.

Доказательство. Рассмотрим непустую ограниченную замкнутую множества

$$\Psi_\varphi^v = \{\psi \in \Psi_\varphi \mid v(\psi) \leq v\}, \quad v \in [\varphi^+(K), +\infty).$$

Ввиду непрерывности функций (5) и (7) для каждого $v \geq \varphi^+(K)$ найдется такая матрица $\psi_v \in \Psi_\varphi^v$, что

$$\tau(\psi_v) = \min\{\tau(\psi) : \psi \in \Psi_\varphi^v\},$$

$$v(\psi_v) = \min\{v(\psi) : \psi \in \Psi_\varphi^v, \tau(\psi) = \tau(\psi_v)\}.$$

Требуется показать, что при выполнении условия (12) для всех указанных матриц $\psi_v \in \Psi_\varphi^v$ имеют место равенства

$$v(\psi_v) = \varphi^+(K). \quad (13)$$

Допустим, что для некоторой матрицы $\psi = \psi_v$ в (8) имеет место строгое неравенство. Тогда при некотором $k_0 \in K$ должны выполняться строгие неравенства в (10). По тогда найдутся такие $i_0 \in K$ и $j_0 \in K$, что $\varepsilon = \min\{\psi_{i_0 k_0}, \psi_{k_0 j_0}\} > 0$.

Рассмотрим матрицу $\psi' \in \Psi_\varphi$, которая получается из исходной матрицы $\psi = \psi_v$ путем следующей замены трех ее элементов:

$$\psi'_{i_0 j_0} = \psi_{i_0 j_0} + \varepsilon, \quad \psi'_{i_0 k_0} = \psi_{i_0 k_0} - \varepsilon, \quad \psi'_{k_0 j_0} = \psi_{k_0 j_0} - \varepsilon.$$

Для этой матрицы имеем

$$\tau(\psi') = \tau(\psi) + \varepsilon (r_{i_0 j_0} - r_{i_0 k_0} - r_{k_0 j_0}) \leq \tau(\psi),$$

$$v(\psi') = v(\psi) - \varepsilon,$$

а это противоречит выбору матриц $\psi_v \in \Psi_v^\nu$. Полученное противоречие показывает, что для всех $v \in [\mathbb{F}^+(K), +\infty)$ имеют место требуемые равенства (13) и лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Из приведенной леммы следует, что если исходные величины r_{ij} удовлетворяют соотношениям (12), то условие (4) можно заменить более жестким требованием (9).

4.2. Приводимый ниже бесконечномерный аналог транспортной задачи был рассмотрен впервые в работе Канторовича [6] (см. также Канторович [8], Канторович, Рубинштейн [1], [2]).

Задача перемещения массы. Конечное множество пунктов здесь заменяется произвольным метрическим компактом K с метрикой $r(t, s)$, характеризующей затраты, связанные с перемещением единицы массы из любой точки $t \in K$ в любую точку $s \in K$. Аналогом вектора (1), удовлетворяющего условию (2), является заданная на системе $\mathcal{B}$ борелевских множеств компакта K счетноаддитивная функция φ , положительная вариация которой $\varphi_+(K)$ совпадает с ее отрицательной вариацией $\varphi_-(K)$, т. е. такая, что

$$\varphi(K) = \varphi_+(K) - \varphi_-(K) = 0. \quad (14)$$

Напомним (см. I.6.3), что для $e \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \varphi_+(e) &= \sup\{\varphi(e'): e' \in \mathcal{B}, e' \subset e\}, \\ \varphi_-(e) &= \sup\{-\varphi(e'): e' \in \mathcal{B}, e' \subset e\}. \end{aligned}$$

Для каждого $e \in \mathcal{B}$ величины $\varphi_+(e)$ и $\varphi_-(e)$ интерпретируются, соответственно, как требуемое и имеющееся количества массы на e . Поэтому условие (14) имеет такой же смысл, как условие (2) в случае конечного числа пунктов.

План перемещения массы на K определяется выбором конечной меры ψ , заданной на σ -алгебре $\mathcal{B}$ борелевских множеств компакта $\tilde{K} = K \times K$. При этом мера множества $e \times e'$, где $e, e' \in \mathcal{B}$, обозначается далее через $\psi(e, e')$, показывает, какое количество массы планируется переместить с e на e' . Такой план является допустимым, если он удовлетворяет балансовым соотношениям

$$\psi(K, e) - \psi(e, K) = \varphi(e), \quad e \in \mathcal{B}, \quad (15)$$

аналогичным соотношениям (4) в транспортной задаче.

Совокупность допустимых перемещений ψ , как и выше, будет обозначаться через Ψ_φ . При этом суммарные затраты, связанные с реализацией каждого такого перемещения, здесь уже, естественно, вычисляются с помощью двойного интеграла

$$\tau(\psi) = \int_{\tilde{K}} r(t, s) d\psi(t, s). \quad (16)$$

Поэтому искомое оптимальное перемещение характеризуется функцией $\psi \in \Psi_\varphi$, для которой достигается минимума соответствующая величина (16).

Ниже будет показано, что поставленная экстремальная задача всегда разрешима. При этом признак оптимального перемещения здесь, по существу, мало чем отличается от приведенного в предыдущем пункте для случая транспортной задачи. Оказывается, что допустимое перемещение $\psi \in \Psi_\varphi$ в том и только том случае является оптимальным, если найдется такая функция $u: K \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$u(s) - u(t) \leq r(t, s), \quad t \in K, \quad s \in K, \quad (17)$$

причем $u(s) - u(t) = r(t, s)$, если (t, s) принадлежит носителю $\text{supp } \psi$ меры ψ^* , т. е. если для любых окрестностей e_t и e_s точек t и s имеют место строгие неравенства $\psi(e_t, e_s) > 0$.

*) Определение носителя борелевской меры см. в Х а л м о ш.

Остановимся на одном вопросе, имеющем почти 200-летнюю историю (см. Канторович [8]).

Еще в 1781 году выдающийся французский математик Г. Монж в связи с вопросом о наиболее рациональном перемещении земли из насыпи в выемку поставил следующую задачу: разбить два равновеликих объема на бесконечно малые частицы и сопоставить их между собой так, чтобы сумма произведений длин путей на объемы перемещаемых частиц была наименьшей.

В связи с исследованием этой задачи Г. Монжем была разработана геометрическая теория конгруэнций. Что же касается самой задачи, то им была высказана гипотеза о том, что искомые пути перемещения массы являются нормальными к некоторому однопараметрическому семейству поверхностей.

Задачей Г. Монжа занимались впоследствии также другие известные математики и механики. Однако строгое доказательство справедливости выказанной гипотезы было дано лишь через сто лет в 200-страничном мемуаре П. Аппеля 1884 года. Хотя автору удалось затем несколько упростить свое доказательство, но оно оставалось весьма пространственным и сложным и базировалось на использовании тонких теорем уже развитого к тому времени вариационного исчисления.

Вместе с тем доказательство гипотезы Г. Монжа, причем для существенно более широкого класса задач перемещения массы, может быть получено как простое следствие приведенного выше признака оптимального перемещения. Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение.

Л е м м а 2. Пусть функция $u: K \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (17), а точки t_0, s_0 и z_0 из K таковы, что

$$u(s_0) - u(t_0) = r(t_0, s_0) = r(t_0, z_0) + r(z_0, s_0). \quad (18)$$

Тогда множество

$$U_{z_0} = \{z \in K \mid u(z) = u(z_0)\} \quad (19)$$

расположено между двумя сферами, проходящими через z_0 и имеющими своими центрами точки t_0 и s_0 . Другими словами, для любой точки $z \in U_{z_0}$ имеют место неравенства

$$r(t_0, z) \geq r(t_0, z_0), \quad r(z, s_0) \geq r(z_0, s_0).$$

Доказательство. Согласно (17) имеем

$$u(z_0) - u(t_0) \leq r(t_0, z_0), \quad u(s_0) - u(z_0) \leq r(z_0, s_0).$$

Отсюда и из (18) получаем

$$u(z_0) - u(t_0) = r(t_0, z_0), \quad u(s_0) - u(z_0) = r(z_0, s_0).$$

Но тогда для любой точки $z \in U_{z_0}$ на основании условия (17) имеем

$$\begin{aligned} r(t_0, z) &\geq u(z) - u(t_0) = u(z_0) - u(t_0) = r(t_0, z_0), \\ r(z, s_0) &\geq u(s_0) - u(z) = u(s_0) - u(z_0) = r(z_0, s_0), \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Учитывая теперь приведенный признак оптимальности, можно утверждать, что теорема Монжа — Аппеля справедлива для любой задачи перемещения массы на выпуклом компакте в произвольном евклидовом или гильбертовом пространстве. При этом, если определяем мерой $\psi \in \Psi_0$ допустимое перемещение является оптимальным, то в качестве требуемого может быть принято однопараметрическое семейство поверхностей $u(z) = \text{const}$, отвечающее функции $u: K \rightarrow \mathbb{R}$ из признака оптимальности. Действительно, если из точки t_0 совершается перевозка в точку s_0 , т. е. $(t_0, s_0) \in \text{supp } \psi$, то открытый отрезок (t_0, s_0) при любом $z_0 \in (t_0, s_0)$ в силу леммы 2 совпадает с нормалью к соответствующей поверхности (19).

Другой особенностью рассмотренной Г. Монжем задачи перемещения массы является то, что в ней в качестве исходной счетно-аддитивной функции $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию (14), принимается

$$\varphi(e) = \mu(e \cap N) - \mu(e \cap M), \quad e \in \mathcal{B},$$

где μ — некоторая фиксированная мера (лебегова мера), а M и N — заданные измеримые множества, для которых $\mu(N) = \mu(M)$. Однако эта особенность, как мы видели, в приведенном доказательстве теоремы Монжа — Аппеля не использовалась.

4.3. Для доказательства приведенных утверждений относительно рассмотренной задачи перемещения массы, следуя работам Канторовича, Рубинштейна [1, 2], мы предварительно изучим порождаемое этой задачей линейное нормированное пространство, которое представляет также самостоятельный интерес. В частности, попутно будет получена важная характеристика (*)-слабой сходимости линейных функционалов в пространстве непрерывных функций на метрическом компакте.

Рассмотрим произвольный метрический компакт K с метрикой $r(t, s)$ и систему $\mathcal{B}$ его борелевских множеств. В B -пространстве $\text{гса}(K)$ всех счетно аддитивных функций $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^*$ выделим более узкое множество $\Phi_0(\mathcal{B})$, состоящее из функций, удовлетворяющих условию (14). Каждой конечной борелевской мере ψ на $K (= K \times K)$ сопоставим функцию

$$\varphi(e) = \psi(K, e) - \psi(e, K), \quad e \in \mathcal{B}, \quad (20)$$

которая, очевидно, удовлетворяет условию (14) и, следовательно, принадлежит множеству $\Phi_0(\mathcal{B})$. С другой стороны, каково бы ни было $\varphi \in \Phi_0(\mathcal{B})$, для функции **)

$$\psi^*(e, e') = \frac{\varphi_-(e) \cdot \varphi_+(e')}{\varphi_+(K)}, \quad e \in \mathcal{B}, \quad e' \in \mathcal{B}, \quad (21)$$

имеем

$$\psi^*(K, e) - \psi^*(e, K) = \varphi_+(e) - \varphi_-(e) = \varphi(e), \quad e \in \mathcal{B},$$

т. е. множество Ψ_φ мер $\psi \in \Psi(\widetilde{\mathcal{B}})$, удовлетворяющих условию (20), не пусто.

Нетрудно проверить, что для указанных множеств Ψ_φ справедливы следующие соотношения:

$$\Psi_{\varphi_1} + \Psi_{\varphi_2} = \{\psi_1 + \psi_2 \mid \psi_1 \in \Psi_{\varphi_1}, \psi_2 \in \Psi_{\varphi_2}\} \subset \Psi_{\varphi_1 + \varphi_2} \quad (22)$$

$$0 \in \Psi_0, \quad \lambda \Psi_\varphi = \{\lambda \psi \mid \psi \in \Psi_\varphi\} = \Psi_{\lambda \varphi}, \quad \lambda > 0. \quad (23)$$

Кроме того, для получения множества $\Psi_{-\varphi}$ достаточно в множестве Ψ_φ каждую функцию ψ заменить «транспонированной» мерой ψ^T , где $\psi^T(E) = \psi(E^T)$, $E^T = \{(t, s) : (s, t) \in E\}$, для любого борелевского множества $E \subset K$. В частности,

$$\psi^T(e, e') = \psi(e', e), \quad e \in \mathcal{B}, \quad e' \in \mathcal{B}.$$

Таким образом,

$$\Psi_{-\varphi} = \{\psi^T \mid \psi \in \Psi_\varphi\} = (\Psi_\varphi)^T. \quad (24)$$

*) Отметим, что любая конечная счетно-аддитивная функция множества, заданная на σ -алгебре $\mathcal{B}$ борелевских множеств метрического компакта K , регулярна (см. Халмоза).

**) Эта функция строится по тому же принципу, что и допустимая матрица (11) в транспортной задаче. Она отвечает перемещению, при котором имеющаяся на каждом борелевском множестве e масса $\varphi_-(e)$ распределяется пропорционально потребностям $\varphi_+(e')$ на всех $e' \in \mathcal{B}$.

Теперь уже легко показать, что определенная на $\Phi_0(\mathcal{A})$ неотрицательная функция

$$\|\varphi\|_{\tau} = \inf_{\psi \in \Psi_{\varphi}} \tau(\psi) = \inf_{\psi \in \Psi_{\varphi}} \int_{\tilde{K}} r(t, s) d\psi(t, s) \quad (25)$$

удовлетворяет аксиомам полунормы:

$$\|\lambda\varphi\|_{\tau} = |\lambda| \cdot \|\varphi\|_{\tau}, \quad (26)$$

$$\|\varphi_1 + \varphi_2\|_{\tau} \leq \|\varphi_1\|_{\tau} + \|\varphi_2\|_{\tau}. \quad (27)$$

Действительно, неравенство (27) является следствием включения (22) и аддитивности функции (16). А равенство (26) при $\lambda \geq 0$ следует из (23) и однородности функции (16), а при $\lambda < 0$ оно вытекает из (24), если учесть, что

$$\tau(\psi^T) = \int_{\tilde{K}} r(t, s) d\psi(s, t) = \int_{\tilde{K}} r(s, t) d\psi(s, t) = \tau(\psi).$$

Ниже будет показано (см. замечание 1 после теоремы 1), что функция (25) удовлетворяет также условию

$$\|\varphi\|_{\tau} = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \quad (28)$$

т. е. является нормой в $\Phi_0(\mathcal{A})$. Однако этот факт нам будет удобнее проверить после установления некоторых свойств полученного пространства $\Phi_0^{\tau}(\mathcal{A})$, рассматриваемого пока как топологическое пространство с топологией, порожденной полуметрикой*) $\rho_{\tau}(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\tau}$ (**). Хотя ниже будет доказано, что при этом получится топология нормированного пространства, но формально мы пока не можем считать его таковым. Поэтому мы должны договориться о терминологии в нашем случае.

Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_n\}$ сильно сходится к φ (и писать $\varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi$), если $\|\varphi_n - \varphi\|_{\tau} \rightarrow 0$. Обозначим через $(\Phi_0^{\tau}(\mathcal{A}))^*$ множество всех линейных функционалов на $\Phi_0(\mathcal{A})$, непрерывных относительно сильной сходимости. Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_n\}$ слабо сходится к φ (и писать $\varphi_n \dashrightarrow \varphi$), если $L(\varphi_n) \rightarrow L(\varphi)$ для любого $L \in (\Phi_0^{\tau}(\mathcal{A}))^*$.

4.4. В этом пункте доказываются несколько вспомогательных утверждений.

Напомним, что носитель $\text{supp } \psi$ меры ψ состоит из таких $(t, s) \in \tilde{K} \times \tilde{K}$, что $\psi(e_t, e_s) > 0$ для любых окрестностей e_t и e_s соответствующих точек. А носители $\text{supp } \varphi$ функций $\varphi \in \text{rsa}(K)$ состоят из таких точек $t \in K$, для любых окрестностей e_t которых $\max\{\varphi_+(e_t), \varphi_-(e_t)\} > 0$. Это означает, что

$$\text{supp } \varphi = (\text{supp } \varphi_+) \cup (\text{supp } \varphi_-)$$

и совпадает с наименьшим замкнутым множеством $F \subset K$, удовлетворяющим условию $\varphi(e) = \varphi(e \cap F)$, $e \in \mathcal{A}$.

Лемма 3. Для любой функции $\varphi \in \Phi_0^{\tau}(\mathcal{A})$ справедливы следующие оценки:

$$\|\varphi\|_{\tau} \leq \varphi_+(K) \cdot \max\{r(t, s) : t \in \text{supp } \varphi_-, s \in \text{supp } \varphi_+\},$$

$$\|\varphi\|_{\tau} \leq \varphi_+(K) \text{diam}(\text{supp } \varphi),$$

где $\text{diam}(\text{supp } \varphi)$ означает диаметр множества $\text{supp } \varphi$ в K .

*) Полуметрика удовлетворяет всем аксиомам метрики, кроме $\rho(x, y) = 0$ влечет $x = y$. Топология, порожденная полуметрикой, определяется так же, как топология, порожденная метрикой.

**) Эту метрику часто называют метрикой Канторовича — Рубинштейна. (Прим. ред.).

Доказательство. Достаточно заметить, что для меры $\psi^* \in \Psi_\Phi$, которая определяется согласно (21), имеем

$$\begin{aligned}\psi^*(K, K) &= \varphi_-(K) = \varphi_+(K), \\ \text{supp } \psi^* &= (\text{supp } \varphi_-) \times (\text{supp } \varphi_+).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_r &= \inf_{\psi \in \Psi_\Phi} \tau(\psi) \leq \tau(\psi^*) = \int_K \int_K r(t, s) d\psi^*(t, s) \leq \\ &\leq \varphi_+(K) \cdot \max \{r(t, s): t \in \text{supp } \varphi_-, s \in \text{supp } \varphi_+\} \leq \varphi_+(K) \text{diam}(\text{supp } \varphi),\end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Используя приведенные оценки, мы установим теперь важные свойства множеств

$$S_0^v = \{\varphi \in \Phi_0(\mathcal{B}): \varphi_+(K) + \varphi_-(K) \leq v\}, \quad (29)$$

объединение которых по всем $v \geq 0$, очевидно, совпадает с $\Phi_0(\mathcal{B})$. Для этого в $\text{rca}(K)$ выделим множество $\tilde{\Phi}(\mathcal{B})$ всех функций с конечными носителями, т. е. линейную оболочку простейших функций

$$\varphi_t(e) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in e, \\ 0 & \text{при } t \notin e, \end{cases}$$

носителями которых являются одноточечные множества.

Рассмотрим затем множества

$$\tilde{\Phi}_0(\mathcal{B}) = \Phi_0(\mathcal{B}) \cap \tilde{\Phi}(\mathcal{B}), \quad \tilde{S}_0^v = S_0^v \cap \tilde{\Phi}(\mathcal{B}).$$

Простейшими в $\tilde{\Phi}_0(\mathcal{B})$ являются уже функции

$$\varphi_{ts} = \varphi_s - \varphi_t, \quad (30)$$

для которых при $t \neq s$ имеем $\text{supp } \varphi_{ts} = \{t, s\}$, $(\varphi_{ts})_+ = \varphi_s$, $(\varphi_{ts})_- = \varphi_t$ и, следовательно, в силу леммы 3

$$\|\varphi_{ts}\|_r \leq (\varphi_{ts})_+(K) \text{diam}(\text{supp } \varphi_{ts}) = r(t, s). \quad (31)$$

При этом линейная оболочка указанных простейших функций (30), очевидно, совпадает со всем $\tilde{\Phi}_0(\mathcal{B})$.

Лемма 4. *Каковы бы ни были $v > 0$ и $\varepsilon > 0$, в $\tilde{S}_0^v$ существует конечная ε -сеть относительно полунормы (25) *) в S_0^v .*

Доказательство. Представим исходный компакт в виде $K = \bigcup_{i=1}^m e_i$, где непустые борелевские множества e_i таковы, что $e_i \cap e_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\max(\text{diam } e_i) < \varepsilon/(2v)$. В каждом e_i зафиксируем некоторую точку t_i . Кроме того, зафиксируем произвольно еще одну точку $t_0 \in K$ и натуральное число

$$q > \frac{2m}{\varepsilon} \text{diam } K.$$

Рассмотрим теперь множество P целочисленных векторов

$$p = (p_1, \dots, p_m), \quad (32)$$

*) ε -сеть относительно полуметрики определяется точно так же, как относительно метрики.

удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^m |p_i| + \left| \sum_{i=1}^m p_i \right| \leq qv$, и покажем, что отвечающие им функции

$$\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{q} \varphi_{t_0 t_i}, \quad p \in P, \quad (33)$$

которые, очевидно, принадлежат $\tilde{S}_0^v$, образуют требуемую ε -сеть.

Вначале каждой функции $\varphi \in S_0^v$ сопоставим в $\tilde{S}_0^v$ функцию

$$\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^m \varphi(e_i) \varphi_{t_i} = \sum_{i=1}^m \varphi(e_i) \varphi_{t_0 t_i} \quad (34)$$

и проверим, что

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\tau} \leq \varepsilon/2. \quad (35)$$

Для этого рассмотрим в $\Phi_0(\mathcal{B})$ функции

$$\varphi_i(e) = \varphi(e \cap e_i) - \varphi(e_i) \varphi_{t_i}(e), \quad e \in \mathcal{B}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Их носители содержатся в замыканиях, соответствующих e_i , следовательно,

$$\text{diam}(\text{supp } \varphi_i) \leq \text{diam } e_i < \frac{\varepsilon}{2v}.$$

Кроме того, $(\varphi_i)_+(K) = (\varphi_i)_+(e_i) \leq \varphi_+(e_i) + \varphi_-(e_i)$, и потому в силу леммы имеем

$$\|\varphi_i\|_{\tau} \leq \frac{\varepsilon}{2v} [\varphi_+(e_i) + \varphi_-(e_i)].$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\tau} &= \left\| \sum_{i=1}^m \varphi_i \right\|_{\tau} \leq \sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|_{\tau} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2v} \sum_{i=1}^m [\varphi_+(e_i) + \varphi_-(e_i)] = \frac{\varepsilon}{2v} [\varphi_+(K) + \varphi_-(K)] \leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

т. е. имеет место указанная оценка (35).

Остается указать теперь для функции (34) такой вектор $p \in P$, что отвечающая ему функция (33) удовлетворяет условию

$$\|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}\|_{\tau} < \varepsilon/2. \quad (36)$$

Положим $p_i = s_i c_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), где $s_i = \text{sign } \varphi(e_i)$, а c_i — целые части неотрицательных величин $q|\varphi(e_i)|$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |p_i| + \left| \sum_{i=1}^m p_i \right| &= \sum_{i=1}^m c_i + \left| \sum_{i=1}^m [q\varphi(e_i) - p_i] \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m c_i + \sum_{i=1}^m |q\varphi(e_i) - p_i| = \sum_{i=1}^m c_i + \sum_{i=1}^m [q|\varphi(e_i)| - c_i] = \\ &= q \sum_{i=1}^m |\varphi(e_i)| \leq q \sum_{i=1}^m [\varphi_+(e_i) + \varphi_-(e_i)] \leq qv, \end{aligned}$$

т. е. соответствующий вектор (32) принадлежит множеству P . Покажем, что отвечающая этому вектору функция (33) удовлетворяет требуемому условию (36). Действительно,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_\tau\|_\tau &= \left\| \sum_{i=1}^m \left[\varphi(e_i) - \frac{p_i}{q} \right] \varphi_{t_0 t_i} \right\|_\tau \leq \sum_{i=1}^m \left\| \varphi(e_i) - \frac{p_i}{q} \right\| \|\varphi_{t_0 t_i}\|_\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{q} \operatorname{diam} K \sum_{i=1}^m [q |\varphi(e_i)| - c_i] \leq \frac{m}{q} \operatorname{diam} K < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы.

Следствие 1. Линейное множество $\tilde{\Phi}_0(\mathcal{B})$ всюду плотно в пространстве $\Phi_0^\tau(\mathcal{B})$.

Следствие 2. Для совпадения двух линейных непрерывных функционалов в пространстве $\Phi_0^\tau(\mathcal{B})$ достаточно, чтобы они принимали равные значения на всех функциях (30).

Лемма 5. Для функций из S_0^V сильная и слабая сходимость в $\Phi_0^\tau(\mathcal{B})$ совпадают. Точнее, если $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset S_0^V$, то $\varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi_0$ тогда и только тогда, когда $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$.

Доказательство. Из сильной сходимости слабая сходимость вытекает, очевидно, без каких-либо дополнительных предположений. Предположим теперь, что $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$, причем $\varphi_n \in S_0^V$. Если бы при этом функции φ_n не сходились сильно к φ_0 , то для некоторого $\varepsilon > 0$ нашлась бы такая подпоследовательность φ_{n_k} , что

$$\|\varphi_{n_k} - \varphi_0\|_\tau \geq 2\varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots$$

Учитывая лемму 4, эту подпоследовательность можно считать, не уменьшая общности, сходящейся в себе. Следовательно, найдется такое k_0 , что

$$\|\varphi_{n_k} - \varphi_{n_{k_0}}\|_\tau \leq \varepsilon$$

для всех $k \geq k_0$ *). В силу теоремы Хана — Банаха существует функционал $L \in (\Phi_0^\tau(\mathcal{B}))^*$, для которого

$$\|L\| = 1, \quad L(\varphi_{n_{k_0}} - \varphi_0) = \|\varphi_{n_{k_0}} - \varphi_0\|_\tau.$$

Тогда при всех $k \geq k_0$ имеем

$$L(\varphi_{n_k} - \varphi_0) = L(\varphi_{n_{k_0}} - \varphi_0) + L(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_{k_0}}) \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,$$

что противоречит слабой сходимости φ_n к φ_0 . Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 6. Для любых $\varphi \in \Phi_0(\mathcal{B})$ и $\psi \in \Psi_\varphi$ имеет место неравенство

$$\psi(K, K) \geq \varphi_+(K) = \varphi_-(K),$$

которое выполняется как равенство в том и только том случае, если

$$\psi(K, e) = \varphi_+(e), \quad \psi(e, K) = \varphi_-(e), \quad e \in \mathcal{B}.$$

*) Это может быть доказано совершенно так же, как в случае метрического пространства.

Доказательство. Для транспортной задачи апалогичный факт доказан в 4.1. Повторяя эти рассуждения с заменой отдельных пунктов множествами $\varepsilon \in \mathcal{B}$ и конечных сумм интегралами, получаем требуемый результат.

4.5. Установим теперь общую форму линейного функционала в $\Phi_0^r(\mathcal{B})$. С этой целью рассмотрим пространство $\text{Lip}^1(K)$, состоящее из функций $u: K \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию Липшица, т. е. таких, что

$$\|u\|_{\text{Lip}} = \sup_{t \neq s} \frac{u(s) - u(t)}{r(t, s)} < \infty.$$

Это пространство, очевидно, является полунормированным, причем

$$\|u\|_{\text{Lip}} = 0 \Leftrightarrow u(t) = \text{const}, \quad x \in K. \quad (37)$$

Для получения нормированного пространства его следует факторизовать по подпространству постоянных функций или же ограничиться рассмотрением некоторого линейного подмножества, например,

$$\text{Lip}^1(K, t_0) = \{u \in \text{Lip}^1(K) \mid u(t_0) = 0\}.$$

Следующая теорема показывает, что нормированное пространство $\text{Lip}^1(K, t_0)$ линейно изометрично пространству $(\Phi_0^r(\mathcal{B}))^*$ линейных непрерывных функционалов в $\Phi_0^r(\mathcal{B})$.

Теорема 1. *Отвечающий каждой функции $u \in \text{Lip}^1(K)$ аддитивный и однородный функционал*

$$L_u(\varphi) = \int_K u(t) d\varphi(t), \quad \varphi \in \Phi_0^r(\mathcal{B}), \quad (38)$$

является непрерывным, причем

$$\|L_u\| = \|u\|_{\text{Lip}}^*. \quad (39)$$

Обратно, каков бы ни был линейный непрерывный функционал L в $\Phi_0^r(\mathcal{B})$, найдется такая функция $u \in \text{Lip}^1(K)$, что $L = L_u$. При этом указанная функция определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство. При любых $u \in \text{Lip}^1(K)$, $\varphi \in \Phi_0^r(\mathcal{B})$, $\psi \in \Psi_\Phi$ имеем

$$\begin{aligned} L_u(\varphi) &= \int_K u(t) d\varphi = \int_K u(t) d\psi(K, t) - \int_K u(t) d\psi(t, K) = \\ &= \int_K u(s) d\psi(t, s) - \int_K u(t) d\psi(t, s) = \int_K (u(s) - u(t)) d\psi(t, s) \leq \\ &\leq \|u\|_{\text{Lip}} \int_K r(t, s) d\psi(t, s) = \|u\|_{\text{Lip}} \tau(\psi). \end{aligned}$$

Поэтому

$$L_u(\varphi) \leq \|u\|_{\text{Lip}} \inf_{\psi \in \Psi_\Phi} \tau(\psi) = \|u\|_{\text{Lip}} \|\varphi\|_\tau. \quad (40)$$

Следовательно, функционал (38) является линейным и при этом

$$\|L_u\| \leq \|u\|_{\text{Lip}}. \quad (41)$$

*) $\|L_u\| = \sup \{|L_u(\varphi)| : \|\varphi\|_\tau \leq 1\}$.

Для получения противоположного неравенства достаточно рассмотреть простейшие функции (30), для которых

$$L_u(\varphi_{ts}) = \int_K u(z) d\varphi_{ts}(z) = u(s) - u(t).$$

При этом, учитывая (31), получаем

$$\|u\|_{\text{Lip}} = \sup_{t \neq s} \frac{u(s) - u(t)}{r(t, s)} \leq \sup_{t \neq s} \frac{L_u(\varphi_{ts})}{\|\varphi_{ts}\|_T} \leq \|L_u\|. \quad (42)$$

Из (41) и (42) следует требуемое равенство (39).

Для доказательства второй части теоремы зафиксируем некоторую точку $t_0 \in K$ и каждому функционалу $L \in (\Phi_0^T(\mathcal{B}))^*$ сопоставим функцию

$$u(t) = L(\varphi_{t_0 t}), \quad t \in K.$$

При этом для любых t и s из K имеем

$$L(\varphi_{ts}) = L(\varphi_{t_0 s} - \varphi_{t_0 t}) = u(s) - u(t),$$

$$u(s) - u(t) = L(\varphi_{ts}) \leq \|L\| \|\varphi_{ts}\|_T \leq \|L\| r(t, s).$$

Следовательно, $u \in \text{Lip}^1(K)$ и при этом

$$L(\varphi_{ts}) = L_u(\varphi_{ts}) = u(s) - u(t), \quad t \in K, \quad s \in K.$$

Но тогда функционалы L и L_u совпадают в силу следствия 2 из леммы 3.

Последнее утверждение об имеющемся произволе в выборе функции u следует из (37) и (39).

З а м е ч а н и е 1. Используя неравенство (40), мы можем показать теперь, что полунорма (25) является нормой.

Для этого рассмотрим произвольную ненулевую функцию $\varphi \in \Phi_0(\mathcal{B})$ и отвечающее ей разложение компакта K на такие непересекающиеся борелевские множества K_φ^+ и K_φ^- , что

$$\varphi_+(e) = \varphi(e \cap K_\varphi^+), \quad \varphi_-(e) = -\varphi(e \cap K_\varphi^-), \quad e \in \mathcal{B}^*.$$

Поскольку функция φ ненулевая, $\varphi_+(K) = \varphi_+(K_\varphi^+) > 0$. Ввиду регулярности φ_+ тогда найдется такое замкнутое множество $F \subset K_\varphi^+$, что $\varphi_+(F) > 0$. Возьмем $0 < \varepsilon < 1/2 \varphi_+(F)$ и, используя равенство $\varphi_-(F) = 0$ и регулярность функций φ_+ и φ_- , найдем такое $\delta \doteq \delta(\varepsilon) > 0$, что для δ -окрестности множества F

$$F_\delta = \left\{ t \in K: r(t, F) = \min_{s \in F} r(t, s) < \delta \right\}$$

имеют место неравенства

$$\varphi_-(F_\delta) < \varepsilon, \quad \varphi_+(F_\delta \setminus F) < \varepsilon.$$

Легко видеть, что функция

$$u(t) = \begin{cases} \delta - r(t, F) & \text{при } t \in F_\delta, \\ 0 & \text{при } t \notin F_\delta \end{cases}$$

*) См. теорему I.6.2.

удовлетворяет условию Липшица и $\|u\|_{Lip} \leq 1$. Тогда на основании (40) имеем:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\tau} &\geq \|u\|_{Lip} \|\varphi\|_{\tau} \geq L_u(\varphi) = \\ &= \int_K u(t) d\varphi = \int_{F_\delta} u(t) d\varphi = \int_{F_\delta} u(t) d\varphi_+ - \int_{F_\delta} u(t) d\varphi_- . \end{aligned}$$

Далее, поскольку $r(t, F) = 0$ при $t \in F$ и $r(t, E) < \delta$ при $t \in F_\delta \setminus F$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{F_\delta} u(t) d\varphi &= \delta\varphi_+(F_\delta) - \int_{F_\delta} r(t, F) d\varphi_+ \geq \\ &\geq \delta\varphi_+(F_\delta) - \delta\varphi_+(F_\delta \setminus F) > \delta[\varphi_+(F_\delta) - \varepsilon], \\ \int_{F_\delta} u(t) d\varphi_- &\leq \delta\varphi_-(F_\delta) < \delta\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\varphi\|_{\tau} \geq \delta[\varphi_+(F_\delta) - 2\varepsilon] > 0,$$

что и требовалось показать.

Замечание 2. Каково бы ни было $M \subset K$, каждая функция $\tilde{u} \in Lip^1(M)$ является сужением на M некоторой функции $u \in Lip^1(K)$ с той же нормой.

Действительно, на замыкание $\bar{M}$ множества M функция $\tilde{u}$ распространяется по непрерывности. Затем определяемый полученной функцией линейный функционал на

$$E = \{\varphi \in \Phi_0^{\tau}(\mathcal{A}) : \text{supp } \varphi \subseteq \bar{M}\}$$

распространяется с сохранением нормы на все пространство $\Phi_0^{\tau}(\mathcal{A})$. В результате получаем некоторую функцию из $Lip^1(K)$, которая может отличаться от требуемой лишь постоянным слагаемым.

Замечание 3. Наряду с метрическим компактом K с метрикой $r(t, s)$ рассмотрим метрический компакт $K' = K$ с метрикой $r'(t, s) = [r(t, s)]^{\alpha}$, где $\alpha \in (0, 1]$. Соответствующее нормированное пространство $Lip^1(K', t_0)$, очевидно, совпадает с пространством $Lip^{\alpha}(K', t_0)$, в котором

$$\|u\|_{Lip^{\alpha}} = \sup_{t \neq s} \frac{u(s) - u(t)}{[r(t, s)]^{\alpha}}.$$

Следовательно, последнее линейно изометрично пространству $(\Phi_0^{\tau}(\mathcal{A}_{K'}))^*$ линейных функционалов в $\Phi_0^{\tau}(\mathcal{A}_{K'})$.

Докажем теперь приведенный в 4.2 признак оптимального перемещения.

Теорема 2. Для меры $\psi \in \Psi_{\varphi}$ в том и только том случае достигается равенство

$$\tau(\psi) = \|\varphi\|_{\tau}, \quad (43)$$

если найдется такая функция $u: K \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$u(s) - u(t) \leq r(t, s), \quad t \in K, \quad s \in K, \quad (44)$$

$$u(s) - u(t) = r(t, s) \quad \text{при} \quad (t, s) \in \text{supp } \psi. \quad (45)$$

Доказательство. Для любой меры $\psi \in \Psi_\Phi$ и любой функции $u \in \text{Lip}^1(K)$ с нормой $\|u\|_{\text{Lip}} \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \tau(\psi) &= \int_{\tilde{K}} r(t, s) d\psi(t, s) \geq \int_{\tilde{K}} (u(s) - u(t)) d\psi(t, s) = \\ &= \int_K u(s) d\psi(K, s) - \int_K u(t) d\psi(t, K) = \int_K u(t) d\varphi = L_u(\varphi), \quad (46) \end{aligned}$$

$$L_u(\varphi) \leq \|\varphi\|_\tau \leq \tau(\psi). \quad (47)$$

Допустим теперь, что для меры $\psi \in \Psi_\Phi$ нашлась функция $u: K \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (44) и (45). Тогда для этой функции u неравенство в (46) выполняется как равенство. Отсюда и из (47) следует, что имеет место (43).

Обратно, пусть для меры $\psi \in \Psi_\Phi$ выполняется условие (43). Из теоремы 1 и теоремы Хана — Бахаха следует существование функции $u \in \text{Lip}^1(K)$ с нормой $\|u\|_{\text{Lip}} = 1$, для которой $L_u(\varphi) = \|\varphi\|_\tau$. Другими словами, функция u удовлетворяет (44) и для нее левое неравенство в (47) выполняется как равенство. Тогда оба неравенства в (47) выполняются как равенства; следовательно, неравенство в (46) тоже выполняется как равенство. Но это значит, что функция u удовлетворяет условию (45). Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, в частности, что τ -нормы простейших функций $\varphi_{t,s} \in \Phi_0^r(\mathcal{B})$ совпадают с расстояниями $r(t, s)$ между соответствующими точками. Действительно, при любых t_0 и s_0 из K для функции

$$\psi_{t_0 s_0}(e, e') = \varphi_{t_0}(e) \varphi_{s_0}(e'), \quad e \in \mathcal{B}, \quad e' \in \mathcal{B},$$

лежащей в $\Psi_{\varphi_{t_0 s_0}}$, имеем

$$\text{supp } \psi_{t_0 s_0} = \{(t_0, s_0)\}, \quad \tau(\psi_{t_0 s_0}) = \int_K \int_K r(t, s) d\psi_{t_0 s_0}(t, s) = r(t_0, s_0),$$

и условиям доказанной теоремы удовлетворяет функция

$$u(t) = r(t_0, t), \quad t \in K.$$

Однако более важными являются приводимые ниже следствия, которые проверяются с учетом замечания 2 и леммы 1 из 4.1.

Следствие 1. Пусть $\tilde{K} \subset K$ — некоторое замкнутое множество и для функции $\tilde{\varphi} \in \Phi_0^r(\mathcal{B}_{\tilde{K}})$ нашлась такая мера $\tilde{\psi} \in \Psi_{\tilde{\varphi}}$, что

$$\tau(\tilde{\psi}) = \int_{\tilde{K}} \int_{\tilde{K}} r(t, s) d\tilde{\psi}(t, s) = \|\tilde{\varphi}\|_\tau.$$

Тогда для функции $\varphi(e) = \tilde{\varphi}(e \cap \tilde{K})$, $e \in \mathcal{B}_K$, из $\Phi_0^r(\mathcal{B}_K)$ и меры

$$\psi(e, e') = \tilde{\psi}(e \cap \tilde{K}, e' \cap \tilde{K}), \quad e \in \mathcal{B}_K, \quad e' \in \mathcal{B}_K,$$

из Ψ_φ имеет место аналогичное равенство

$$\tau(\psi) = \int_K \int_K r(t, s) d\psi(t, s) = \|\varphi\|_\tau,$$

причем $\|\varphi\|_\tau = \|\tilde{\varphi}\|_\tau$.

Следствие 2. Если функция $\varphi \in \Phi_0^r(\mathcal{B})$ имеет конечный носитель, то в множестве Ψ_φ всегда существует такая мера ψ , что $\tau(\psi) = \|\varphi\|_\tau$, причем

$$\psi(K, K) = \varphi_+(K) = \varphi_-(K),$$

т. е. $\psi(K, e) = \varphi_+(e)$, $\psi(e, K) = \varphi_-(e)$, $e \in \mathcal{B}$.

Последнее утверждение в действительности справедливо также для функций $\varphi \in \Phi_0^r(\mathcal{B})$ с бесконечными носителями. Однако для доказательства этого факта нам потребуется предварительно установить связь τ -нормы со $(*)$ -слабой сходимостью линейных функционалов в пространстве $C(K)$.

4.6. Мы уже знаем (см. теорему VI.3.1), что пространство $(C(K))^*$ линейных непрерывных функционалов в $C(K)$ линейно изометрично B -пространству $\text{гса}(K)$. Если последовательность φ_n в $\text{гса}(K)$ $(*)$ -слабо сходится к φ_0 , то мы будем записывать это так: $\varphi_n \xrightarrow{(*)} \varphi_0$. Заметим, что из $(*)$ -слабой сходимости φ_n к φ_0 , очевидно, следует сходимость $\varphi_n(K) \rightarrow \varphi_0(K)$. Далее норма φ в $\text{гса}(K)$ обозначается $\|\varphi\|$, т. е. $\|\varphi\| = \varphi_+(K) + \varphi_-(K)$. Из теоремы 1.1 вытекает, что если $\varphi_n \xrightarrow{(*)} \varphi_0$, то

$$\|\varphi_0\| \leq \liminf \|\varphi_n\| \leq \overline{\lim} \|\varphi_n\| < \infty. \quad (48)$$

Далее, каждое $(*)$ -слабо замкнутое множество $M \subset \text{гса}(K)$ является $(*)$ -слабо секвенциально полным (см. 1.2), т. е. если функции $\varphi_n \in M$ таковы, что для любого $x \in C(K)$ сходятся интегралы $\int_K x d\varphi_n$, то эти функции $(*)$ -слабо сходятся к некоторой функции $\varphi_0 \in M$. В частности, это относится к множеству $\text{гса}_+(K)$ всех мер $\varphi \in \text{гса}(K)$, к подпространству $\Phi_0(\mathcal{B}) \subset \text{гса}(K)$, а также и замкнутым шарам

$$S^v = \{\varphi \in \text{гса}(K) : \|\varphi\| \leq v\}$$

произвольного радиуса $v \in [0, +\infty)$ и к замкнутым шарам

$$S_0^v = \{\varphi \in \Phi_0(\mathcal{B}) : \|\varphi\| \leq v\}$$

в $\Phi_0(\mathcal{B})$, с которыми мы уже встречались в 4.4. При этом, так как пространство $C(K)$ сепарабельное (см. теорему IV.4.3), то указанные шары S^v и S_0^v еще и $(*)$ -слабо секвенциально компактны (см. теорему I.7.6).

Пространство $\text{гса}(K)$ широко используется в теории вероятностей, геометрии и других математических дисциплинах. При этом $(*)$ -слабая сходимость в этом пространстве часто играет значительно большую роль, чем сильная сходимость. Это объясняется, во-первых, указанной $(*)$ -слабой компактностью шаров S^v , а также тем, что при исследовании многих вопросов норма в $\text{гса}(K)$ оказывается слишком грубой. Эта норма не связана непосредственно с исходной метрикой $r(t, s)$ и порождаемой ею топологией в K . Ввиду этого определяемая этой нормой мера близости для функций из $\text{гса}(K)$ не всегда согласуется с естественными представлениями о таковой. Например, при $t \neq t_0$ v -норма разности $\varphi_t - \varphi_{t_0}$ равна двум, вне зависимости от расстояния $r(t, t_0)$ между соответствующими точками. Вместе с тем в приложениях не всегда удобно работать со $(*)$ -слабой топологией в $\text{гса}(K)$, так как она не метризуема. В таких случаях может оказаться полезной τ -норма.

Для функций $\varphi \in \Phi_0(\mathcal{B})$ помимо сильной сходимости $\xrightarrow{v}$ и $(*)$ -слабой сходимости $\xrightarrow{(*)}$ в пространстве $\text{гса}(K)$ имеются еще сильная сходимость

$\xrightarrow{\tau}$ и слабая сходимость $\dashrightarrow$ в пространстве $\Phi_0^{\tau}(\mathcal{B})$. Последняя слабее, чем $(*)$ -слабая сходимость, так как не всякая непрерывная функция удовлетворяет условию Липшица. Поэтому для функций из $\Phi_0(\mathcal{B})$ с учетом (48) имеем

$$\varphi_n \xrightarrow{(*)} \varphi_0 \Rightarrow \sup \|\varphi_n\| < +\infty, \quad \varphi_n \dashrightarrow \varphi_0. \quad (49)$$

Кроме того, в силу леммы 5 из 4.4, имеем

$$\{\varphi_n\} \subset S_0^{\vee}, \quad \varphi_n \dashrightarrow \varphi_0 \Leftrightarrow \{\varphi_n\} \subset S_0^{\vee}, \quad \varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi_0. \quad (50)$$

Лемма 7. Если последовательность функций $\varphi_n \in S_0^{\vee}$ сходится в себе по τ -норме, то эта последовательность $(*)$ -слабо сходится к некоторой функции $\varphi_0 \in S_0^{\vee}$.

Доказательство. Так как множество $S_0^{\vee}$ является $(*)$ -слабо секвенциально компактным, то для доказательства леммы достаточно проверить, что рассматриваемая последовательность $\{\varphi_n\} \subset S_0^{\vee}$ не может иметь более одной $(*)$ -слабой предельной точки. Из (49) и (50) следует, что каждая $(*)$ -слабая предельная точка последовательности $\{\varphi_n\}$ является для нее также τ -предельной. А так как эта последовательность сходится в себе по τ -норме, то она не может иметь более одной τ -предельной точки, и лемма доказана.

Теорема 3. Каково бы ни было $v \in [0, +\infty)$, множество $S_0^{\vee}$ является τ -компактным. При этом для функций из $S_0^{\vee}$ фигурирующие в (49) и (50) три вида сходимости совпадают, т. е.

$$\varphi_n \xrightarrow{(*)} \varphi_0 \Leftrightarrow \varphi_n \dashrightarrow \varphi_0 \Leftrightarrow \varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi_0.$$

Доказательство. Утверждения теоремы непосредственно следуют из леммы 7 и соотношений (49) и (50).

Следствие. Последовательность функций $\varphi_n \in \text{гса}(K)$ в том и только в том случае $(*)$ -слабо сходится к функции φ_0 , если $\sup \|\varphi_n\| < \infty$, $\varphi_n(K) \rightarrow \varphi_0(K)$ и для некоторой (а тогда и для любой) точки $t_0 \in K$ функции $\varphi'_n = \varphi_n - \varphi_n(K) \varphi_{t_0}$ τ -сходятся к функции из $\Phi_0(\mathcal{B})$ $\varphi'_0 = \varphi_0 - \varphi_0(K) \varphi_{t_0}$.

Замечание. В силу леммы 3, доказанной в 4.4, для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathcal{B})$ имеем

$$\|\varphi\|_{\tau} \leq \frac{1}{2} \text{diam } K \|\varphi\|.$$

В то же время нормы $\|\varphi\|$ и $\|\varphi\|_{\tau}$ очевидно, эквивалентны лишь для конечных компактов K . Отсюда следует, что если компакт K содержит бесконечное число точек, то нормированное пространство $\Phi_0^{\tau}(\mathcal{B}_K)$ не полно. Однако ввиду τ -полноты множеств $S_0^{\vee}$ во многих приложениях можно обойтись без пополнения этого пространства.

В приводимом ниже доказательстве разрешимости задачи перемещения массы при любой исходной функции $\varphi \in \Phi_0(\mathcal{B})$ существенно используются указанные свойства $(*)$ -слабой сходимости. Легко видеть, что $(*)$ -слабая сходимость $\varphi_n \xrightarrow{(*)} \varphi_0$ в $\text{гса}(K)$, $K = K \times K$, влечет за собой $(*)$ -слабую сходимость $\varphi_n(K, \cdot) \xrightarrow{(*)} \varphi_0(K, \cdot)$ и $\varphi_n(\cdot, K) \xrightarrow{(*)} \varphi_0(\cdot, K)$ в $\text{гса}(K)$. Далее через $\|\psi\|$ обозначается норма меры ψ в $\text{гса}(K)$.

Теорема 4. *Какова бы ни была функция $\varphi \in \Phi_0(\mathcal{B})$, в множестве Ψ_φ найдется такая мера ψ , что $\tau(\psi) = \|\varphi\|_\tau$, причем*

$$\psi(K, K) = \varphi_+(K) = \varphi_-(K) = \frac{1}{2} \|\varphi\|, \quad (51)$$

т. е.

$$\psi(K, e) = \varphi_+(e), \quad \psi(e, K) = \varphi_-(e), \quad e \in \mathcal{B}. \quad (52)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in \Phi_0(\mathcal{B})$. Для нее, в силу леммы 4 можно построить такую последовательность функций $\varphi_n \in \Phi_0(\mathcal{B})$ с копечными носителями, что

$$\|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|, \quad \varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi. \quad (53)$$

Эта последовательность по теореме 3 будет также $(*)$ -слабо сходиться к функции φ .

Так как функции φ_n имеют копечные носители, то на основании следствия 2 из теоремы 2 для каждой из них найдется такая мера $\psi_n \in \Psi_{\varphi_n}$, что $\tau(\psi_n) = \|\varphi_n\|_\tau$, причем

$$\|\psi_n\| = \psi_n(K, K) = (\varphi_n)_+(K) = (\varphi_n)_-(K) = \frac{1}{2} \|\varphi_n\|, \quad (54)$$

т. е.

$$\psi_n(K, e) = (\varphi_n)_+(e), \quad \psi_n(e, K) = (\varphi_n)_-(e), \quad e \in \mathcal{B}.$$

Поскольку K — метрический компакт, пространство $C(K)$ сепарабельно (см. теорему IV.4.3). Следовательно, ограниченные множества в $\text{rca}(K) = C(K)^*$ относительно компакты и метризуемы в $(*)$ -слабой топологии (см. теорему V.7.6). Тогда ввиду (54) из последовательности $\{\psi_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\psi_{n_k}\}$, $(*)$ -слабо сходящуюся к некоторой мере ψ , причем

$$\|\psi\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\psi_{n_k}\| \leq \frac{1}{2} \|\varphi\|. \quad (55)$$

Покажем, что мера ψ удовлетворяет утверждению теоремы.

Прежде всего, из $(*)$ -слабой сходимости мер ψ_{n_k} к ψ , как отмечалось, следует, что меры $\psi_{n_k}(K, \cdot)$ и $\psi_{n_k}(\cdot, K)$ $(*)$ -слабо сходятся в $\text{rca}(K)$ соответственно к $\psi(K, \cdot)$ и $\psi(\cdot, K)$. Кроме того, $\varphi_{n_k} \xrightarrow{(*)} \varphi$. Но тогда, переходя к $(*)$ -слабому пределу в соотношениях

$$\psi_{n_k}(K, \cdot) - \psi_{n_k}(\cdot, K) = \varphi_{n_k},$$

вытекающих из определения множеств $\Psi_{\varphi_{n_k}}$, получаем

$$\psi(K, \cdot) - \psi(\cdot, K) = \varphi,$$

т. е. рассматриваемая мера ψ принадлежит Ψ_φ . Выполнение соотношений (51) и (52) следует из (55) и леммы 6. Наконец, равенство

$$\tau(\psi) = \|\varphi\|_\tau$$

получается из равенства $\tau(\psi_{n_k}) = \|\varphi_{n_k}\|_\tau$ переходом к пределу с учетом (53). Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Из доказанной теоремы следует, в частности, что если в исходной задаче перемещения массы условие (15) заменить более жестким требованием (52), т. е. сузить класс допустимых перемещений, то при этом задача, по существу, не изменится.

В заключение отметим, что изложенные результаты относительно задачи перемещения массы и порождаемого ею нормированного пространства были получены еще в 50-х годах.

В дальнейшем они многократно использовались, в частности, в теории информации и эргодической теории, а также дополнялись и расширялись в различных направлениях многими авторами (см., например, С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин [1], Рубинштейн [1—3], Вершик [1, 2], Фридрих [1], Рвачев [1]). Интересные результаты относительно существования оптимальных перевозок с плотностями в задаче перемещения лобговой меры получены Судаковым [1] и Ехлаковым [1]. В работах Левина [1, 3, 4] (см. также цитированную в них более раннюю статью) рассмотрен случай, когда K — произвольный компакт, а $r(t, s)$ — неотрицательная непрерывная функция на $K \times K$. При этом функционал (25), вообще говоря, уже не является нормой в $\Phi_0(\mathcal{B})$, тем не менее, многие результаты остаются верными и в этой более общей ситуации. Отметим некоторые из них. Рассмотрим наряду с исходной задачей перемещения массы двойственную задачу, заключающуюся в максимизации функционала

$$\int_K u(t) \, d\varphi \quad (56)$$

при ограничениях (17) на $u \in C(K)$. Обозначим через A оптимальное значение задачи перемещения массы, т. е. нижнюю грань функционала (16) на множестве мер φ , удовлетворяющих (15). Обозначим через B оптимальное значение двойственной задачи, т. е. верхнюю грань функционала (56) при ограничениях (17). Легко видеть, что содержащийся в теореме 2 (для случая, когда g — метрика) признак оптимального перемещения можно переформулировать как соотношение двойственности $A = B$. В общем случае оптимального перемещения может не существовать, однако указанное соотношение двойственности имеет смысл всегда и, если $r(t, t) = 0$ ($t \in K$), то оно выполняется. Далее, если $r(t, t) = 0$ ($t \in K$) и r удовлетворяет неравенству треугольника, то существует оптимальное перемещение массы φ и справедлива теорема 4, т. е. можно обойтись без транзитных перевозок. Изучению последнего случая посвящена также работа: Алсынбаев, Имомназаров, Рубинштейн [1], где строится вспомогательное пространство с неметрической нормой, и с его помощью точно так же, как это делалось выше для рассмотренного классического случая, устанавливаются все требуемые результаты.

КОМПАКТНЫЕ И СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Компактные множества в нормированных пространствах

1.1. В 1.5.2 был указан критерий компактности множества в пространстве $C(K)$. Выясним условия компактности множества в пространстве $L^p(D)$ ($1 < p < \infty$, D — измеримое ограниченное множество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$).

Рассмотрим семейство $\{\omega_h\}$ функций вещественного аргумента, зависящих от вещественного положительного параметра и обладающих свойствами:

- 1) $0 \leq \omega_h(\xi) \leq M$ ($\xi \geq 0$, $h > 0$);
- 2) $\omega_h(\xi) = 0$ для $\xi \geq h$;
- 3) ω_h непрерывна для $\xi < h$;
- 4) если через t обозначить вектор из $\mathbb{R}^n$, а через $|t|$ его длину, то при всех $h > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(|t|) dt = v_h,$$

где v_h есть объем n -мерного шара радиуса h ; вследствие условия 2) интегрирование в написанном интеграле можно производить по n -мерному шару G_h с центром в начале координат.

Функции из $L^p(D)$ распространим на все $\mathbb{R}^n$, считая их равными нулю вне множества D .

Обозначим еще через $G_h(s)$ n -мерный шар радиуса h с центром в $s \in \mathbb{R}^n$. Положим для $x \in L^p(D)$

$$x_h(s) = \frac{1}{v_h} \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(s-t) x(t) dt = \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s)} \omega_h(s-t) x(t) dt, \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где для простоты обозначено $\omega_h(s-t) = \omega_h(|s-t|)$.

Функция x_h называется *усреднением по Стеклову* функции x , или *средней функцией* (по отношению к x); семейство функций $\{\omega_h\}$ называется *ядром усреднения*. Если за ω_h взять функцию

$$\omega_h(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < h, \\ 0, & \xi \geq h, \end{cases}$$

то $x_h(s)$ есть среднее значение функции x на шаре $G_h(s)$ в обычном понимании этого слова.

Лемма 1. Пусть $x \in L^p(D)$. Тогда при любом $h > 0$ средняя функция x_h непрерывна. При этом

$$|x_h(s)| \leq \frac{M}{(v_h)^{1/p}} \left\{ \int_{G_h(s)} |x(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leq \frac{M}{(v_h)^{1/p}} \|x\|, \quad s \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} x_h(s) - x_h(s') &= \\ &= \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s)} \omega_h(s-t) x(t) dt - \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s')} \omega_h(s'-t) x(t) dt, \quad s, s' \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Пусть $0 < \lambda < 1$. Обозначим

$$A'_\lambda = G_{\lambda h}(s) \cap G_{\lambda h}(s'), \quad A''_\lambda = [G_h(s) \cup G_h(s')] \setminus A'_\lambda.$$

Применяя неравенство Гёльдера, можем написать

$$\begin{aligned} |x_h(s) - x_h(s')| &\leq \\ &\leq \frac{1}{v_h} \left[\int_{A'_\lambda} |\omega_h(s-t) - \omega_h(s'-t)| |x(t)| dt + 2M \int_{A''_\lambda} |x(t)| dt \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{v_h} \left[\left(\int_{A'_\lambda} |\omega_h(s-t) - \omega_h(s'-t)|^q dt \right)^{1/q} \left(\int_{A'_\lambda} |x(t)|^p dt \right)^{1/p} + \right. \\ &\quad \left. + 2M \left(\int_{A''_\lambda} |x(t)|^p dt \right)^{1/p} (\text{mes } A''_\lambda)^{1/q} \right] \leq \\ &\leq \frac{\|x\|}{v_h} \left\{ \left[\int_{A'_\lambda} |\omega_h(s-t) - \omega_h(s'-t)|^q dt \right]^{1/q} + 2M [\text{mes } A''_\lambda]^{1/q} \right\}. \end{aligned}$$

Если $|s' - s| \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 1$, то, очевидно, $\text{mes } A''_\lambda \rightarrow 0$. Поэтому по $\varepsilon > 0$ можно найти такие $\delta > 0$ и $\lambda_0 < 1$, что при $|s' - s| < \delta$ и $\lambda = \lambda_0$ второе слагаемое в фигурных скобках будет меньше ε .

На множестве $G_{\lambda_0 h}(s)$ функция $\omega_h(s-t)$ равномерно непрерывна как функция от t , следовательно, можно указать такое $\delta_0 \leq \delta$, что

$$|\omega_h(s-t) - \omega_h(s'-t)| \leq \varepsilon, \quad |s' - s| < \delta_0, \quad t \in A'_{\lambda_0}.$$

Эти соображения позволяют, продолжив оценку, написать

$$|x_h(s) - x_h(s')| \leq \frac{\varepsilon \|x\|}{v_h} (v_h + 1), \quad |s - s'| \leq \delta_0. \quad (3)$$

Непрерывность функции x_h доказана.

Оценка (2) получается из формулы (1) применением неравенства Гёльдера.

Замечание. Величина δ_0 , пайденная в доказательстве леммы, не зависит от функции x .

Лемма 2. Если x — равномерно непрерывная в $\mathbb{R}^n$ функция, то при $h \rightarrow 0$ средние функции x_h равномерно в $\mathbb{R}^n$ стремятся к x .

Доказательство. Поскольку

$$x_h(s) = \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s)} \omega_h(s-t) x(s) dt,$$

то

$$|x_h(s) - x(s)| \leq \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s)} \omega_h(s-t) |x(t) - x(s)| dt.$$

Так как при достаточно малом h будет $|x(t) - x(s)| < \varepsilon$, то

$$|x_h(s) - x(s)| \leq \frac{\varepsilon}{v_h} \int_{G_h(s)} \omega_h(s-t) dt = \varepsilon$$

одновременно для всех $s \in \mathbb{R}^n$.

Сопоставляя элементу $x \in L^p(D)$ среднюю функцию x_h , мы получим линейный оператор, определенный в $L^p(D)$. Обозначим его U_h : $U_h(x) = x_h$. Нетрудно видеть, что U_h является непрерывным оператором из $L^p(D)$ в $C(Q)$, где Q — любое замкнутое ограниченное множество, содержащее D . Действительно, по лемме 1 функция x_h непрерывна в $\mathbb{R}^n$ и тем более непрерывна в Q , а из (2) находим

$$\|x_h\|_{C(Q)} = \max_{s \in Q} |x_h(s)| \leq \frac{M}{(v_h)^{1/p}} \|x\|_{L^p(D)}$$

откуда

$$\|U_h\| \leq \frac{M}{v_h^{1/p}}.$$

Если рассматривать U_h как линейный оператор в пространстве $L^p(D)$, то оценка его нормы может быть существенно улучшена.

Лемма 3. Если U_h рассматривать как оператор в пространстве $L^p(D)$, то

$$\|U_h\| \leq M, \quad h > 0. \quad (4)$$

Доказательство. Из неравенства (2) получаем

$$\|x_h\|_{L^p(D)} = \left[\int_D |x_h(s)|^p ds \right]^{1/p} \leq \left\{ \frac{M^p}{v_h} \int_D \left[\int_{G_h(s)} |x(t)|^p dt \right] ds \right\}^{1/p}.$$

Меняя порядок интегрирования, найдем

$$\|x_h\|_{L^p(D)} \leq \left\{ \frac{M^p}{v_h} \int_D \left[\int_{G_h(t)} |x(t)|^p ds \right] dt \right\}^{1/p} = M \left[\int_D |x(t)|^p dt \right]^{1/p},$$

что и означает (4).

Лемма 4. При $h \rightarrow 0$ имеет место $x_h \rightarrow x$ в пространстве $L^p(D)$.

Доказательство. Пусть D_0 — замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$, содержащий D и настолько большой, что существует замкнутый куб D_1 , также содержащий D и в свою очередь содержащийся внутри куба D_0 . Докажем, что множество $\dot{C}(D_0)$ непрерывных на D , функций, обращающихся в нуль на границе куба D_0 , плотно в $L^p(D)$. Пусть $x \in L^p(D_0)$. Поскольку множество почти везде ограниченных функций плотно в $L^p(D_0)$, можно считать, что функция x ограничена на D_0 . Предположим, например, что $|x(t)| \leq K$ для $t \in D_0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. На основании теоремы Лузина существует непрерывная на D_0 функция φ , совпадающая с x всюду, кроме множества $A \subset D_0$ такого, что $\text{mes } A \leq \varepsilon$; при этом $|\varphi(t)| \leq K$ для $t \in D_0$. Выбирая куб D_1 так, чтобы было $\text{mes}(D_0 \setminus D_1) < \varepsilon$, построим, пользуясь теоремой о распространении непрерывных функций (Натансон — II), непрерывную на D_0 функцию x_0 , совпадающую с φ на D_1 и равную нулю на границе куба D_0 . Согласно цитированной теореме эту функцию можно выбрать так, что $|x_0(t)| \leq K$ для $t \in D_0$. Оценим норму (в $L^p(D_0)$) разности $x - x_0$. Имеем

$$\|x - x_0\| \leq \|x - \varphi\| + \|\varphi - x_0\|.$$

Но

$$\|x - \varphi\| = \left[\int_{D_0} |x(t) - \varphi(t)|^p dt \right]^{1/p} = \left[\int_A |x(t) - \varphi(t)|^p dt \right]^{1/p} \leq 2K\varepsilon^{1/p},$$

$$\|\varphi - x_0\| =$$

$$= \left[\int_{D_0} |\varphi(t) - x_0(t)|^p dt \right]^{1/p} = \left[\int_{D_0 \setminus D_1} |\varphi(t) - x_0(t)|^p dt \right]^{1/p} \leq 2K\varepsilon^{1/p}.$$

откуда $\|x - x_0\| \leq 4K\varepsilon^{1/p}$. Остается заметить, что $x_0 \in \dot{C}(D_0)$.

Если x — функция из $\dot{C}(D_0)$, то, считая ее равной нулю вне D_0 , мы на основании леммы 2 можем заключить, что $x_h \rightarrow x$ равномерно в $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, в D_0 . Тем более $x_h \rightarrow x$ в $L^p(D_0)$. Согласно лемме 3 нормы операторов U_h ограничены в совокупности, а так как по доказанному $\dot{C}(D_0)$ плотно в $L^p(D_0)$, то применима теорема Баха — Штейнгауза (VII.1.2), сходимость $x_h \rightarrow x$ имеет место на всем $L^p(D_0)$. Но функция из $L^p(D)$, продолженная нулем вне D , есть элемент из $L^p(D_0)$, тем самым сходимость имеет место и на $L^p(D)$. Лемма доказана.

1.2. Укажем теперь критерий компактности множества в пространстве $L^p(D)$.

Теорема 1 (Колмогоров). Для того чтобы множество $E \subset L^p(D)$ было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы

- 1) E было ограниченным;
- 2) средние функции сходились (в $L^p(D)$) к порождающим функциям равномерно на E , т. е. $x_h \rightarrow x$ равномерно на E .

Доказательство. Необходимость первого условия очевидна. Докажем необходимость второго условия. Так как E относительно компактно, для него имеется конечная ε -сеть. Пусть это будет $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$. Для достаточно малых h ($h \leq h_\varepsilon$) по лемме 4 $\|x_h^{(k)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

Для любого $x \in E$ найдем $x^{(k)}$ так, что

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \varepsilon.$$

А тогда

$$\begin{aligned} \|x_h - x\| &= \|U_h(x) - x\| \leq \\ &\leq \|U_h(x - x^{(k)})\| + \|x_h^{(k)} - x^{(k)}\| + \|x - x^{(k)}\| < 2\varepsilon + M\varepsilon. \end{aligned}$$

Достаточность. Обозначим через E_h множество элементов вида $U_h(x)$, где $x \in E$. По лемме 1 $E_h \subset C(\bar{D})$. Докажем, что E_h относительно компактно в $C(\bar{D})$. Первое условие компактности множества в пространстве $C(\bar{D})$ — ограниченность — выполнено вследствие неравенства (2). Равностепенная непрерывность функций из E_h следует из неравенства (3).

Итак, E_h при любом h относительно компактно в $C(\bar{D})$ и тем более относительно в $L^p(D)$. По условию 2) найдется столь малое h_0 , что $\|x - x_{h_0}\| = \|x - U_{h_0}x\| < \varepsilon$ для произвольного $x \in E$. Таким образом, E_{h_0} является относительно компактной ε -сетью для E . По теореме Хаусдорфа (см. I.5.1) множество E относительно компактно.

Теорема доказана.

Замечание. Указанный в теореме признак компактности имеет место и в пространстве $L^1(D)$ (см. Тулайков [41]).

1.3. Укажем еще один признак компактности множества в пространстве $L^p(D)$. При этом для простоты формулировок ограничимся случаем, когда D есть промежуток $[a, b]$.

Теорема 2 (М. Рисс). Для того чтобы множество $E \subset L^p(a, b)$ ($1 < p < \infty$) было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы

- 1) E было ограничено;
- 2) сдвинутые функции сходились к данной равномерно относительно $x \in E$, т. е. $\int_a^b |x(t + \tau) - x(t)|^p dt \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$ равномерно относительно $x \in E$.

Доказательство. Необходимость. Введем в $L^p(a, b)$ оператор V_τ — оператор сдвига аргумента —

$$y = V_\tau(x), \quad y(t) = x(t + \tau).$$

Очевидно, V_τ — линейный оператор в $L^p(a, b)$ и

$$\|V_\tau\| \leq 1. \quad (5)$$

Докажем, что

$$V_\tau(x) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} x \quad (\text{в } L^p(a, b)). \quad (6)$$

Действительно, если x — непрерывная функция, то

$$\int_a^b |x(t + \tau) - x(t)|^p dt \leq \int_a^b \varepsilon^p dt = \varepsilon^p(b - a), \quad \tau \leq \tau_\varepsilon$$

и, следовательно, (6) выполнено. Поскольку множество непрерывных функций плотно в $L^p(a, b)$, то ввиду (5) применима теорема Банаха — Штейнгауза, так что (6) имеет место для любого $x \in L^p(a, b)$.

Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с приведенными в доказательстве теоремы 1.

Достаточность. Докажем, что если выполнены условия настоящей теоремы, то соблюдены и условия теоремы 1, если в качестве ядра усреднения принять

$$\omega_h(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < h, \\ 0, & \xi \geq h, \end{cases} \quad h > 0.$$

Сохраняя прежние обозначения, можем написать

$$\|U_h(x) - x\|^p = \frac{1}{(2h)^p} \int_a^b \left| \int_{-h}^h [x(t + \tau) - x(t)] d\tau \right|^p dt.$$

Применяя неравенство Гёльдера к внутреннему интегралу и меняя вслед за тем порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \|U_h(x) - x\|^p &\leq \frac{1}{(2h)^p} \int_a^b \left[\left[\int_{-h}^h 1^q d\tau \right]^{p/q} \left[\int_{-h}^h |x(t + \tau) - x(t)|^p d\tau \right] \right] dt = \\ &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h d\tau \int_a^b |x(t + \tau) - x(t)|^p dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \|V_\tau(x) - x\|^p d\tau. \end{aligned}$$

Если второе условие теоремы выполнено, то по произвольному $\varepsilon > 0$ найдется такое $h_0 > 0$, что при $|\tau| \leq h_0$ будет $\|V_\tau(x) - x\|^p < \varepsilon$ для любого $x \in E$, но тогда вследствие установленного выше

неравенства

$$\|U_h(x) - x\|^p \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \varepsilon \, d\tau = \varepsilon.$$

Таким образом, второе условие теоремы 1 выполнено. Поскольку первые условия в обеих теоремах совпадают, к множеству E применима теорема 1, на основании которой оно относительно компактно.

1.4. Выскажем, наконец, один общий признак компактности множества в нормированном пространстве (см. Гельфанд [1]).

Теорема 3 (Гельфанд). *Для того чтобы множество E в B -пространстве X было относительно компактно, необходимо, а если X сепарабельно, то и достаточно, чтобы для любой $(*)$ -слабо сходящейся к нулю последовательности функционалов $\{f_n\}$ предельное соотношение*

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (7)$$

выполнялось бы равномерно на E , т. е. чтобы каждому $\varepsilon > 0$ можно было соотнести такой номер n_ε , что при $n > n_\varepsilon$ для любого $x \in E$

$$|f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность. Докажем сначала, что множество E ограничено. В самом деле, в противном случае можно было бы указать такую последовательность элементов $x_n \in E$ ($n = 1, 2, \dots$), что $\|x_n\| = \gamma_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. По теореме о достаточном числе функционалов нашлись бы функционалы f'_n с $\|f'_n\| = 1$ и $f'_n(x_n) = \|x_n\|$. Полагая $f_n = \frac{1}{\gamma_n} f'_n$, мы получили бы последовательность $\{f_n\}$, которая сходится к нулю, но при этом

$$f_n(x_n) = \gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Следовательно, $f_n(x) \rightarrow 0$ неравномерно на E .

Обозначим через B замкнутый единичный шар пространства X^* , наделенный $(*)$ -слабой топологией. Мы уже знаем (III.3.4), что каждый элемент $x \in X$ мы можем рассматривать как непрерывную функцию на $(X^*, \sigma(X^*, X))$ и, следовательно, на B . Обозначим через φ соответствующее вложение X в $C(B)$. Докажем, что множество $\varphi(E)$ относительно компактно в B -пространстве $C(B)$. Так как легко видеть, что отображение φ — линейная изометрия, то этим мы докажем и относительную компактность E . В силу теоремы V.7.6. B — метрический компакт (с метрикой r). Проверим, что для множества $\varphi(E)$ выполняются условия теоремы Арцела — Асколи (см. теорему I.5.4). Так как нами доказано, что множество E ограничено, то осталось убедиться, что оно

равностепенно непрерывно. Предположим противное. Это означает существование такого $\varepsilon > 0$, что, какое бы $\delta > 0$ ни взять, найдутся такие $x_\delta \in E$ и $f_n, f'_n \in B$, что $r(f_n, f'_n) < \delta$ и

$$|f_n(x_\delta) - f'_n(x_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Беря последовательно $\delta = 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$, мы найдем последовательность x_n элементов из E и две последовательности функционалов $\{f_n\}, \{f'_n\} \subset B$ такие, что $r(f_n, f'_n) < 1/n$ и

$$|f_n(x_n) - f'_n(x_n)| \geq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Так как B — метрический компакт, то (переходя, если надо, к подпоследовательности) можно считать, что $f_n \rightarrow f_0(\sigma(X^*, X))$, $f_0 \in B$. Так как $r(f_n, f'_n) < 1/n$, то и $f'_n \rightarrow f_0(\sigma(X^*, X))$. Так как $f_n - f'_n \rightarrow 0$ в $(*)$ -слабой топологии, то в силу (7) $f_n(x) - f'_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ равномерно на E , что противоречит (8).

Необходимость. Докажем, что если последовательность $\{U_n\}$ непрерывных линейных операторов, переводящих данное пространство X в нормированное пространство Y , такова, что для $x \in X$

$$U_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (9)$$

то в случае относительной компактности E (9) имеет место равномерно на E .

Так как X есть B -пространство, то из (9) вытекает ограниченность норм операторов U_n (см. VII.1.1): $\|U_n\| \leq M$. Поскольку E компактно, для него существует конечная $\frac{\varepsilon}{2M}$ -сеть: $x_1, x_2, \dots, x_m$. Для достаточно больших n имеем

$$\|U_n(x_k)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Далее, для произвольного $x \in E$ найдем элемент x_k такой, что

$$\|x - x_k\| < \frac{\varepsilon}{2M}. \quad (11)$$

Тогда для тех же n будем иметь

$$\|U_n(x)\| \leq \|U_n(x_k)\| + \|U_n(x - x_k)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|U_n\| \|x - x_k\| \leq \varepsilon,$$

т. е. $U_n(x) \rightarrow 0$ равномерно на E .

Замечание. Теорема 3 в части достаточности, вообще говоря, неверна, если X не сепарабельно. Предоставляем читателю доказать, что если $X = l^\infty$ и $E = \{x_m\}_{m=1}^\infty$, где x_m — орты в l^∞ , то множество E не компактно в l^∞ , но удовлетворяет (7). Первый факт очевиден, а для доказательства второго надо воспользоваться теоремами X.3.3 и X.3.6.

§ 2. Компактные операторы

2.1. Как было указано в главе V, всякий линейный оператор из одного конечномерного пространства в другое — также конечномерное пространство — определяется некоторой прямоугольной матрицей. Изучение такого рода операторов представляет поэтому сравнительно легкую задачу, так как свойства конечных матриц хорошо известны из алгебры. Если же рассмотреть оператор в произвольном нормированном пространстве, то далеко не всегда удастся установить у него наличие всех свойств, аналогичных свойствам «конечномерных» операторов. В этом отношении ближе всего подходят к последним так называемые компактные операторы. Основные свойства компактных операторов, сближающие их с «конечномерными», устанавливаются лишь в главе XIII. Здесь же мы дадим лишь определение, укажем на простейшие следствия, вытекающие из него, и более подробно рассмотрим только компактные операторы в гильбертовом пространстве.

Произвольный оператор U , отображающий одно нормированное пространство X в другое нормированное пространство Y , называется *компактным*, если он преобразует каждое множество, ограниченное в X , в множество, относительно компактное в Y . Если при этом U непрерывен, то он называется *вполне непрерывным*.

В дальнейшем мы будем использовать это определение почти исключительно для случая, когда U — линейный оператор. Как нетрудно показать, каждый компактный линейный оператор вполне непрерывен. Действительно, единичный шар пространства X переводится оператором в относительно компактное и тем более ограниченное множество пространства Y , так что $\sup_{\|x\| \leq 1} \|U(x)\| < \infty$, т. е. U — ограниченный оператор.

Отметим, наконец, что для указанного случая в определении можно ограничиться требованием, чтобы единичный шар (или шар любого другого радиуса) переводился оператором U в относительно компактное множество. Далее, если не оговорено противное, компактный оператор — это компактный линейный оператор.

Определение компактного оператора и простейшие свойства этого класса операторов, рассмотренные в настоящем параграфе, были высказаны Гильбертом (см. Гильберт) для пространства L^2 . В общем случае см. Банах.

Упомянутые выше конечномерные операторы будут, разумеется, компактными. Другой тривиальный пример компактного оператора представляет непрерывный линейный функционал в пространстве X , если его рассматривать как оператор из X в пространство скаляров.

Более интересным примером компактного оператора является введенный в § 1 оператор U_h (см. 1.1). Действительно, как нетрудно проверить, компактность множества $U_h(E)$ есть следствие только ограниченности множества E .

Рассмотрим, наконец, интегральный оператор U с непрерывным ядром

$$y = U(x), \quad y(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt.$$

Будем считать U оператором из $C[a, b]$ в $C[a, b]$. Покажем, что U компактен. Действительно, если E — ограниченное множество в $C[a, b]$ ($\|x\| \leq M$ для $x \in E$), то $U(E)$ также, очевидно, ограничено ($\|y\| \leq M\|U\|$ для $y \in U(E)$). Далее, если $x \in X$, то ($y = U(x)$)

$$\begin{aligned} |y(s') - y(s)| &\leq \int_a^b |K(s', t) - K(s, t)| |x(t)| dt \leq \\ &\leq M \int_a^b |K(s', t) - K(s, t)| dt. \end{aligned}$$

Если s и s' достаточно близки, то правая часть сколь угодно мала независимо от $x \in E$. Это показывает, что функции множества $U(E)$ равномерно непрерывны. Таким образом, $U(E)$ относительно компактно в $C[a, b]$.

Используя теорему IX.1.2, можно показать, что U будет компактным, если его рассматривать и как оператор из $L^p(a, b)$ в $L^r(a, b)$ ($1 < p, r < \infty$).

Все указанные факты вместе с доказательствами переносятся на пространство $C(K)$ и $L^p(D)$.

2.2. Докажем три простые теоремы о компактных операторах. Пусть X и Y — нормированные пространства.

Теорема 1. Если U — компактный оператор из X в Y , то область значений $Y_0 = \Delta_U$ оператора U сепарабельна.

Доказательство. Обозначим через B_n шар в пространстве X с центром в точке 0 и радиусом n , а через Q_n — множество $U(B_n)$ пространства Y , т. е. множество элементов вида $y = U(x)$ ($x \in B_n$). Так как $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, то $Y_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Но Q_n компактно и поэтому сепарабельно (I.5.1). А тогда сепарабельно и Y_0 .

Теорема 2. а) *Линейная комбинация $U = \alpha U_1 + \beta U_2$ компактных операторов U_1 и U_2 , переводящих X в Y , есть компактный оператор.*

б) *Если $U \in B(X, Y)$, $V \in B(Y, Z)$ и один из этих операторов компактен, то и произведение VU также компактно.*

Доказательство. а) Пусть $E \subset X$ — ограниченное множество и пусть $\{y_n\} \subset U(E)$. Имеем

$$y_n = \alpha U_1(x_n) + \beta U_2(x_n), \quad x_n \in E, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из последовательности $\{U_1(x_n)\}$ можно, вследствие компактности оператора U_1 , выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{U_1(x_{n_k})\}$. На том же основании можно извлечь сходящуюся подпоследовательность из последовательности $\{U_2(x_{n_k})\}$. Пусть это будет $\{U_2(x_{n_{k_j}})\}$. Очевидно, последовательность $U(x_{n_{k_j}})$ сходится, т. е. $U(E)$ относительно компактно.

б) Это предложение следует непосредственно из того, что непрерывный линейный оператор переводит ограниченное множество в ограниченное, а компактное — в компактное.

Теорема 3. Пусть $\{U_n\}$ — последовательность непрерывных линейных операторов из X в B -пространство Y , сходящаяся к оператору U (в пространстве $B(X, Y)$). Тогда, если U_n ($n = 1, 2, \dots$) компактны, то и U компактен.

Доказательство. Пусть B — единичный шар пространства X . Покажем, что $U(B)$ относительно компактно. Возьмем U_{n_0} так, что

$$\|U_{n_0} - U\| < \varepsilon.$$

Множество $U_{n_0}(B)$ компактно, а так как для $y \in U(B)$

$$\|y - y_{n_0}\| = \|U(x) - U_{n_0}(x)\| \leq \|U - U_{n_0}\| \|x\| < \varepsilon,$$

$$y_{n_0} = U_{n_0}(x), \quad y = U(x), \quad x \in B,$$

то $U_{n_0}(B)$ представляет собой ε -сеть для $U(B)$. По замечанию к теореме Хаусдорфа $U(B)$ относительно компактно, а это и означает компактность оператора U .

Замечание. В условиях теоремы нельзя заменить сходимость в пространстве операторов, т. е. по норме, сходимостью на X . Действительно, как было указано выше, операторы U_n (см. IX.1.1) компактны и

$$U_n(x) \rightarrow x \text{ в } L^p \text{ для всех } x \in L^p.$$

Но тождественный оператор в L^p не является компактным. Действительно, теорему IV.1.3 можно переформулировать так: для того чтобы тождественный оператор в нормированном пространстве X был компактным, необходимо и достаточно, чтобы X было конечномерным.

§ 3. Сопряженные операторы

3.1. Пусть имеется непрерывный линейный оператор U , переводящий нормированное пространство X в нормированное пространство Y . Пусть g — непрерывный линейный функционал в пространстве Y , иначе говоря, — элемент сопряженного пространства Y^* . Для произвольного $x \in X$ положим

$$f(x) = g(U(x)). \quad (1)$$

Функционал f есть, таким образом, произведение функционала g , рассматриваемого как линейный оператор из Y в пространство вещественных (или комплексных) чисел, и оператора U : $f = gU$. Поэтому f — непрерывный линейный функционал, причем

$$\|f\| \leq \|U\| \|g\|. \quad (2)$$

Итак, формула (1) соотносит каждому функционалу $g \in Y^*$ некоторый функционал $f \in X^*$. Оператор, осуществляющий это соответствие, называется *сопряженным* по отношению к данному оператору U и обозначается U^* , т. е. $f = U^*g$ означает (1), иначе говоря, $U^*(g) = gU$.

Таким образом, каждому $U \in B(X, Y)$ соответствует сопряженный оператор U^* , переводящий Y^* в X^* . Мы докажем, что $U^* \in B(Y^*, X^*)$.

Теорема 1. *Сопряженный оператор U^* является непрерывным линейным оператором, переводящим пространство Y^* в X^* ; при этом*

$$\|U^*\| = \|U\|. \quad (3)$$

Доказательство. Проверим линейность оператора U^* . Если $g = \lambda g_1 + \mu g_2$ и $f = U^*(g)$, то

$$f(x) = g(U(x)) = \bar{\lambda} g_1(U(x)) + \bar{\mu} g_2(U(x)) = \bar{\lambda} U^*(g_1)(x) + \bar{\mu} U^*(g_2)(x).$$

Отсюда

$$U^*(g) = \lambda U^*(g_1) + \mu U^*(g_2).$$

Ограниченность U^* вытекает из неравенства (2), на основании которого

$$\|U^*\| \leq \|U\|.$$

Возьмем далее произвольный $x \in X$, и пусть $y = U(x)$. Построим функционал $g \in Y^*$ такой, что

$$g(y) = \|y\|, \quad \|g\| = 1.$$

Тогда

$$\|U(x)\| = \|y\| = g(y) = (gU)(x) = U^*(g)(x) \leq \|U^*(g)\| \|x\| \leq \|U^*\| \|x\|.$$

откуда ясно, что

$$\|U\| \leq \|U^*\|.$$

Отметим еще, что если U_1 и U_2 — два непрерывных линейных оператора из пространства X в Y и

$$U = \lambda U_1 + \mu U_2,$$

то

$$U^* = \bar{\lambda} U_1^* + \bar{\mu} U_2^*.$$

Действительно ($g \in Y^*$, $x \in X$),

$$\begin{aligned} U^*(g)(x) &= \lambda [g(U_1(x))] + \mu [g(U_2(x))] = (\lambda g)(U_1(x)) + \\ &+ (\bar{\mu} g)(U_2(x)) = U_1^*(\lambda g)(x) + U_2^*(\bar{\mu} g)(x) = [\bar{\lambda} U_1^*(g) + \bar{\mu} U_2^*(g)](x). \end{aligned}$$

Пусть V , U — непрерывные линейные операторы из пространства X в Y и соответственно из пространства Y в Z . Если $W = UV$, то $W^* = V^*U^*$. Действительно, обозначая $f = W^*(g)$, $f_1 = U^*(g)$ ($g \in Z^*$), можем написать

$$f(x) = g(W(x)) = g(UV(x)) = f_1(V(x)) = V^*U^*(g)(x), \quad x \in X.$$

3.2. Рассмотрим вещественные конечномерные пространства X и Y , размерность которых соответственно равна m и n , и линейный оператор U из X в Y . Оператор U определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

с помощью формул

$$\eta_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} \xi_k, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in X, \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in Y.$$

Пусть $g = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ — функционал в пространстве Y :

$$g(y) = \sum_{i=1}^n \psi_i \eta_i.$$

Функционал $f = U^*g$ будет иметь вид

$$f(x) = g(U(x)) = \sum_{j=1}^n \psi_j \sum_{k=1}^m a_{jk} \xi_k = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} \psi_j \right) \xi_k,$$

т. е. $f = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$, где

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} \psi_j = \sum_{j=1}^n a_{kj}^* \psi_j,$$

$$a_{kj}^* = a_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, оператор U^* определяется матрицей

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & \dots & a_{mn}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

которая получается из A заменой строк столбцами.

Пусть теперь U — интегральный оператор с непрерывным ядром

$$y = U(x), \quad y(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt.$$

Будем считать U оператором в $L^p(a, b)$ ($1 < p < \infty$). Беря функционал $g \in (L^p)^*$:

$$g(y) = \int_a^b \psi(s) y(s) ds, \quad y \in L^p, \quad \psi \in L^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} g(U(x)) &= \int_a^b \psi(s) \left[\int_a^b K(s, t) x(t) dt \right] ds = \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) \psi(s) ds \right] x(t) dt = \int_a^b \varphi(t) x(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, сопряженный оператор U^* также является интегральным с ядром $K^*(s, t) = K(t, s)$:

$$f = U^*g, \quad \varphi(t) = \int_a^b K^*(t, s) \psi(s) ds = \int_a^b K(s, t) \psi(s) ds.$$

З а м е ч а н и е. Если рассматривать комплексные конечномерные пространства, то сопряженный оператор будет определяться матрицей

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & \dots & a_{mn}^* \end{pmatrix}, \quad a_{jk}^* = \overline{a_{kj}},$$

$$j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Чтобы получить этот результат, достаточно вспомнить, что функционалы $f = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in X^*$ и $g = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \in Y^*$

определяются формулами

$$f(x) = \sum_{k=1}^m \overline{\varphi_k} \xi_k, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in X,$$

$$g(y) = \sum_{k=1}^n \overline{\psi_k} \eta_k, \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in Y.$$

Аналогично в случае комплексного пространства L^p оператор, сопряженный к интегральному, также будет интегральным с ядром

$$K^*(s, t) = \overline{K(t, s)}.$$

3.3. Рассматривая оператор U^* как исходный, можно образовать для него сопряженный, который будем называть *вторым сопряженным* к данному оператору U и обозначать U^{**} . Согласно теореме 1 это будет непрерывный линейный оператор из пространства X^{**} в пространство Y^{**} . Отождествляя пространство X с подпространством в X^{**} и пространство Y с подпространством в Y^{**} , докажем, что на X оператор U^{**} совпадает с U . Пусть π_1 — каноническое вложение из X в X^{**} , а π_2 — из Y в Y^{**} .

Теорема 2. Для любого $x \in X$ имеем

$$U^{**}(\pi_1(x)) = \pi_2(U(x)). \quad (5)$$

Доказательство. Если $g \in Y^*$, то

$$\begin{aligned} [U^{**}(\pi_1(x))](g) &= [\pi_1(x)](U^*(g)) = \\ &= [\overline{U^*(g)}](x) = \overline{g(U(x))} = [\pi_2(U(x))](g), \end{aligned}$$

откуда и следует (5).

Следствие. Если пространство X рефлексивно, то $U^{**} = U$. (Равенство надо понимать с учетом того, что соответствующие элементы пространств X и X^{**} , а также пространств Y и Y^{**} предполагаются отождествленными.)

3.4. Свойство компактности сохраняется при переходе от данного оператора к сопряженному.

Теорема 3. Пусть U — непрерывный линейный оператор, переводящий нормированное пространство X в B -пространство Y . Тогда, если один из операторов U и U^* компактен, то компактен и другой.

Доказательство. Предположим сначала, что компактен оператор U , и возьмем ограниченную последовательность $\{g_n\}$ функционалов в пространстве Y ($\|g_n\| \leq M$; $n = 1, 2, \dots$). Докажем, что из последовательности функционалов $\{U^*g_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Этим будет доказана компактность оператора U^* .

Обозначим через Y_0 замыкание множества $U(X)$. По теореме IX.2.1 Y_0 — сепарабельное пространство. Будем рассматривать функционалы g_n только на Y_0 . Так как последовательность функ-

ционалов $\{g_n\}$ ограничена, то по теореме V.7.6 из нее можно выделить (*)-слабо сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что это уже сделано, т. е. что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = g(y), \quad y \in Y_0.$$

При этом g будет линейным функционалом в Y_0 . Поскольку его можно распространить на все Y с сохранением нормы, можно считать, что $g \in Y^*$. Отметим, что

$$\|g\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\| \leq M.$$

Положив $f = U^*(g)$, $f_n = U^*(g_n)$, будем иметь для любого $x \in X$

$$f_n(x) = g_n(U(x)) \rightarrow g(U(x)) = f(x),$$

так как $U(x) \in Y_0$. Таким образом, получаем $f_n \rightarrow f(\sigma(X^*, X))$. Покажем, что имеет место и сходимость по норме. Допустим противное. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$\|f_n - f\| \geq m > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Найдем для каждого $n = 1, 2, \dots$ элемент x_n так, что

$$\|x_n\| = 1, \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| > \frac{1}{2} \|f_n - f\| \geq \frac{1}{2} m, \quad n = 1, 2, \dots,$$

т. е., полагая $y_n = U(x_n)$,

$$|g_n(y_n) - g(y_n)| \geq \frac{1}{2} m, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Так как оператор U компактен, а $\|x_n\| = 1$ ($n = 1, 2, \dots$), то из последовательности $\{y_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$. Пусть $y_{n_k} \rightarrow y_0$. Тогда, учитывая, что $y_0 \in Y_0$, имеем

$$\begin{aligned} |g_{n_k}(y_{n_k}) - g(y_{n_k})| &\leq \\ &\leq |g_{n_k}(y_{n_k}) - g_{n_k}(y_0)| + |g_{n_k}(y_0) - g(y_0)| + |g(y_0) - g(y_{n_k})| \leq \\ &\leq 2M \|y_{n_k} - y_0\| + |g_{n_k}(y_0) - g(y_0)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

что противоречит (6).

Докажем теперь, что если U^* компактен, то будет компактен и U .

Рассмотрим оператор U^{**} . По доказанному этот оператор компактен, а так как согласно теореме 2 его можно трактовать как распространение оператора U , то и этот оператор оказывается компактным. Действительно, если $E \subset X$ — ограниченное множество, то $U(E)$ относительно компактно в Y^{**} . А тогда, поскольку $Y (= \pi_2(Y))$ замкнуто в Y^{**} , $U(E)$ будет относительно компактно и в Y .

3.5. Понятие сопряженного оператора позволяет высказать удобный критерий компактности.

Теорема 4. Пусть U — непрерывный линейный оператор, переводящий нормированное пространство X в сепарабельное B -пространство Y . Для того чтобы U был компактным, необходимо и достаточно, чтобы сопряженный оператор U^* переводил всякую $(*)$ -слабо сходящуюся к нулю последовательность $\{g_n\}$ функционалов в пространстве Y в последовательность $\{f_n\}$ функционалов в пространстве X , сходящуюся к нулю по норме.

Доказательство. **Необходимость.** Допустим, что $\{f_n\}$ не сходится по норме к нулю. Можно считать, что

$$\|f_n\| \geq m > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

По предыдущей теореме U^* — компактный оператор, и, так как последовательность $\{g_n\}$ ограничена, из $\{f_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$. Пусть

$$f_{n_k} \rightarrow f. \quad (8)$$

Для любого $x \in X$ имеем

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(U(x)) = 0,$$

так как $g_{n_k} \rightarrow 0$ ($\sigma(Y^*, Y)$). Следовательно, $f = 0$, а тогда (8) противоречит (7).

Достаточность. В силу теоремы 3 достаточно проверить, что U^* — компактный оператор. Пусть B — единичный шар Y^* , $\{g_n\} \subset B$. Так как Y сепарабельно, то по теореме V.7.6 $g_{n_k} \rightarrow g$ ($\sigma(Y^*, Y)$). Тогда по условию $U^*(g_{n_k}) \rightarrow U^*(g)$ по норме, что доказывает относительную компактность множества $U^*(B)$ и тем самым и оператора U^* .

3.6. Для оператора U в гильбертовом пространстве H понятие сопряженного оператора уже было определено в V.3.3. Покажем, что новое определение приводит по существу к тому же самому.

Пусть g — линейный функционал в H . Согласно V.3.2 существует элемент $z \in H$ такой, что

$$g(y) = (y, z), \quad y \in H. \quad (9)$$

Обозначим далее $f = U^*g$ и пусть функционал f определяется элементом z^* :

$$f(x) = (x, z^*), \quad x \in H. \quad (10)$$

Учитывая равенства (9) и (10), перепишем соотношение $f(x) = = g(Ux)$ в виде

$$(x, z^*) = (Ux, z), \quad x \in H. \quad (11)$$

Оператор U^* определен в H^* . Так как H^* линейно изометрично самому H , то оператор U^* можно рассматривать и как опе-

ратор в H (очевидно, также линейный), который мы будем обозначать тем же символом U^* . Так как функционал g соответствует элементу z , а f — элементу z^* , то $z^* = U^*z$ и (11) можно переписать так: $(Ux, z) = (x, U^*z)$ ($x \in H$), что совпадает с прежним определением сопряженного оператора.

Определение сопряженного оператора для конкретных операторов в L^2 даны Гильбертом (см. Гильберт). Для других частных случаев см. Рисс [3], общее определение — Шаудер [2], Гильдебрандт [4], Бапах.

§ 4. Компактные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

4.1. В этом параграфе проводится детальный анализ структуры компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве H . Оказывается, строение такого оператора напоминает структуру симметричной матрицы. Как и в случае матрицы, основную роль в выяснении свойств компактного самосопряженного оператора играют собственные значения и связанные с ними понятия.

Результаты этого параграфа были установлены для интегральных операторов в L^2 Гильбертом и Шмидтом, в общем случае — Нейманом [1] (для сепарабельного H) и Релихом [1] (произвольное H).

Собственным значением оператора U называется такое число λ , что существует элемент $x_0 \neq 0$, обладающий свойством

$$Ux_0 = \lambda x_0.$$

Элемент x , для которого имеет место равенство $Ux = \lambda x$, называется *собственным элементом*, принадлежащим (соответствующим) данному собственному значению λ . Собственные элементы, принадлежащие данному значению λ , образуют отвечающее ему *собственное подпространство* H_λ . Нетрудно проверить, что H_λ действительно является подпространством пространства H^* .

4.2. Отметим некоторые простейшие факты, касающиеся собственных значений и элементов самосопряженного оператора U в гильбертовом пространстве H .

I. При любом $x \in H$ выражение (Ux, x) вещественно (ср. V.6.2). Это следует из равенства

$$(Ux, x) = (x, Ux) = \overline{(Ux, x)}.$$

II. Имеет место соотношение

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ux, x)|.$$

*) Все высказанные выше определения могут быть отнесены и к случаю, когда рассматривается произвольное нормированное пространство X и оператор U в нем. Собственное подпространство мы будем обозначать в этом случае через X_λ .

Обозначим $Q = \sup_{\|x\|=1} |(Ux, x)|$. Так как при $\|x\| = 1$

$$|(Ux, x)| \leq \|Ux\| \|x\| \leq \|Ux\| \leq \|U\|,$$

то $Q \leq \|U\|$.

Далее, из легко проверяемого тождества (см. V.4.2)

$$(Ux, y) = \frac{1}{4} \{[(U(x+y), x+y) - (U(x-y), x-y)] + \\ + i[(U(x+iy), x+iy) - (U(x-iy), x-iy)]\} \quad (1)$$

вследствие I находим

$$\operatorname{Re}(Ux, y) = \frac{1}{4} [(U(x+y), x+y) - (U(x-y), x-y)] \leq \\ \leq \frac{1}{4} Q [\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = \frac{1}{2} Q [\|x\|^2 + \|y\|^2]$$

(по поводу последнего равенства см. IV.5.1). Беря здесь x с $\|x\| = 1$ и $y = \frac{Ux}{\|Ux\|}$, получим

$$\|Ux\| = \operatorname{Re}(Ux, y) \leq Q,$$

откуда

$$\|U\| \leq Q.$$

III. Собственные значения оператора U вещественны.

Действительно, если λ — собственное значение, а x — соответствующий ему ненулевой собственный элемент, то

$$\lambda = \frac{(Ux, x)}{(x, x)}.$$

Ввиду самосопряженности U числитель в этом выражении веществен, а тогда и λ вещественно.

IV. Собственные подпространства H_{λ_1} и H_{λ_2} , отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 оператора U , ортогональны.

В самом деле, пусть x и y — элементы из H_{λ_1} и H_{λ_2} соответственно. Так как $Ux = \lambda_1 x$, $Uy = \lambda_2 y$, то, предполагая, например, $\lambda_1 \neq 0$, будем иметь

$$(x, y) = \frac{1}{\lambda_1} (Ux, y) = \frac{1}{\lambda_1} (x, Uy) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (x, y),$$

что возможно лишь в случае, когда $(x, y) = 0$.

4.3. Пусть теперь U означает не только самосопряженный, но и компактный оператор. Имеет место

Теорема 1. Оператор U имеет по крайней мере одно собственное значение.

Доказательство. Так как в случае $U = 0$ утверждение теоремы очевидно, то будем считать $U \neq 0$.

Введем в рассмотрение *границы* оператора

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ux, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ux, x).$$

Согласно II $\|U\| = \max [|m|, M]$. Докажем, что

$$\lambda_1 = \begin{cases} m, & \text{если } \|U\| = |m|, \\ M, & \text{если } \|U\| = M, \end{cases}$$

является собственным значением оператора U .

Действительно, рассмотрим, например, случай $\|U\| = M$. По определению числа M найдется последовательность нормированных элементов $\{x_n\}$ такая, что

$$(Ux_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M = \lambda_1. \quad (2)$$

Так как $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, то ввиду компактности оператора U из последовательности $\{Ux_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что это уже сделано, т. е. что $\{Ux_n\}$ сходится. Пусть, например, $Ux_n \rightarrow y_0$. Из соотношения

$$\|Ux_n - \lambda_1 x_n\|^2 = \|Ux_n\|^2 - 2\lambda_1 (Ux_n, x_n) + \lambda_1^2 \leq \|U\|^2 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 (Ux_n, x_n),$$

учитывая, что $\lambda_1^2 = \|U\|^2$, получаем в силу (2)

$$Ux_n - \lambda_1 x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

А тогда

$$x_n = \frac{1}{\lambda_1} [Ux_n - (Ux_n - \lambda_1 x_n)]$$

имеет предел. Именно, $x_n \rightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda_1} y_0$. Так как $Ux_n \rightarrow Ux_0 = y_0$, то $y_0 = Ux_0 = \lambda_1 x_0$. Поскольку $x_0 \neq 0$ ($\|x_0\| = 1$), то λ_1 является собственным значением.

Теорема доказана.

Следствие. Если оператор U не имеет отличных от нуля собственных значений, то $U = 0$.

З а м е ч а н и е. Найденное в теореме собственное значение оператора U является наибольшим по абсолютной величине.

В самом деле, если λ — некоторое собственное значение, а x — соответствующий элемент, который можно считать нормированным, то

$$|\lambda| = |\lambda|(x, x) = |(Ux, x)| \leq \|U\| = |\lambda_1|.$$

4.4. Обозначим через P_λ проектор (см. V.3.4), проектирующий на собственное подпространство H_λ . Следующая теорема существенно уточняет теорему 1.

Теорема 2. Множество собственных значений компактного самосопряженного оператора U не более чем счетно. При этом

$$U = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k}, \quad (3)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — различные собственные значения оператора U (сходимость ряда понимается как сходимость по норме в пространстве операторов).

Доказательство. Пусть λ — некоторое собственное значение оператора U . Справедливо соотношение

$$\lambda P_\lambda = UP_\lambda = P_\lambda U. \quad (4)$$

Действительно, так как $P_\lambda x \in H_\lambda$ при любом $x \in H$, то $UP_\lambda x = \lambda P_\lambda x$. Переставовочность операторов P_λ и U следует из того, что их произведение $UP_\lambda = \lambda P_\lambda$ — самосопряженный оператор (см. V.6.1).

Пусть $\lambda = \lambda_1$. Рассмотрим оператор

$$U_2 = U_1 - \lambda_1 P_{\lambda_1}, \quad U_1 = U. \quad (5)$$

Ввиду (4) можно записать

$$U_2 = \tilde{P}_1 U_1 = U_1 \tilde{P}_1, \quad (6)$$

где обозначено $\tilde{P}_1 = I - P_{\lambda_1}$. Отсюда следует, что U_2 — самосопряженный и компактный оператор (последнее на основании теоремы IX.2.2). Соотношение (6) показывает также, что

$$\|U_2\| \leq \|\tilde{P}_1\| \|U_1\| \leq \|U_1\|.$$

Применяя к оператору U_2 предыдущую теорему, найдем его собственное значение λ_2 . При этом

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2|,$$

так как $|\lambda_1| = \|U_1\|$, $|\lambda_2| = \|U_2\|$.

Докажем, что λ_1 не является собственным значением оператора U_2 . В самом деле, в противном случае нашелся бы элемент $x \neq 0$ такой, что

$$U_2 x = \lambda_1 x$$

или, в силу (5),

$$U_1 x - \lambda_1 P_{\lambda_1} x = \lambda_1 x. \quad (7)$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор P_{λ_1} , получим вследствие (4)

$$\lambda_1 P_{\lambda_1} x = UP_{\lambda_1} x - \lambda_1 P_{\lambda_1} x = 0.$$

Следовательно, из (7)

$$U_1 x = \lambda_1 x,$$

т. е. $x \in H_{\lambda_1}$, и поэтому $x = P_{\lambda_1} x = 0$, что приводит к противоречию.

Установим еще, что каждое отличное от нуля собственное значение оператора U_2 является вместе с тем и собственным значением оператора U_1 , причем соответствующие собственные подпространства совпадают.

Действительно, пусть $\lambda \neq 0$ — собственное значение оператора U_2 и $x \neq 0$ — такой элемент, что $U_2 x = \lambda x$. В силу (6) имеем

$$U_1 \bar{P}_1 x = \lambda x, \quad (8)$$

откуда

$$\bar{P}_1 U_1 \bar{P}_1 x = \lambda \bar{P}_1 x.$$

С другой стороны,

$$\tilde{P}_1 U_1 \tilde{P}_1 x = U_1 \tilde{P}_1^2 x = U_1 \tilde{P}_1 x = \lambda x,$$

поэтому $\bar{P}_1 x = x$. Таким образом, из (8) получаем

$$U_1 x = \lambda x,$$

т. е. λ — собственное значение оператора U_1 . Если теперь под x подразумевать собственный элемент оператора U_1 , принадлежащий собственному значению λ , то, поскольку $\lambda \neq \lambda_1$, подпространства H_λ и H_{λ_1} ортогональны (см. III из 4.3), поэтому $P_{\lambda_1} x = 0$ и в соответствии с (5)

$$U_2 x = U_1 x - \lambda_1 P_{\lambda_1} x = U_1 x = \lambda x.$$

Таким образом, x является собственным элементом оператора U_2 .

Если оператор U_2 отличен от тождественного нуля, то, исходя из него, построим оператор $U_3 = U_2 - \lambda_2 P_{\lambda_2}$ и т. д. Продолжая этот процесс, построим компактные самосопряженные операторы $U_1 = U$, $U_2, \dots, U_n$ и собственные числа этих операторов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ так, что

$$U_{k+1} = U_k - \lambda_k P_{\lambda_k} = U - \sum_{j=1}^k \lambda_j P_{\lambda_j}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|, \quad \|U_k\| = |\lambda_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

При этом согласно доказанному λ_k будут попарно различными собственными значениями оператора $U_1 = U$.

Предположим, что $U_n = 0$. Тогда

$$U = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j P_{\lambda_j}. \quad (9)$$

Если же $U_n \neq 0$ ни при одном $n = 1, 2, \dots$, то процесс приводит к последовательности операторов $U_1, U_2, \dots$ и собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Докажем, что в этом случае $\lambda_n \rightarrow 0$. В самом деле, в противном случае для всех $n = 1, 2, \dots$

$$|\lambda_n| \geq \lambda_0 > 0.$$

Возьмем в подпространстве H_{λ_n} нормированный элемент x_n . Различные элементы x_n попарно ортогональны, поэтому

$$\|Ux_m - Ux_n\|^2 = \|\lambda_m x_m - \lambda_n x_n\|^2 = |\lambda_m|^2 + |\lambda_n|^2 \geq 2\lambda_0^2, \quad m \neq n,$$

вследствие чего ни последовательность $\{Ux_n\}$, ни какая-либо ее подпоследовательность не сходятся, а это противоречит компактности оператора U . Поскольку $\|Ux_n\| = |\lambda_n|$, то из доказанного вытекает, что $Ux_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и, следовательно,

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{\lambda_k}.$$

Таким образом, представление U в форме (3) установлено.

Докажем, что, кроме $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ оператор не имеет других не равных нулю собственных значений. Действительно, если бы λ было таким собственным значением, то для некоторого $x \neq 0$ оказалось бы $Ux = \lambda x$, т. е.

$$\lambda x = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k} x.$$

Элементы $P_{\lambda_k} x$ входят в H_{λ_k} и потому попарно ортогональны. Следовательно,

$$\lambda P_{\lambda_m} x = \lambda_m P_{\lambda_m} x, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так как $\lambda \neq \lambda_m$, то $P_{\lambda_m} x = 0$. Таким образом, $x = 0$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что собственное подпространство H_{λ_k} , отвечающее отличному от нуля собственному значению, конечномерно.

Действительно, всякое ограниченное множество E в H_{λ_k} является образом ограниченного множества E (E состоит из всех элементов z вида $z = (1/\lambda_k)x$, где $x \in E$). Поэтому ввиду компактности оператора U множество E относительно компактно, а это возможно лишь в случае, когда H_{λ_k} конечномерно (см. теорему IV.1.3).

Замечание 2. Из соотношения (6) вытекает, что собственное значение λ_k можно определить как

$$\lambda_k = \pm \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp H_{\lambda_j}}} |(Ux, x)|, \quad j = 1, 2, \dots, k-1.$$

4.5. Обозначим через H_0 собственное подпространство, отвечающее нулевому собственному значению, и через H его ортогональное дополнение. Так как для любого $x \in H$, $y \in H_0$

$$(Ux, y) = (x, Uy) = 0,$$

то $Ux \perp H_0$, т. е. $U(H) \subset H$. Наоборот, если $y \perp U(H)$, то для любого $x \in H$

$$0 = (Ux, y) = (x, Uy),$$

откуда вытекает, что $Uy = 0$, т. е. $y \in H_0$. Таким образом, $H = \overline{U(H)}$.

Выберем в каждом из подпространств H_{λ_k} полную ортогональную систему. В силу сделанного выше замечания она будет копечна при любом $k = 1, 2, \dots$. Объединяя эти системы в одну, получим ортонормальную систему $x_1, x_2, \dots$, состоящую из собственных элементов оператора U . Собственное значение, которому соответствует элемент x_k , будем обозначать по-прежнему λ_k . Таким образом, среди собственных значений будут, вообще говоря, равные*). Из теоремы 2 следует, что построенная ортонормальная система будет полной в H и, следовательно, каждый элемент $z \in H$ можно представить в виде

$$z = x_0 + \tilde{x}, \quad (10)$$

где

$$x_0 \in H_0, \quad \tilde{x} = \sum_k c_k x_k \in \tilde{H},$$

$$c_k = (\tilde{x}, x_k) = (z, x_k), \quad k \in N.$$

В частности, если $z = Ux$, то, как было отмечено выше, $z \in H$ и поэтому

$$z = \sum_k c_k x_k, \quad c_k = (z, x_k) = (Ux, x_k) = (x, Ux_k) = \lambda_k (x, x_k).$$

Рассмотрим уравнение

$$x - \mu Ux = y, \quad (11)$$

в котором y — фиксированный элемент из H , μ — числовой параметр.

Представляя y и искомый элемент x в виде (10), придем к уравнению

$$x_0 + \sum_k c_k x_k - \mu \sum_k c_k \lambda_k x_k = y_0 + \sum_k d_k x_k$$

$$(c_k = (x, x_k), \quad d_k = (y, x_k)),$$

откуда

$$x_0 = y_0, \quad c_k(1 - \mu \lambda_k) = d_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и, следовательно,

$$x_0 = y_0, \quad c_k = \frac{d_k}{1 - \mu \lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

*) Удобство принятого способа обозначений состоит в том, что не только собственный элемент определяет собственное значение, но и, наоборот, собственное значение однозначно (с точностью до множителя) определяет собственный элемент.

если только ни при одном $k = 1, 2, \dots$

$$1 - \mu\lambda_k \neq 0.$$

При этом

$$\sum_k |c_k|^2 \leq \frac{1}{\min_k |1 - \mu\lambda_k|^2} \sum_k |d_k|^2 < \infty,$$

и решение существует и единственно. Обозначая через x^* иско-
мое решение, будем иметь в этом случае

$$x^* = y_0 + \sum_k \frac{d_k}{1 - \mu\lambda_k} x_k.$$

Если же $\mu\lambda_k = 1$, то решение существует лишь тогда, когда соответствующие коэффициенты $d_k = 0$, т. е. когда правая часть уравнения (11) — элемент y — ортогональна всем собственным элементам, принадлежащим собственному значению $1/\mu$. При этом, поскольку соответствующие коэффициенты c_k могут быть выбраны произвольно, решение не единственно: если x^* — некоторое решение, то решением будет и $x^* + \bar{x}$, где $\bar{x}$ — произвольный элемент из $H_{1/\mu}$.

Значения

$$\mu_k = 1/\lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

мы будем называть *характеристическими значениями* уравнения (11), а собственные элементы, принадлежащие собственному значению λ_k , — *характеристическими элементами*, соответствующими характеристическому значению μ_k .

Если подразумевать под U интегральный оператор в L^2 с непрерывным симметричным ядром:

$$y = Ux, \quad y(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt,$$

то приведенные выше общие факты обратятся в хорошо известные результаты теории интегральных уравнений, на формулировке которых мы не останавливаемся.

Далее, трактуя симметричную матрицу как оператор в конечномерном гильбертовом пространстве, можно из изложенного выше получить известные теоремы теории матриц.

4.6. Пусть H — сепарабельное пространство. Для матричного представления (см. V.3.1) компактного самосопряженного оператора U выберем полную ортонормальную систему следующим образом: к построенной выше системе в $\tilde{H}$ присоединим ортонормальную в H_0 систему. Обозначая получившуюся систему через $\{x_k\}$, а соответствующие собственные значения через $\{\lambda_k\}$ (таким образом, λ_k может равняться нулю), получим, что представляю-

щая оператор U матрица есть

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Диагональные элементы этой матрицы суть собственные значения, а все остальные равны нулю.

Можно показать, что если U допускает матричное представление матрицей вида (13), где λ_k вещественные и $\lambda_k \rightarrow 0$, то U — компактный самосопряженный оператор.

§ 5. Интегральное представление самосопряженного оператора

В этом параграфе для произвольного самосопряженного оператора устанавливается представление в виде некоторого абстрактного интеграла типа интеграла Стильтеса, которое, если рассматриваемый оператор компактен, сводится к формуле (3) предыдущего параграфа.

Для операторов в конкретных пространствах такое представление было указано Гильбертом (см. Гильберт), в общем случае — Нейманом [1]. Идея приводимых ниже рассуждений принадлежит Ф. Риссу. По поводу материала, изложенного в этом параграфе, см. также А х и е з е р, Г л а з м а н.

Основным средством исследования здесь является понятие функции от оператора. С частными случаями этого понятия мы уже встречались раньше: так, например, для операторов в нормированном пространстве были определены степени с целыми показателями, а для положительных операторов в гильбертовом пространстве — квадратный корень. Ниже соответствие между функциями вещественного аргумента и операторами систематически распространяется на все непрерывные функции.

5.1. Пусть U — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H . Как и в предыдущем параграфе, обозначим границы оператора

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ux, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ux, x).$$

Пусть далее $\varphi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n$. Положим по определению

$$\varphi(U) = c_0 I + c_1 U + \dots + c_n U^n.$$

Оператор $\varphi(U)$ называется *операторным полиномом*.

Отметим некоторые свойства операторных полиномов.

I. $[\varphi(U)]^* = \overline{\varphi(U)}$. В частности, если $\varphi(t)$ — вещественный полином, то $\varphi(U)$ — самосопряженный оператор.

II. Если $\varphi(t) = \alpha \varphi_1(t) + \beta \varphi_2(t)$, то $\varphi(U) = \alpha \varphi_1(U) + \beta \varphi_2(U)$.

III. Если $\varphi(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t)$, то $\varphi(U) = \varphi_1(U) \varphi_2(U)$.

IV. Операторный полином перестановочен с любым оператором, перестановочным с U , т. е. $UV = VU$ влечет $\varphi(U)V = V\varphi(U)$.

V. Если $\varphi(t) \geq 0$ для $t \in [m, M]$, то оператор $\varphi(U)$ положителен.

Ввиду очевидности первых четырех свойств остановимся лишь на доказательстве пятого.

Поскольку полином $\varphi(t)$ положителен в промежутке $[m, M]$. внутри этого промежутка он не может иметь корней нечетной кратности, кроме того, так как при переходе через корень нечетной кратности знак полинома меняется, а знак $\varphi(t)$ для достаточно больших t совпадает со знаком старшего коэффициента c_n , то в случае $c_n > 0$ число корней нечетной кратности, превосходящих или равных M , будет четным, а если $c_n < 0$, — нечетным. Принимая все это во внимание, можно убедиться, что $\varphi(t)$ допускает представление в виде

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) \dots \varphi_s(t),$$

где множители $\varphi_k(t)$ имеют одну из следующих форм:

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} a_k & a_k > 0, \\ (t + \alpha_k)^2 + \beta_k, & \alpha_k - \text{вещественное}, \beta_k > 0, \\ t - t_k, & t_k \leq m, \\ t_k - t, & t_k \geq M. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что во всяком случае $\varphi_k(U) \geq 0$. Действительно, если, например, $\varphi_k(t) = t - t_k$ ($t_k \leq m$), то $\varphi_k(U) = U - t_k I$ и

$$(\varphi_k(U)x, x) = (Ux, x) - t_k(x, x) \geq (m - t_k)(x, x) \geq 0.$$

В силу III

$$\varphi(U) = \varphi_1(U)\varphi_2(U) \dots \varphi_s(U).$$

Но операторы $\varphi_k(U)$ перестановочны между собой (свойство IV), а тогда применимо следствие к теореме V.6.2, на основании которого произведение $\varphi(U)$ также является положительным оператором.

Отметим еще два свойства операторных полиномов, вытекающие из указанных выше.

VI. Если $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ в промежутке $[m, M]$, то $\varphi_1(U) \leq \varphi_2(U)$.

VII. $\|\varphi(U)\| \leq \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|$.

Действительно,

$$\|\varphi(U)\|^2 =$$

$$= \sup_{\|x\|=1} (\varphi(U)x, \varphi(U)x) = \sup (\varphi(U)\varphi(U)x, x) = \sup_{\|x\|=1} (\psi(U)x, x),$$

где обозначено $\psi(t) = |\varphi(t)|^2$. Если $l = \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|$, то

$$0 \leq \psi(t) \leq l^2, \quad t \in [m, M],$$

и потому

$$0 \leq \psi(U) \leq l^2 I.$$

Следовательно,

$$\sup_{\|x\|=1} (\psi(U)x, x) \leq l^2.$$

5.2. Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная в промежутке $[m, M]$ функция. Существует последовательность полиномов $\{\varphi_n(t)\}$, равномерно сходящаяся к $\varphi(t)$ в $[m, M]$. Нетрудно видеть, что последовательность операторов $\{\varphi_n(U)\}$ будет сходиться к некоторому оператору. В самом деле,

$$\|\varphi_{n+p}(U) - \varphi_n(U)\| \leq \max_{t \in [m, M]} |\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Если имеется другая последовательность полиномов, также равномерно сходящаяся к $\varphi(t)$ (в $[m, M]$), то последовательность соответствующих операторных полиномов будет сходиться к тому же предельному оператору, что и первоначальная последовательность. В этом можно убедиться, объединяя обе последовательности в одну. Высказанные соображения дают основания для обозначения

$$\varphi(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(U).$$

Оператор $\varphi(U)$ будем называть *операторной функцией*.

Свойства операторных функций сформулированы в следующей теореме.

Теорема 1. а) $[\varphi(U)]^* = \overline{\varphi}(U)$. В частности, если функция $\varphi(t)$ вещественна при $t \in [m, M]$, то $\varphi(U)$ — самосопряженный оператор.

б) Если $\varphi(t) = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$, то $\varphi(U) = \alpha\varphi_1(U) + \beta\varphi_2(U)$.

в) Если $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$, то $\varphi(U) = \varphi_1(U)\varphi_2(U)$.

г) Оператор $\varphi(U)$ перестановочен с любым оператором, перестановочным с U .

е) Если $\varphi(t) \geq \psi(t)$ ($t \in [m, M]$), то $\varphi(U) \geq \psi(U)$.

ф) $\|\varphi(U)\| \leq \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|^*$.

г) Если последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ непрерывных функций равномерно сходится в промежутке $[m, M]$ к функции $\varphi(t)$, то $\|\varphi_n(U) - \varphi(U)\| \rightarrow 0$.

h) Если P — проектор, перестановочный с U , то

$$P\varphi(U) = P\varphi(PU).$$

*) Ниже (в 5.3) будет установлено точное выражение для $\|\varphi(U)\|$.

Доказательство. Справедливость утверждений а)–g) без труда устанавливается с помощью свойств операторных полиномов.

Что касается пункта h), то, если $\varphi(t)$ — полином, доказываемое соотношение легко проверяется, если учесть, что $P^2 = P$ и, следовательно, $P^k = P$ ($k = 1, 2, \dots$). В случае, когда $\varphi(t)$ — произвольная непрерывная функция, надо использовать предельный переход.

5.3. Для того чтобы однозначно определить оператор $\varphi(U)$, нет необходимости знать значения функции $\varphi(t)$ на всем промежутке $[m, M]$. Оказывается, достаточно задать $\varphi(t)$ лишь на некотором замкнутом множестве $S_U \subset [m, M]$, называемом спектром оператора U .

Будем говорить, что число λ является точкой спектра самосопряженного оператора U , если существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что

$$\|x_n\| = 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad Ux_n - \lambda x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (1)$$

Иначе говоря, λ есть точка спектра, если

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\| = 0. \quad (2)$$

Совокупность всех точек спектра называется *спектром* оператора U *) и обозначается S_U .

Ясно, что каждое собственное значение входит в спектр, который, однако, может содержать точки, не являющиеся собственными значениями. Так, в случае, когда оператор U компактен, а пространство H бесконечномерно, $\lambda = 0$ будет точкой спектра, хотя, как легко видеть, не всегда есть собственное значение.

Пусть λ — точка спектра. Из (1) получаем

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ux_n, x_n).$$

Отсюда вытекает, что спектр оператора U расположен на вещественной прямой и заключен в промежутке $[m, M]$. Покажем, что границы оператора U являются точками спектра.

Будем считать, что $0 \leq m \leq M$ **, и рассмотрим точку $\lambda = M$. Учитывая, что $\|U\| = \lambda$, будем иметь для $\|x\| = 1$

$$\|Ux - \lambda x\|^2 = \|Ux\|^2 - 2\lambda(Ux, x) + \lambda^2 \leq 2\lambda[\lambda - (Ux, x)],$$

*) Это определение формально имеет смысл и в случае, когда U — произвольный линейный оператор в произвольном нормированном пространстве. Однако для общего случая будет дано иное определение спектра, эквивалентное данному лишь в случае, если U — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве.

**) Выполнения этого условия всегда можно добиться, прибавив к оператору U оператор вида μI ; при этом спектр и границы оператора U переместятся по вещественной оси на μ вправо.

откуда

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\|^2 \leq 2\lambda \left[\lambda - \sup_{\|x\|=1} (Ux, x) \right] = 0,$$

а это вследствие (2) означает, что $\lambda \in S_U$.

Можно доказать, что S_U — замкнутое множество. В самом деле, если $\lambda_0 \notin S_U$, то из (2)

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda_0 x\| = d > 0.$$

Тогда, если $|\lambda - \lambda_0| < d/2$, то

$$\begin{aligned} \inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\| &\geq \inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda_0 x\| - \sup_{\|x\|=1} \|\lambda_0 x - \lambda x\| > \\ &> d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0 \end{aligned}$$

и, следовательно, дополнение множества S_U открыто.

Прежде чем формулировать основной результат, докажем два вспомогательных предложения.

Л е м м а 1. Пусть $\varphi(t)$ — вещественный полином. Тогда $S_{\varphi(U)} = \varphi(S_U)$, т. е. спектр оператора $\varphi(U)$ состоит из всех μ , представимых в виде $\mu = \varphi(\lambda)$ ($\lambda \in S_U$).

Доказательство. Пусть μ — некоторое вещественное число и $t_1, t_2, \dots, t_s$ — все корни уравнения

$$\varphi(t) = \mu.$$

Очевидно, оператор $\varphi(U) - \mu I$ допускает представление в виде произведения

$$\varphi(U) - \mu I = c(U - t_1 I)(U - t_2 I) \dots (U - t_s I). \quad (3)$$

Возьмем $\lambda \in S_U$. Найдется последовательность $\{x_n\}$ нормированных элементов такая, что $Ux_n - \lambda x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Положим в разложении (3) $\mu = \varphi(\lambda)$, $t_s = \lambda$. Тогда

$$\varphi(U)x_n - \mu x_n = c(U - t_1 I)(U - t_2 I) \dots (Ux_n - \lambda x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

т. е. $\mu \in S_{\varphi(U)}$.

Наоборот, если ни одно из t_k не принадлежит спектру оператора U , то

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - t_s x\| = \rho_s > 0,$$

$$\inf_{\|x\|=1} \|(U - t_{s-1} I)(Ux - t_s x)\| \geq \inf_{\|y\| \geq \rho_s} \|Uy - t_{s-1} y\| = \rho_{s-1} > 0$$

и, продолжая так дальше, найдем

$$\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(U)x - \mu x\| = \rho_1 > 0.$$

Следовательно, $\mu = \varphi(t_k)$ ($k = 1, 2, \dots, s$) не входит в $S_{\varphi(U)}$.

Лемма 2. Если $\varphi(t)$ — полином, то

$$\|\varphi(U)\| = \max_{t \in S_U} |\varphi(t)|.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \|\varphi(U)\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} (\varphi(U)x, \varphi(U)x) = \\ &= \sup_{\|x\|=1} (\overline{\varphi(U)} \varphi(U)x, x) = \sup_{\|x\|=1} (\psi(U)x, x), \quad (4) \end{aligned}$$

где положено $\psi(t) = |\varphi(t)|^2$.

Таким образом, $\|\varphi(U)\|^2$ есть верхняя граница оператора $\psi(U)$. Но верхняя граница положительного оператора $\psi(U)$ совпадает с точной верхней границей спектра этого оператора:

$$M_{\psi(U)} = \sup S_{\psi(U)}. \quad (5)$$

В соответствии с результатом леммы 1

$$\sup S_{\psi(U)} = \sup \psi(S_U) = \sup_{t \in S_U} \psi(t) = \left[\sup_{t \in S_U} |\varphi(t)| \right]^2.$$

При этом ввиду замкнутости множества S_U supremum можно заменить на maximum. Сопоставляя последнее равенство с соотношениями (4) и (5), получим требуемый результат.

Основная теорема теперь без труда может быть доказана.

Теорема 2. Если $\varphi(t)$ — непрерывная в $[m, M]$ функция, то

$$\|\varphi(U)\| = \max_{t \in S_U} |\varphi(t)|. \quad (6)$$

Действительно, пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — последовательность полиномов, равномерно сходящаяся к $\varphi(t)$. По лемме 2

$$\|\varphi_n(U)\| = \max_{t \in S_U} |\varphi_n(t)| = \|\varphi_n\|_C.$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим (6).

Следствие. Если φ_1 и φ_2 — непрерывные в $[m, M]$ функции, совпадающие на спектре оператора S_U , то $\varphi_1(U) = \varphi_2(U)$.

Пусть $\varphi(t)$ задана и непрерывна на спектре оператора U . Распространив ее с сохранением непрерывности на весь промежуток $[m, M]$, получим непрерывную в $[m, M]$ функцию $\tilde{\varphi}(t)$. По определению полагаем

$$\varphi(U) = \tilde{\varphi}(U).$$

В силу установленного выше оператор $\varphi(U)$ не зависит от способа распространения функции $\varphi(t)$ и определяется только значениями функции φ на S_U . Ясно, что свойства операторных функций, сформулированные в теореме 1, переносятся на функции, только что определенные (в формулировке теоремы 1 следует всюду заменить промежуток $[m, M]$ множеством S_U).

Расширение понятия операторной функции позволяет доказать важную теорему, характеризующую спектр самосопряженного оператора.

Будем говорить, что комплексное число λ есть *регулярное значение* оператора U , если оно не принадлежит спектру этого оператора.

Теорема 3. *Для того чтобы λ было регулярным значением оператора U , необходимо и достаточно, чтобы в H существовал линейный обратный оператор*

$$R_\lambda = [U - \lambda I]^{-1} *).$$

Доказательство. **Необходимость.** Пусть λ — регулярное значение. Зададим на S_U функцию

$$\rho_\lambda(t) = \frac{1}{t - \lambda}$$

и положим $R_\lambda = \rho_\lambda(U)$. Так как

$$(t - \lambda)\rho_\lambda(t) = 1, \quad t \in S_U,$$

то по теореме 1

$$(U - \lambda I)R_\lambda = R_\lambda(U - \lambda I) = I,$$

откуда

$$R_\lambda = [U - \lambda I]^{-1}.$$

Достаточность. Если существует линейный обратный (хотя бы левый) оператор

$$R_\lambda = [U - \lambda I]^{-1},$$

то при $\|x\| = 1$

$$\|R_\lambda(U - \lambda I)x\| = \|x\| = 1.$$

Следовательно,

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\| \geq \frac{1}{\|R_\lambda\|} > 0.$$

Доказанная теорема позволяет распространить результат леммы 1 на произвольные вещественные непрерывные функции.

Теорема 4. *Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная на S_U вещественная функция. Тогда*

$$S_{\varphi(U)} = \varphi(S_U).$$

Доказательство. Пусть $\mu \notin \varphi(S_U)$. Функция

$$\psi(t) = \frac{1}{\varphi(t) - \mu}, \quad t \in S_U,$$

непрерывна на S_U , поэтому имеет смысл оператор $\psi(U)$. Очевидно,

$$\psi(U) = [\varphi(U) - \mu I]^{-1}.$$

Следовательно, по теореме 3 $\mu \notin S_{\varphi(U)}$.

*) Именно эта теорема служит основанием для определения спектра в общем случае произвольного линейного оператора в произвольном нормированном пространстве (см. гл. XIII).

Предположим теперь, что $\mu = \varphi(\lambda)$, где $\lambda \in S_U$. Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — последовательность полиномов, равномерно сходящаяся на S_U к $\varphi(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi(U)x - \mu x\| &\leq \\ &\leq \|\varphi_n(U)x - \varphi_n(\lambda)x\| + \|\varphi(U) - \varphi_n(U)\|\|x\| + |\mu - \varphi_n(\lambda)|\|x\|. \end{aligned}$$

А так как в силу леммы 1

$$\inf_{\|x\|=1} \|\varphi_n(U)x - \varphi_n(\lambda)x\| = 0,$$

то

$$\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(U)x - \mu x\| \leq \|\varphi(U) - \varphi_n(U)\| + |\mu - \varphi_n(\lambda)|.$$

Устремляя здесь $n \rightarrow \infty$, найдем

$$\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(U)x - \mu x\| = 0,$$

т. е. $\mu \in S_{\varphi(U)}$.

5.4. С каждым самосопряженным оператором U можно связать семейство проекторов, которое позволяет построить представление как самого оператора U , так и операторных функций в форме интеграла типа интеграла Стильтjesа.

Пусть U — самосопряженный оператор. Рассмотрим функцию

$$\varphi_\lambda^+(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \lambda, \\ t - \lambda, & t > \lambda, \end{cases}$$

и введем обозначение

$$U_\lambda^+ = \varphi_\lambda^+(U).$$

Пусть далее H_λ^+ означает множество всех элементов x , для которых $U_\lambda^+ x = 0$, т. е., иначе говоря, H_λ^+ есть собственное подпространство оператора U_λ^+ , отвечающее нулевому собственному значению. Обозначим, наконец, проектор, проектирующий на подпространство H_λ^+ , через I_λ .

Свойства проекторов I_λ , как показывает приведенная ниже теорема, тесно связаны со спектром оператора U , вследствие чего семейство проекторов I_λ называется *спектральной функцией оператора U* .

Теорема 5. а) Если $\lambda < m$, то $I_\lambda = 0$; если $\lambda > M$, то $I_\lambda = I$.

б) Если $\lambda \leq \mu$, то $I_\lambda \leq I_\mu$.

в) Спектральная функция как функция от λ непрерывна справа в том смысле, что $I_\lambda = I_{\lambda+0} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} I_\mu$ на H .

г) Проектор I_λ ($-\infty < \lambda < \infty$) перестановочен с каждым оператором, перестановочным с U .

д) Каждое вещественное регулярное значение λ оператора U есть точка постоянства спектральной функции, т. е. существует

$\delta > 0$ такое, что $I_{\lambda-\delta} = I_{\lambda+\delta}$. И наоборот, точки постоянства спектральной функции суть регулярные значения оператора U .

г) Вещественное λ тогда и только тогда является собственным значением оператора U , когда $I_\lambda = I_{\lambda+0} \neq I_{\lambda-0}$, где $I_{\lambda-0} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda-0} I_\mu$ на H . При этом оператор $P_\lambda = I_\lambda - I_{\lambda-0}$ является проектором на собственное подпространство, соответствующее собственному значению λ .

г) Если $\varphi(t) \geq 0$ в промежутке $[\lambda, \mu]$, то $[I_\mu - I_\lambda]\varphi(U) \geq 0^*$.

Доказательство. а) Если $\lambda < m$, то $U_\lambda^+ = U - \lambda I$. Поэтому для $x \neq 0$

$$(U_\lambda^+ x, x) = (Ux, x) - \lambda(x, x) \geq (m - \lambda)(x, x) > 0,$$

так что H_λ^+ состоит только из нулевого элемента.

В случае $\lambda > M$ имеем $U_\lambda^+ = 0$ и $H_\lambda^+ = H$.

б) Если $\lambda \leq \mu$, то $\varphi_\mu^+(t) \geq \varphi_\lambda^+(t)$ и, следовательно, $U_\lambda^+ \geq U_\mu^+$ по теореме 1. Кроме того, $U_\mu^+ \geq 0$. Поэтому

$$0 \leq (U_\mu^+ x, x) \leq (U_\lambda^+ x, x), \quad x \in H.$$

Если $x \in H_\lambda^+$, то $U_\lambda^+ x = 0$ и, следовательно,

$$(U_\mu^+ x, x) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $U_\mu^+ x = 0^{**}$, т. е. $x \in H_\mu^+$. Таким образом, $H_\lambda^+ \subset H_\mu^+$, что соответствует требуемому соотношению между проекторами: $I_\lambda \leq I_\mu$ (V.6.7, лемма).

в) Поскольку I_λ убывает с убыванием λ , то по теореме V.6.7 $I_{\lambda+0} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} I_\mu$ на H существует и представляет собой проектор.

Обозначим через $H_{\lambda+0}^+$ соответствующее ему подпространство. Так как $I_\lambda \leq I_{\lambda+0}$, то $H_\lambda^+ \subset H_{\lambda+0}^+$. Пусть $x \in H_{\lambda+0}^+$. Поскольку, очевидно, $x \in H_\mu^+$ ($\mu > \lambda$), то $I_\mu x = x$. Следовательно, $U_\mu^+ x = 0$, но

$$\|U_\mu^+ - U_\lambda^+\| = \max_{t \in S_U} |\varphi_\mu^+(t) - \varphi_\lambda^+(t)| \leq \mu - \lambda,$$

так что

$$U_\lambda^+ x = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} U_\mu^+ x = 0,$$

откуда $x \in H_\lambda^+$. Таким образом, $H_{\lambda+0}^+ \subset H_\lambda^+$, что вместе с предыдущим даст равенство $H_{\lambda+0}^+ = H_\lambda^+$ или, иначе, $I_{\lambda+0} = I_\lambda$.

*) Очевидно, достаточно требовать выполнения неравенства $\varphi(t) \geq 0$ лишь в точках спектра, входящих в промежуток $[\lambda, \mu]$.

**) Если для положительного оператора V и некоторого $x \in H$ имеет место $(Vx, x) = 0$, то $Vx = 0$. В самом деле, $0 = (Vx, x) = ([\sqrt{V}]^2 x, x) = (\sqrt{V}x, \sqrt{V}x)$, т. е. $\sqrt{V}x = 0$, а тогда и $Vx = \sqrt{V}(\sqrt{V}x) = 0$.

d) Пусть V — оператор, перестановочный с U . По теореме 1 оператор V перестановочен и с U_{λ}^{+} . Используя это, будем иметь для $x \in H_{\lambda}^{+}$

$$U_{\lambda}^{+}Vx = VU_{\lambda}^{+}x = 0,$$

т. е. $Vx \in H_{\lambda}^{+}$. Если x — произвольный элемент из H , то по доказанному $VI_{\lambda}x \in H_{\lambda}^{+}$; следовательно,

$$VI_{\lambda} = I_{\lambda}VI_{\lambda}. \quad (7)$$

Оператор V^{*} также перестановочен с U , поэтому в (7) можно заменить V на V^{*} :

$$V^{*}I_{\lambda} = I_{\lambda}V^{*}I_{\lambda}.$$

Переходя в обеих частях последнего равенства к сопряженным операторам, будем иметь

$$I_{\lambda}V = I_{\lambda}VI_{\lambda}.$$

Сравнивая это с (7), получим

$$I_{\lambda}V = VI_{\lambda}.$$

e) Введем оператор

$$U_{\lambda}^{-} = \Phi_{\lambda}^{-}(U),$$

где

$$\Phi_{\lambda}^{-}(t) = \begin{cases} t - \lambda, & t \leq \lambda, \\ 0, & t > \lambda, \end{cases}$$

и докажем справедливость соотношения

$$U_{\lambda}^{-} = I_{\lambda}(U - \lambda I). \quad (8)$$

Действительно, так как

$$U - \lambda I = U_{\lambda}^{+} + U_{\lambda}^{-}, \quad (9)$$

то для $x \in H_{\lambda}^{+}$

$$Ux - \lambda x = U_{\lambda}^{-}x.$$

Если же x — произвольный элемент из H , то можно написать

$$I_{\lambda}(Ux - \lambda x) = (U - \lambda I)I_{\lambda}x = U_{\lambda}^{-}I_{\lambda}x = I_{\lambda}U_{\lambda}^{-}x. \quad (10)$$

Но так как $U_{\lambda}^{+}U_{\lambda}^{-} = 0$, т. е. $U_{\lambda}^{+}(U_{\lambda}^{-}x) = 0$, то $U_{\lambda}^{-}x \in H_{\lambda}^{+}$, следовательно, $I_{\lambda}U_{\lambda}^{-}x = U_{\lambda}^{-}x$, что и приводит к формуле (8).

Предположим теперь, что λ_0 есть точка постоянства спектральной функции, т. е. существует промежуток (λ, μ) , содержащий λ_0 , такой, что $I_{\lambda} = I_{\mu}$. Рассмотрим оператор

$$P = \frac{U_{\lambda}^{-} - U_{\mu}^{-}}{\mu - \lambda}.$$

Используя формулу (8), будем иметь

$$P = \frac{I_{\lambda}(U - \lambda I) - I_{\mu}(U - \mu I)}{\mu - \lambda} = I_{\lambda},$$

т. е. P — проектор. Вместе с тем

$$P = \sigma(U),$$

где $\sigma(t)$ — функция, равная единице для $t \leq \lambda$, нулю для $t \geq \mu$ и линейная в промежутке $[\lambda, \mu]$.

Допустим, что в промежутке (λ, μ) имеются точки спектра оператора U ; пусть например, $\tilde{\lambda}$ — одна из таких точек. Тогда

$$Q = P - P^2 = 0.$$

Между тем, согласно теореме 2,

$$\|Q\| = \max_{t \in S_U} |\sigma(t) - \sigma^2(t)| \geq \sigma(\tilde{\lambda}) - \sigma^2(\tilde{\lambda}) > 0.$$

Таким образом, λ_0 как точка промежутка (λ, μ) представляет собой регулярное значение.

Предположим теперь, что λ — точка роста спектральной функции. Это означает, что при любом $\delta > 0$

$$I_{\lambda+\delta} - I_{\lambda-\delta} \neq 0.$$

Рассмотрим $x \in H_{\lambda+\delta}^+ \ominus H_{\lambda-\delta}^-$. Поскольку $x \in H_{\lambda+\delta}^+$, то $U_{\lambda+\delta}^+ x = 0$. Но так как

$$\|U_{\lambda+\delta}^+ - U_{\lambda}^+\| \leq \delta,$$

то

$$\|U_{\lambda}^+ x\| \leq \delta \|x\|.$$

Далее, $x \perp H_{\lambda-\delta}^+$, т. е. $I_{\lambda-\delta} x = 0$. Следовательно,

$$I_{\lambda-\delta} U_{\lambda-\delta}^- x = U_{\lambda-\delta}^- I_{\lambda-\delta} x = 0,$$

откуда получаем $U_{\lambda-\delta}^- x \perp H_{\lambda-\delta}^+$. Но, как уже отмечалось выше, всегда $U_{\lambda-\delta}^- x \in H_{\lambda-\delta}^+$. Таким образом, для рассматриваемого случая $U_{\lambda-\delta}^- x = 0$. Аналогично предыдущему имеем

$$\|U_{\lambda-\delta}^- - U_{\lambda}^-\| \leq \delta,$$

откуда

$$\|U_{\lambda}^- x\| \leq \delta \|x\|.$$

Ввиду (9) получаем

$$\|Ux - \lambda x\| \leq \|U_{\lambda}^+ x\| + \|U_{\lambda}^- x\| \leq 2\delta \|x\|. \quad (14)$$

Беря последовательность $\delta_n \rightarrow 0$ и соответствующую последовательность нормированных элементов $x_n \in H_{\lambda+\delta_n}^+ \ominus H_{\lambda-\delta_n}^-$, найдем

$$\|Ux_n - \lambda x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

а это означает, что λ принадлежит спектру оператора U .

f) Отметим прежде всего, что вследствие монотонности спектральной функции существует

$$I_{\lambda-0} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda-0} I_\mu \quad \text{на } H,$$

причем $I_{\lambda-0}$ является проектором. Очевидно, также $I_{\lambda-0} \leq I_\lambda$.

Предположим теперь, что в точке λ

$$I_{\lambda-0} \neq I_{\lambda+0} = I_\lambda.$$

Обозначая через $H_{\lambda-0}^+$ подпространство, соответствующее проектору $I_{\lambda-0}$, возьмем $x \in H_\lambda^+ \ominus H_{\lambda-0}^+$. Очевидно, $x \in H_{\lambda+\delta}^+ \ominus H_{\lambda-\delta}^+$ при любом $\delta > 0$. Поскольку неравенство (11) выполняется при любом $\delta > 0$, а левая его часть от δ не зависит, то

$$\|Ux - \lambda x\| = 0,$$

т. е. λ является собственным значением оператора U , а x есть соответствующий собственный элемент. Если обозначить, как обычно, через H_λ собственное подпространство и через P_λ проектор на H_λ , то из доказанного вытекает, что

$$H_\lambda \supset H_\lambda^+ \ominus H_{\lambda-0}^+, \quad P_\lambda \geq I_\lambda - I_{\lambda-0}.$$

Рассмотрим, далее, проектор

$$I'_\mu = P_\lambda - I_\mu P_\lambda, \quad -\infty < \mu < \infty,$$

и докажем, что $I'_\mu x = 0$ равносильно равенству $P_\lambda U_\mu^+ x = 0$. В самом деле, если $I'_\mu x = 0$, то $P_\lambda x = I_\mu P_\lambda x$, откуда $P_\lambda U_\mu^+ x = U_\mu^+ P_\lambda x = 0$. Если, наоборот, $P_\lambda U_\mu^+ x = 0$, то $P_\lambda x \in H_\mu^+$ и $I_\mu P_\lambda x = P_\lambda x$, т. е. $I'_\mu x = 0$.

Пользуясь пунктом h) теоремы 1, будем иметь

$$P_\lambda U_\mu^+ = P_\lambda \Phi_\lambda^+ (P_\lambda U).$$

Но

$$P_\lambda U = \lambda P_\lambda,$$

так что непосредственно из определения операторной функции получаем

$$P_\lambda U_\mu^+ = \begin{cases} (\lambda - \mu) P_\lambda, & \mu < \lambda, \\ 0, & \mu \geq \lambda. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $\mu < \lambda$ равенство $I'_\mu x = 0$ равносильно тому, что $P_\lambda x = 0$, т. е. при $\mu < \lambda$ будет $I'_\mu = P_\lambda$. Если же $\mu \geq \lambda$,

то $I'_\mu = 0$. Таким образом,

$$I_\mu P_\lambda = \begin{cases} 0, & \mu < \lambda, \\ P_\lambda, & \mu \geq \lambda. \end{cases}$$

Но

$$I_\mu = I_\mu P_\lambda + I_\mu (I - P_\lambda).$$

Следовательно,

$$I_{\lambda-0} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda-0} I_\mu = I_{\lambda-0} (I - P_\lambda).$$

Вычитая это из равенства

$$I_\lambda = I_\lambda P_\lambda + I_\lambda (I - P_\lambda) = P_\lambda + I_\lambda (I - P_\lambda),$$

получим

$$I_\lambda - I_{\lambda-0} = P_\lambda + (I_\lambda - I_{\lambda-0})(I - P_\lambda) \geq P_\lambda.$$

Так как $P_\lambda \neq 0$, то тем более $I_\lambda - I_{\lambda-0} \neq 0$, т. е. спектральная функция имеет скачок в точке λ . Кроме того, учитывая полученное ранее соотношение, найдем

$$P_\lambda = I_\lambda - I_{\lambda-0}.$$

г) Предположим сначала, что $\varphi(t) = 0$ в промежутке $[\lambda, \mu]$, и докажем, что $[I_\mu - I_\lambda]\varphi(U) = 0$. С этой целью рассмотрим функцию $\tilde{\varphi}(t)$, совпадающую в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ($\lambda_k \leq \lambda$, $\lambda_r = \lambda$) и $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ ($\mu_k \geq \mu$, $\mu_1 = \mu$) с функцией $\varphi(t)$ и линейную в промежутках между этими точками. Ясно, что

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^r \alpha_k \varphi_{\lambda_k}^-(t) + \sum_{k=1}^s \beta_k \varphi_{\mu_k}^+(t)$$

и, следовательно,

$$\tilde{\varphi}(U) = \sum_{k=1}^r \alpha_k U_{\lambda_k}^- + \sum_{k=1}^s \beta_k U_{\mu_k}^+.$$

Проверим, что

$$[I_\mu - I_\lambda]\tilde{\varphi}(U) = 0. \quad (12)$$

В сумме

$$[I_\mu - I_\lambda]\tilde{\varphi}(U) = \sum_{k=1}^r \alpha_k [I_\mu - I_\lambda] U_{\lambda_k}^- + \sum_{k=1}^s \beta_k [I_\mu - I_\lambda] U_{\mu_k}^+.$$

рассмотрим по отдельности каждое слагаемое. Используя формулу (8), получим

$$[I_\mu - I_\lambda] U_{\lambda_k}^- = [I_\mu - I_\lambda] I_{\lambda_k} (U - \lambda_k I) = [I_\mu I_{\lambda_k} - I_\lambda I_{\lambda_k}] (U - \lambda_k I).$$

Но $I_{\lambda_k} \leq I_\lambda \leq I_\mu$, поэтому $I_\mu I_{\lambda_k} - I_\lambda I_{\lambda_k} = I_{\lambda_k}$, откуда следует, что $[I_\mu - I_\lambda] U_{\lambda_k}^- = 0$. Далее $[I_\mu - I_\lambda] U_{\mu_k}^+ = I_\mu [I - I_\lambda] U_{\mu_k}^+ = [I - I_\lambda] U_{\mu_k}^+ I_\mu = 0$. Итак, (12) доказано.

Функция $\varphi(t)$ может быть представлена как предел равномерно сходящейся на промежутке $[m, M]$ последовательности кусочно-линейных функций рассмотренного вида. Поскольку соотношение вида (12) выполнено для каждой функции последовательности, то переход к пределу, возможный на основании пункта г) теоремы 1, приводит к требуемому соотношению $[I_\mu - I_\lambda]\varphi(U) = 0$.

Будем теперь считать, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы, т. е. что $\varphi(t) \geq 0$ для $t \in [\lambda, \mu]$. Рассмотрим наряду с функцией $\varphi(t)$ функцию $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(\lambda), & t < \lambda, \\ \varphi(t), & \lambda \leq t \leq \mu, \\ \varphi(\mu), & t > \mu. \end{cases}$$

Поскольку $\psi(t) \geq 0$ для всех t , то $\psi(U) \geq 0$ и поэтому тем более $[I_\mu - I_\lambda]\psi(U) \geq 0$. Но в промежутке $[\lambda, \mu]$ функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ совпадают, следовательно, по доказанному выше

$$[I_\mu - I_\lambda][\varphi(U) - \psi(U)] = 0,$$

откуда получаем

$$[I_\mu - I_\lambda]\varphi(U) = [I_\mu - I_\lambda]\psi(U) \geq 0.$$

Доказательство теоремы закончено.

5.5. Перейдем теперь к интегральному представлению операторных функций. Пусть $\varphi(t)$ — вещественная непрерывная ограниченная функция, заданная на $(-\infty, +\infty)^*$. Рассмотрим разбиение числовой прямой точками $-\infty = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} = \infty$ ($\lambda_1 < m$, $\lambda_n > M$) и образуем суммы

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} l_k [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}], \quad S = \sum_{k=1}^{n-1} L_k [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}], \quad (13)$$

где

$$l_k = \inf_{t \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]} \varphi(t), \quad L_k = \sup_{t \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]} \varphi(t).$$

Поскольку в промежутке $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $l_k \leq \varphi(t) \leq L_k$, то по пункту г) теоремы 5

$$l_k [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}] \leq [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}] \varphi(U) \leq L_k [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}].$$

Складывая все эти соотношения, получим

$$s \leq \varphi(U) \leq S. \quad (14)$$

Но, с другой стороны,

$$S - s = \sum_{k=1}^{n-1} (L_k - l_k) [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}] \leq \delta I,$$

*) Можно считать, что $\varphi(t)$ первоначально задана на спектре оператора U , а затем распространена на всю числовую прямую с сохранением указанных свойств.

где через δ обозначен $\max_{k=1,2,\dots,n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)$. Поэтому, если $\delta \rightarrow 0$, то $\|S - s\| \rightarrow 0$. А вследствие того, что $0 \leq S - \varphi(U) \leq S - s$, будем иметь $S \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \varphi(U)$ и, аналогично, $s \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \varphi(U)$.

Образую теперь «интегральную» сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\xi_k) [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}], \quad \lambda_k \leq \xi_k \leq \lambda_{k+1}. \quad (15)$$

Без труда проверяем, что

$$s \leq \sigma \leq S$$

и, следовательно,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\delta \rightarrow 0} S = \varphi(U).$$

Но $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma$ можно рассматривать как интеграл:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dI_t. \quad (16)$$

Таким образом, получаем формулу

$$\varphi(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dI_t. \quad (17)$$

В частности, если $\varphi(t) = t$, формула (17) дает *интегральное представление* оператора U .

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} t dI_t. \quad (18)$$

Свойства операторных функций, приведенные в теореме 1 и в 5.3, могут быть сформулированы в терминах операторного интеграла (16). Укажем еще на формулу, связывающую понятие операторной функции с обычным интегралом Стильтеса:

$$(\varphi(U)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d(I_t x, y),$$

и вытекающее отсюда соотношение

$$\|\varphi(U)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^2 d(I_t x, x).$$

Несложный вывод этого предоставляем читателю.

Интеграл вида (16) можно рассматривать и по промежутку $[\lambda, \mu]$. Нетрудно проверить, что

$$\int_{\lambda}^{\mu} \varphi(t) dI_t = [I_{\mu} - I_{\lambda}] \varphi(U).$$

В частности, если $\lambda < m$, $\mu \geq M$, то

$$\int_{\lambda}^{\mu} \varphi(t) dI_t = \varphi(U).$$

5.6. Для построения интеграла типа (16) нет необходимости предполагать, что семейство проекторов I_{λ} является спектральной функцией самосопряженного оператора. Достаточно, если семейство проекторов удовлетворяет условиям, сформулированным в пунктах а) и б) теоремы 5.

Пусть $\{E_{\lambda}\}$ — семейство проекторов, зависящих от вещественного параметра и удовлетворяющих условиям:

1) $E_{\lambda} \leq E_{\mu}$, если $\lambda \leq \mu$;

2) существуют числа m и M такие, что $E_{\lambda} = 0$ для $\lambda < m$ и $E_{\lambda} = I$ для $\lambda > M$.

Семейство $\{E_{\lambda}\}$ мы будем называть в этом случае *разложением единицы*.

При сделанных предположениях комплексная функция $(E_t x, y)$ вещественного аргумента будет функцией ограниченной вариации, каковы бы ни были элементы $x, y \in H$. Это непосредственно вытекает из формулы

$$\begin{aligned} (E_t x, y) = & \frac{1}{4} \{[(E_t(x+y), x+y) - (E_t(x-y), x-y)] + \\ & + i[(E_t(x+yi), x+yi) - (E_t(x-yi), x-yi)]\}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\varphi(t)$ — непрерывная ограниченная функция, то имеет смысл интеграл

$$J(\varphi; x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) d(E_t x, y), \quad x, y \in H.$$

Нетрудно видеть, что функционал $J(\varphi; x, y)$ аддитивен и однороден по x и по y (*). Кроме того, поскольку

$$\begin{aligned} |J(\varphi; x, y)| & \leq \sup |\varphi(t)| \bigvee_{-\infty}^{+\infty} |(E_t x, y)| \leq \\ & \leq \sup |\varphi(t)| \cdot \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+yi\|^2 + \|x-yi\|^2] = \\ & = \sup |\varphi(t)| [\|x\|^2 + \|y\|^2], \quad (19) \end{aligned}$$

то функционал $J(\varphi; x, y)$ непрерывен по x, y .

Фиксируя x , рассмотрим линейный функционал от y :

$$f_x(y) = \overline{J(\varphi; x, y)}.$$

Учитывая общую форму линейного функционала в гильбертовом

*) По y однородность «второго рода»: $J(\varphi; x, \alpha y) = \overline{\alpha} J(\varphi; x, y)$.

пространстве, будем иметь

$$f_x(y) = (y, \tilde{x}),$$

где элемент $\tilde{x} \in H$ определяется лишь функционалом f_x , т. е. в конечном счете элементом x . Полагая $\tilde{x} = J(\varphi)x$, можем записать

$$J(\varphi; x, y) = (J(\varphi)x, y).$$

Ясно, что оператор $J(\varphi)$ аддитивен и однороден. Далее, с помощью (19) получаем

$$\begin{aligned} \|J(\varphi)x\| &= \left(J(\varphi)x, \frac{J(\varphi)x}{\|J(\varphi)x\|} \right) \leq \\ &\leq \sup_{\|y\|=1} (J(\varphi)x, y) \leq \sup |\varphi(t)| [\|x\|^2 + 1], \end{aligned}$$

откуда вытекает ограниченность оператора $J(\varphi)$.

Таким же точно образом можно определить интеграл по любому промежутку $[\lambda, \mu]$.

Докажем теперь, что оператор $J(\varphi)$ является пределом интегральных сумм вида (15):

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\xi_k) [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}], \quad \lambda_1 < m, \quad \lambda_n > M.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (J(\varphi)x, y) - (\sigma x, y) &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \varphi(t) d(E_t x, y) - \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \varphi(\xi_k) d(E_t x, y) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} [\varphi(t) - \varphi(\xi_k)] d(E_t x, y). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|J(\varphi) - \sigma\| &= \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |(J(\varphi)x, y) - (\sigma x, y)| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} [\varphi(t) - \varphi(\xi_k)] d(E_t x, y) \right|. \end{aligned}$$

Обозначая через ω наибольшее колебание функции $\varphi(t)$ в промежутках $[\lambda_1, \lambda_2]$, $[\lambda_2, \lambda_3]$, ..., $[\lambda_{n-1}, \lambda_n]$, можем продолжить оценку

$$\|J(\varphi) - \sigma\| \leq \omega \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \sum_{k=1}^{n-1} \bigvee_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} [(E_t x, y)] \leq \omega \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \bigvee_{-\infty}^{+\infty} [(E_t x, y)] \leq 2\omega.$$

Если $\delta = \max_{k=1,2,\dots,n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \rightarrow 0$, то $\omega \rightarrow 0$ и, следовательно,

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma = J(\varphi)$. Установленное обстоятельство дает основание для

$$\text{обозначения } J(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dE_t.$$

Пользуясь доказанным, укажем некоторые свойства оператора.

I. $[J(\varphi)]^* = J(\bar{\varphi})$.

II. Если $\varphi(t) = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$, то $J(\varphi) = \alpha J(\varphi_1) + \beta J(\varphi_2)$.

III. Если $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$, то

$$J(\varphi) = J(\varphi_1)J(\varphi_2) = J(\varphi_2)J(\varphi_1). \quad (20)$$

Остановимся на доказательстве последнего свойства. Для некоторого разбиения образуем интегральные суммы

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\xi_k) [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}],$$

$$\sigma' = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_1(\xi_k) [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}], \quad \sigma'' = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_2(\xi_k) [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}].$$

Так как при $j < k$ будет $\lambda_j < \lambda_{j+1} \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1}$, то

$$\begin{aligned} [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}] [E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}] &= \\ &= E_{\lambda_{k+1}} E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_{k+1}} E_{\lambda_j} - E_{\lambda_k} E_{\lambda_{j+1}} + E_{\lambda_k} E_{\lambda_j} = \\ &= E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j+1}} + E_{\lambda_j} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому в произведении

$$\sigma' \sigma'' = \sum_{j,k=1}^{n-1} \varphi_1(\xi_j) \varphi_2(\xi_k) [E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}] [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}]$$

могут быть отличными от нуля лишь слагаемые с $j = k$. Следовательно,

$$\sigma' \sigma'' = \sigma.$$

Переходя к пределу, получаем (20).

IV. Имее место оценка

$$\|J(\varphi)\| \leq \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|. \quad (21)$$

Действительно,

$$\|J(\varphi)x\|^2 = (J(\varphi)x, J(\varphi)x) = (J(|\varphi|^2)x, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^2 d(E_t x, x).$$

Так как

$$(E_t x, x) = \begin{cases} 0, & t < m, \\ \|x\|^2, & t > M, \end{cases}$$

то

$$\|J(\varphi)x\|^2 = \int_{m-\varepsilon}^{M+\varepsilon} |\varphi(t)|^2 d(E_t x, x) \leq \max_{t \in [m-\varepsilon, M+\varepsilon]} |\varphi(t)|^2 \|x\|^2.$$

Поскольку это неравенство справедливо при любом $\varepsilon > 0$, то в пределе (учитывая непрерывность функции $\varphi(t)$) получим

$$\|J(\varphi)x\|^2 \leq \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|^2 \|x\|^2,$$

что равносильно (21).

V. Если последовательность непрерывных функций $\{\varphi_n\}$ равномерно сходится в промежутке $[m, M]$ к функции φ , то $J(\varphi_n) \rightarrow J(\varphi)$.

Свойства операторных интегралов $J(\varphi)$ совпадают со свойствами операторных функций. Причины этого обстоятельства становятся ясными из следующей теоремы.

Теорема 6. Пусть $\{E_\lambda\}$ — разложение единицы, непрерывное справа как функция параметра λ . Тогда $\{E_\lambda\}$ есть спектральная функция оператора

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t;$$

при этом

$$J(\varphi) = \varphi(U). \quad (22)$$

Доказательство. Справедливость равенства (22) без труда проверяется с помощью свойств II, III и V. В частности,

$$U_\lambda^+ = \varphi_\lambda^+(U) = J(\varphi_\lambda^+),$$

откуда

$$(U_\lambda^+ x, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\lambda^+(t) d(E_t x, x) = \int_{\lambda}^{\infty} (t - \lambda) d(E_t x, x). \quad (23)$$

Если $I_\lambda x = x$, т. е. если $U_\lambda^+ x = 0$, то

$$\int_{\lambda}^{\infty} (t - \lambda) d(E_t x, x) = 0,$$

что может быть лишь в случае, когда

$$(E_t x, x) = \text{const}, \quad t > \lambda.$$

Отсюда

$$(E_t x, x) = (E_\infty x, x) = (x, x), \quad t > \lambda,$$

и, следовательно,

$$E_t x = x, \quad t > \lambda.$$

Устремляя здесь $t \rightarrow \lambda + 0$, найдем

$$E_{\lambda}x = E_{\lambda+0}x = x,$$

т. е. $I_{\lambda} \leq E_{\lambda}$.

Наоборот, если $E_{\lambda}x = x$, то тем более $E_t x = x$ для $t > \lambda$. Из равенства (23) получаем тогда

$$(U_{\lambda}^{+}x, x) = 0.$$

Следовательно,

$$U_{\lambda}^{+}x = 0^*),$$

а это означает, что $I_{\lambda}x = x$. Таким образом, $I_{\lambda} \geq E_{\lambda}$, что вместе с предыдущим приводит к равенству $I_{\lambda} = E_{\lambda}$.

З а м е ч а н и е. Если разложение единицы не удовлетворяет требованию непрерывности справа, то можно показать, что

$$I_{\lambda} = E_{\lambda+0}.$$

Действительно, неравенство $I_{\lambda} \leq E_{\lambda+0}$ фактически получено при доказательстве теоремы. Далее, переходя к пределу в неравенстве $I_t \geq E_t$ при $t \rightarrow \lambda + 0$, получим противоположное неравенство

$$I_{\lambda} = I_{\lambda+0} \geq E_{\lambda+0}.$$

Пусть U — самосопряженный компактный оператор и $\{\lambda_k\}$ — совокупность его собственных значений. Обозначая, как и раньше, через H_{λ_k} собственные подпространства и через P_{λ_k} проекторы на эти подпространства, введем операторы

$$E_{\lambda} = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} P_{\lambda_k}, \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (24)$$

Нетрудно проверить, что семейство $\{E_{\lambda}\}$ представляет собой разложение единицы, непрерывное справа. Следовательно, $\{E_{\lambda}\}$ есть спектральная функция оператора

$$\tilde{U} = \int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t.$$

По непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k},$$

т. е., принимая во внимание формулу (3) предыдущего параграфа,

$$\tilde{U} = U.$$

Таким образом, проекторы (24) образуют спектральную функцию оператора U , и интегральное представление оператора U по формуле (18) совпадает с формулой (3) предыдущего параграфа.

*) См. примечание на с. 345.

5.7. Интегральное представление (17) дает путь для дальнейшего расширения понятия операторной функции. Рассмотрим функцию $\varphi(t)$ такого рода, что при любых (x, y) существует (и конечен) интеграл Лебега — Стильеса

$$J(\varphi; x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) d(I_t x, y),$$

где $\{I_\lambda\}$ — спектральная функция оператора U . Как и выше, можно показать, что функционал $J(\varphi; x, y)$ допускает представление в форме

$$J(\varphi; x, y) = (J(\varphi)x, y), \quad x, y \in H,$$

где $J(\varphi)$ — линейный оператор. Принимая во внимание формулу (22), естественно положить

$$\varphi(U) = J(\varphi).$$

К обобщению понятия операторной функции можно подойти и несколько иначе. Исходя из спектральной функции, можно определить операторную меру так же, как по вещественной монотонной функции определяется аддитивная функция множества. Если $\varphi(t)$ — характеристическая функция измеримого относительно операторной меры множества e , то $\varphi(U)$ есть значение операторной меры на e . Ясен смысл $\varphi(U)$ и в случае, когда $\varphi(t)$ — конечнозначная измеримая функция. Функция, измеримая относительно операторной меры, есть предел равномерно сходящейся последовательности конечнозначных измеримых функций, что и дает возможность определить $\varphi(U)$ для произвольной измеримой функции $\varphi(t)$.

Г л а в а X

УПОРЯДОЧЕННЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

При конкретных рассмотрении важных для анализа векторных пространств функций и последовательностей существенную роль играют понятия положительности, неравенства, положительного оператора. Между тем эти понятия и связанные с ними факты не находили отражения в теории нормированных пространств Банаха, которую мы изучали до сих пор, что не позволяло охватить методами функционального анализа некоторые существенные вопросы классического и прикладного анализа. Это в свое время и привело к построению в работах Л. В. Канторовича (см. [2—4а]) теории линейных полуупорядоченных пространств, иначе — векторных решеток, т. е. пространств, наделенных определенным образом согласованными векторной и порядковой структурами (1935—1937). В этих работах была дана аксиоматика векторных решеток, построена теория линейных операторов в них, даны разнообразные приложения построенной теории к вопросам теории функций и функциональным уравнениям.

В дальнейшем эта теория получила плодотворное развитие в работах ленинградской школы полуупорядоченных пространств (Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, А. И. Юдин, Г. П. Акилов и их ученики — А. И. Векслер, Д. А. Владимиров, Г. Я. Роткович). Значительный вклад в развитие важного раздела этой области функционального анализа — теории нормированных решеток — внес Г. Я. Лозановский.

К теории векторных решеток тесно примыкают исследования М. Г. Крейна о нормированных пространствах с введенным в них конусом положительных элементов, начатые во второй половине тридцатых годов и продолженные воронежской школой (М. А. Красносельский и его ученики). Эти исследования связаны в первую очередь со спектральной теорией операторов и решением операторных уравнений (нелинейный анализ). В этой книге мы не рассматриваем эту теорию, а отсылаем читателя к обзорной статье Крейна и Рутмана [1] и монографии Красносельский — П. По поводу связи между теорией векторных решеток и теорией М. Г. Крейна см. монографию Вулих — IV. С теорией векторных решеток связана также теория топологических полуполей (см. Антоновский, Болтянский, Сарымсаков).

На развитие теории векторных решеток оказал влияние доклад Ф. Рисса [4] на Болонском математическом конгрессе в 1929 г. о решетках функционалов. На протяжении 1940-х годов японский математик Х. Накано, продолжая более ранние исследования советских математиков, построил систематическую теорию ряда важных разделов полуупорядоченных пространств, содержащую много новых направлений исследований (см. Накано). В развитии теории векторных решеток сыграли важную роль также другие японские (Т. Огасавара, И. Амеия, Т. Андо, К. Иосида, С. Какуташи, Т. Шимогаки), американские (Г. Биркгоф, С. Бохнер, М. Стоун и др.), голландские (Г. Фрейденталь, В. Люксембург, А. Заанен) и французские (Ж. Дьедонне) математики.

В этой главе мы рассмотрим нормированные решетки, т. е. векторные решетки, являющиеся нормированными пространствами, в которых норма и порядок естественным образом связаны.

Отметим, что уже рассматривавшиеся нами идеальные пространства являются важнейшим классом векторных решеток. Однако, даже имея в виду лишь приложения к ИП, абстрактный подход позволяет получить новые, интересные результаты (см. § 5).

Для изложения содержательных фактов теории нормированных решеток нам потребуется значительное число чисто алгебраических результатов общей теории векторных решеток. Эти результаты мы приведем без доказательств, отсылая читателя к монографии Вулих — I. Изложенные в этой главе результаты по теории нормированных решеток существенно дополняют книгу Вулих — I. Основными монографиями по теории векторных решеток являются книги: Канторович, Вулих, Пинскер; Вулих — I; Накано; Люксембург, Заанен; Фремлих; Шефер — II. Современные вопросы теории нормированных решеток освещены в обзорах: Бухвалов, Векслер, Лозановский [1]; Бухвалов, Векслер, Гейлер [1] и монографии Линденштрауса, Цаффрири (т. 2). Приложения теории векторных решеток к выпуклому анализу приведены в Акилов; Кутателадзе.

Большинство результатов, изложенных в §§ 1—4, хорошо известно и отражено в вышеперечисленных источниках, куда мы и советуем обратиться за приоритетными ссылками.

В связи с развитием теории векторных решеток возникла потребность в пересмотре принятых в Вулих — I терминологий и обозначений. Все сделанные изменения особо оговорены.

§ 1. Векторные решетки

1.1. Вещественное векторное пространство X называется *векторной решеткой* (сокращенно ВР)*), если X является одновре-

*) В монографии Вулих — I ВР называют K -липаслом или липсойной структурой, в Бурбаки — IV; Люксембург, Заанен — пространством Рисса. Термин ВР (vector lattice) введен Г. Биркгофом.

менно решеткой, т. е. упорядоченным множеством, в котором для любых двух элементов $x, y \in X$ существует их супремум $x \vee y$ и инфимум $x \wedge y$, причем выполнены следующие условия согласования алгебраических операций и порядка:

1) для любого $z \in X$ из $x \leq y$ вытекает $x + z \leq y + z$;

2) если $x \geq 0$ и $\lambda \geq 0$, то $\lambda x \geq 0$.

Множество $X_+ = \{x \in X: x \geq 0\}$ называется *конусом положительных элементов* ВР X . Очевидно, что в ВР существует супремум и инфимум любого конечного множества ее элементов.

Для любого $x \in X$ элемент $x_+ = x \vee 0$ называется его *положительной частью*, элемент $x_- = (-x) \vee 0 = (-x)_+$ — его *отрицательной частью* и элемент $|x| = x_+ + x_-$ — *модулем* элемента x . Для любого $x \in X$ имеет место равенство $x = x_+ - x_-$.

Порядковый интервал (или просто *интервал*) в ВР X есть всякое множество вида $[x_1, x_2] = \{x \in X: x_1 \leq x \leq x_2\}$, где $x_1 \leq x_2$ ($x_1, x_2 \in X$).

Два элемента x, y ВР X называются *дизъюнктивными* (обозначение: $x \text{ d } y$), если $|x| \wedge |y| = 0$. Два множества $E_1, E_2 \subset X$ называются *дизъюнктивными* ($E_1 \text{ d } E_2$), если любой элемент $x \in E_1$ дизъюнктивен любому $y \in E_2$. Наконец, элемент $x \in X$ называется *дизъюнктивным* с множеством $E \subset X$ ($x \text{ d } E$), если $x \text{ d } y$ для любого $y \in E$. Если E — произвольное множество из ВР X , то его *дизъюнктивным дополнением* называется множество E^d , состоящее из всех $x \in X$, дизъюнктивных с множеством E . Кроме того, полагаем $E^{dd} = (E^d)^d$. Легко видеть, что $(E^d)^{dd} = E^d$ для любого E .

Будем говорить, что множество E_1 *шире* множества E_2 ($E_1, E_2 \subset X$), если $E_1^{dd} \supset E_2^{dd}$; E_1 *одинаковой ширины* с E_2 , если $E_1^{dd} = E_2^{dd}$. Элемент $x \in X_+$ называется (*слабой*) *единицей*, если $\{x\}^{dd} = X$.

Подмножество E ВР X называется *солидным* (*телесным*), если из $x \in X, y \in E, |x| \leq |y|$ вытекает $x \in E$. Если E — произвольное подмножество в X , то наименьшее солидное множество, содержащее E , называется *солидной оболочкой* E и обозначается $\text{sol}(E)$. Легко видеть, что $\text{sol}(E)$ есть множество всех $x \in X$ таких, что существует $y \in E$, для которого $|x| \leq |y|$.

1.2. Линейное подмножество Y ВР X называется *векторной подрешеткой* *) в X , если для любых $y_1, y_2 \in Y$ имеем $y_1 \vee y_2, y_1 \wedge y_2 \in Y$. Линейное солидное подмножество Y ВР X называется *идеалом* **). Идеал Y ВР X называется *фундаментом*, если Y одинаковой ширины с X , т. е. $Y^d = \{0\}$.

Если $u \in X_+$, то наименьший идеал в X , содержащий u , называется *главным идеалом* или *и-идеалом* в X и обозначается $X(u)$. Легко видеть, что $X(u)$ состоит из всех $x \in X$ таких, что $|x| \leq \lambda u$ для некоторого λ ($0 \leq \lambda < +\infty$).

*) В Вулих — I — линейная подструктура.

**) В Вулих — I — нормальное подпространство или нормальный подлинеал.

Если ВР X совпадает с главным идеалом $X(u)$ при некотором выборе $u \in X_+$, то X называется *векторной решеткой ограниченных элементов* *), а элемент u — *сильной единицей* (в X).

Полосой **) в ВР X называется всякое множество $Y \subset X$, являющееся дизъюнктивным дополнением какого-нибудь множества $E \subset X$. Иными словами, множество $Y \subset X$ называется *полосой* в X , если $Y = Y^{dd}$.

Будем говорить, что ВР X *архимедова*, если из того, что для $x \in X_+$ выполнено $nx \leq y \in X$ при любом $n \in \mathbb{N}$, следует $x = 0$. Все интересные для функционального анализа типы ВР являются архимедовыми.

Если X — архимедова ВР, то множество $Y \subset X$ является полосой в X тогда и только тогда, когда Y есть идеал в X и выполнено следующее условие (называемое *условием правильности*): если $E \subset Y$ и в X существует $\sup E$ ($\inf E$), то $\sup E \in Y$ ($\inf E \in Y$).

1.3. K_σ -пространством (или σ -полной ВР) называется ВР X , в которой всякое счетное ограниченное сверху множество имеет супремум. K -пространством (или *полной* ВР) называется ВР X , в которой всякое ограниченное сверху множество имеет супремум. Легко видеть (ср. доказательство следствия 1 теоремы 1.6.17), что в случае K_σ -пространства произвольное счетное ограниченное снизу (а в случае K -пространства любое ограниченное снизу множество) имеет инфимум. K_σ -пространство является архимедовой ВР. Идеал в K_σ - или K -пространстве является K_σ - или K -пространством.

Важнейшим свойством полос в K -пространстве X является то, что на них можно проектировать X каноническим образом. Пусть Y — полоса в K -пространстве X , $x \in X_+$. Положим

$$[Y]x = \sup \{y \in Y_+ : y \leq x\}.$$

В силу определения K -пространства этот супремум существует в X , а в силу условия правильности $[Y]x \in Y$. Для произвольного $x \in X$ положим

$$[Y]x = [Y]x_+ - [Y]x_-.$$

Очевидно, что $[Y]$ является линейным оператором, отображающим X на Y и оставляющим элементы Y на месте. Легко видеть, что

$$|[Y]x| \leq |x|, |[Y]x| = [Y](|x|), x \in X.$$

Оператор $[Y]$ называется *проектором на полосу Y* . Любой элемент $x \in X$ единственным образом представим в виде $x = y + z$, где $y \in Y$, $z \in Y^a$, причем $y = [Y]x$, $z = [Y^a]x$ (см. Вулих — I, теорема IV.3.2).

*) В Вулих — I — K -линеал ограниченных элементов.

**) В Вулих — I — компонента.

Для произвольного множества $E \subset X$ через $[E]$ обозначим проектор $[E^{\text{dd}}]$ на полосу E^{dd} , порожденную множеством E . Если $u \in X$, то наименьшая полоса $\{u\}^{\text{dd}}$ в X , содержащая u , называется *главной полосой* и обозначается X_u . В соответствии с введенными выше обозначениями проектор на X_u обозначается $[u]$.

БР X называется БР *счетного типа*, если любое ограниченное семейство ненулевых попарно дизъюнктивных элементов не более чем счетно. Класс БР счетного типа удобен тем, что любые грани реализуются на некотором счетном множестве. Точнее, архимедова БР X является БР счетного типа тогда и только тогда, когда выполнено условие:

(*) для любого множества $E \subset X$, для которого существует $\sup E$, найдется не более чем счетное подмножество $E_0 \subset E$ такое, что $\sup E_0 = \sup E$;

или аналогичное условие, которое получается из (*) заменой $\sup$ на $\inf$.

Введем следующие обозначения. Пусть $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — направление в БР X . Запись $x_\alpha \uparrow$ означает, что для любых $\alpha, \alpha' \in A$, для которых $\alpha \geq \alpha'$, имеем $x_\alpha \geq x_{\alpha'}$. Запись $x_\alpha \uparrow x$ означает, что $x_\alpha \uparrow$ и $\sup x_\alpha = x$. Аналогично определяем $x_\alpha \downarrow$ и $x_\alpha \downarrow x$.

Исследование архимедовых БР часто удается свести к рассмотрению K -пространств при помощи K -пополнения. Для любой архимедовой БР X найдется единственное K -пространство kX , называемое *K -пополнением X* , обладающее свойствами:

- 1) X является векторной подрешеткой в kX ;
- 2) если $E \subset X$ и существует $x = \sup E$ в X , то этот же элемент x является супремумом E в kX ;
- 3) для любого $\hat{x} \in kX$ существуют направления $\{y_\alpha\}$ и $\{y'_\beta\}$ в X такие, что $y_\alpha \uparrow \hat{x}$, $y'_\beta \downarrow \hat{x}$.

K -пополнение получается обычным методом сечений, аналогично построению вещественных чисел по Дедекинду (см. Вулих — I, теорема IV.11.1).

1.4. Рассмотрим два типа сходимости в БР X .

Направление $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) называется *(о)-сходящимся* к пределу $x \in X$ ($x_\alpha \rightarrow x$ или $x = (o)\text{-}\lim x_\alpha$), если существует направление $\{y_\beta\}$ ($\beta \in B$) такое, что:

- 1) $y_\beta \downarrow 0$;
- 2) для любого $\beta \in B$ существует такое $\alpha_0 \in A$, что $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ при всех $\alpha \geq \alpha_0$.

В случае последовательности $\{x_n\}$ мы будем пользоваться и другим определением порядковой сходимости. Последовательность называется *(ос)-сходящейся* к пределу $x \in X$ ($x_n \rightarrow x$ или $x = (os)\text{-}\lim x_n$), если существует последовательность $\{y_n\}$ такая, что:

- 1) $y_n \downarrow 0$;
- 2) $|x_n - x| \leq y_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Если X — K_σ -пространство или архимедова ВР счетного типа, то для последовательности оба определения порядковой сходимости совпадают. В общем случае это не так.

Пусть X — ВР, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n$ (o) -сходится к x и писать $x = (o)\text{-}\sum_{n=1}^\infty x_n$, если последовательность его частичных сумм (o) -сходится к x . Аналогично определяется (oo) -сходимость ряда.

Если X — архимедова ВР счетного типа и направление $x_\alpha \rightarrow x$ ($\alpha \in \Lambda$), то существует возрастающая последовательность индексов $\alpha_n \in \Lambda$ ($n \in \mathbb{N}$), для которой $x_{\alpha_n} \rightarrow x$.

Отметим, что решеточные и линейные операции в ВР непрерывны относительно порядковой сходимости.

Пусть X — архимедова ВР. Последовательность $\{x_n\}$ называется (r) -сходящейся к пределу $x \in X$ ($x_n \xrightarrow{(r)} x$), если найдется элемент $z \in X_+$, называемый *регулятором сходимости*, такой, что $|x - x_n| \leq \varepsilon_n z$ ($n \in \mathbb{N}$), где $\varepsilon_n \in [0, +\infty)$ и $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Последовательность $\{x_n\}$ называется (r) -фундаментальной, если найдутся $z \in X_+$ и числовая последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ такие, что $|x_n - x_m| \leq \varepsilon_n z$ при $m \geq n$. Из (r) -сходимости вытекает (oo) -сходимость. Архимедова ВР X называется (r) -полной, если всякая (r) -фундаментальная последовательность его элементов является (r) -сходящейся. Всякое K_σ -пространство является (r) -полным (Вул и Х — I, лемма V.3.1).

1.5. Важным средством исследования ВР являются теоремы об их реализации в виде пространств непрерывных функций.

Пусть X и Y суть ВР. Линейное отображение U из X в Y называется *решеточным гомоморфизмом*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ имеем

$$U(x_1 \vee x_2) = U(x_1) \vee U(x_2).$$

Очевидно, что в этом случае выполнены и формулы $U(x_1 \wedge x_2) = U(x_1) \wedge U(x_2)$, $|U(x)| = U(|x|)$. В частности, если $x \geq 0$, то $U(x) \geq 0$.

Будем говорить, что U *сохраняет грани*, если из того, что существует супремум множества E в X , вытекает, что существует супремум множества $U(E)$ в Y , причем

$$\sup U(E) = U(\sup E).$$

При этом аналогичная формула верна и для инфимума.

Взаимно однозначный решеточный гомоморфизм U , переводящий X на Y , называется *решеточным* или *порядковым изоморфизмом*. Если U — решеточный изоморфизм, то отображения U и U^{-1} сохраняют грани. Будем говорить, что две ВР X и Y *порядково изоморфны*, если существует решеточный изоморфизм X

на Y . Очевидно, что отображение $U: X \rightarrow Y$ будет решеточным изоморфизмом тогда и только тогда, когда U — изоморфизм векторных пространств X и Y и $U(X_+) = Y_+$.

Компакт Q называется *экстремально несвязным*, если замыкание всякого открытого множества из Q открыто-замкнуто. Можно показать, что ВР непрерывных функций $C(K)$ является K -пространством тогда и только тогда, когда компакт K экстремально несвязен (см. Вулих — I).

Пусть далее Q — экстремально несвязный компакт. Через $C_\infty(Q)$ обозначается множество всех расширенных вещественных непрерывных функций на Q , т. е. функций, которые могут принимать на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$. Пространство $C_\infty(Q)$ естественным образом превращается в векторное пространство. Действительно, можно показать, что если мы для $x_1, x_2 \in C_\infty(Q)$ положим $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ при всех $t \in Q$ таких, что $x_1(t)$ и $x_2(t)$ конечны, то функция y допускает единственное продолжение до элемента из $C_\infty(Q)$, который и принимается за сумму $x_1 + x_2$. При определении умножения на число трудностей не возникает. Введем порядок в $C_\infty(Q)$, приняв $x_1 \geq x_2$, если $x_1(t) \geq x_2(t)$ при всех $t \in Q$. Тогда $C_\infty(Q)$ становится K -пространством (Вулих — I, теорема V.2.2). Важнейшую роль играет следующая теорема (см. Вулих — I, теорема V.4.2).

Теорема 1. *Всякое K -пространство X порядково изоморфно некоторому фундаменту K -пространства $C_\infty(Q)$, построенному на подходящем экстремально несвязном компакте Q^*). Если E — фиксированное множество попарно дизъюнктивных положительных элементов из X , то этот изоморфизм можно выбрать так, чтобы элементы из E переходили в характеристические функции открыто-замкнутых множеств из Q .*

Так как архимедову ВР можно погрузить к K -пополнение, а K -пополнение можно реализовать по теореме 1 в виде K -пространства функций, в котором линейные и решеточные операции, примененные к конечному числу элементов, вычисляются поточечно, то мы приходим к удобному *принципу сохранения** соотношений А. И. Юдина. Пусть имеются два выражения, $u(x_1, \dots, x_n)$ и $v(x_1, \dots, x_n)$, составленные с помощью конечного числа линейных и решеточных операций, где все переменные $x_1, \dots, x_n$ могут принимать значения в произвольной ВР. Тогда неравенство $u \geq v$ имеет место в архимедовой ВР X для любых значений аргументов тогда и только тогда, когда неравенство $u \geq v$ выполняется, если мы вместо $x_1, \dots, x_n$ подставим произвольные вещественные числа. (Бесконечный апалог этого принципа неверен.) Отметим, что другим способом можно доказать, что принцип сохранения соотношений справедлив в произвольной ВР. Мы предоставляем читателю убедиться в удобстве сформулированно-

*) Этот компакт единствен с точностью до гомеоморфизма.

го принципа, доказав, что для любых $x, y, z \in X$ выполнены неравенства

$$|(x \vee z) - (y \vee z)| \leq |x - y|, \quad |(x \wedge z) - (y \wedge z)| \leq |x - y|,$$

один раз воспользовавшись этим принципом, а другой — из определения ВР.

Охарактеризуем теперь K -пространства X , которые при реализации по теореме 1 дают все K -пространство $C_\infty(Q)$. K -пространство W называется *расширенным*, если в нем всякое множество попарно дизъюнктивных элементов имеет супремум.

K -пространство $C_\infty(Q)$ является расширенным и, обратно, любое расширенное K -пространство при изоморфизме из теоремы 1 изоморфно всему $C_\infty(Q)$. Если K -пространство X порядково изоморфно фундаменту некоторого расширенного K -пространства W , то W называется *максимальным расширением* K -пространства X и обозначается $\mathfrak{M}(X)$. Это пространство единственно с точностью до порядкового изоморфизма. Существование максимального расширения гарантируется теоремой 1.

С современным подходом к реализации ВР можно познакомиться в статье Векслера [1].

1.6. Проиллюстрируем введенные понятия на примере идеальных пространств, с теорией которых мы уже немного знакомы.

Прежде всего расширим понятие идеального пространства, оставив его прежнее определение, но отказавшись от условия σ -копечности меры, заменив его на более слабое свойство прямой суммы (1.6.10). Из теоремы 1.6.17 вытекает, что вещественное пространство $S(T, \Sigma, \mu)$ является K -пространством, причем элементы, обозначаемые в IV.3.1 и 1.1 $x \wedge y$, $x \vee y$, $|x|$, x_+ , x_- , совпадают. ИП будет идеалом в $S(T, \Sigma, \mu)$, ФП — фундаментом в $S(T, \Sigma, \mu)$; отсюда — их названия. Множество E_1 шире E_2 , если $\text{supp } E_1 \supset \text{supp } E_2 \pmod{\mu}$. Единица в ИП X — это функция $x \in X$ такая, что $x(t) > 0$ п. в. Примером векторной подрешетки в $S(T, \Sigma, \mu)$, не являющейся идеалом, будет множество всех измеримых конечнопозначных функций. Очевидно, что $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ является u -идеалом в $S(T, \Sigma, \mu)$, где $u(t) \equiv 1$. Множество полос в ФП X находится во взаимно однозначном соответствии с элементами из Σ (множества, равные $\text{mod } \mu$, отождествляются). При этом $A \in \Sigma$ соответствует полоса $X_A = \{x \in X: \text{supp } x \subset A \pmod{\mu}\}$. Проектор $[X_A]$ на полосу X_A есть оператор умножения на характеристическую функцию множества A : $[X_A]x = x\chi_A$.

Легко проверить, что K -пространство $S(T, \Sigma, \mu)$ является K -пространством счетного типа тогда и только тогда, когда мера μ σ -копечна. Вследствие этого нам до сих пор при исследовании ИП удавалось обходиться последовательностями.

(о)
Если X — ИП, то $x_n \rightarrow x$ в X тогда и только тогда, когда $x_n(t) \rightarrow x(t)$ п. в. и $|x_n| \leq y \in X$ ($n \in \mathbb{N}$). С этим видом сходимости

сти мы уже встречались (см. VI.1.1). В случае $S(0, 1)$ экстремально несвязный компакт Q из теоремы 1 по своим топологическим свойствам много экзотичней компакта $[0, 1]$, но тем не менее и в этом случае реализация из теоремы 1 часто служит ключом к новым результатам*). Наконец, отметим, что $S(T, \Sigma, \mu)$ является расширенным K -пространством, максимальным расширением любого ФП на (T, Σ, μ) .

1.7. Часто факты, доказанные нами для ИП, переносятся на абстрактные ВР. Впрочем, следует сказать, что теория ИП была разработана позднее общей теории ВР. Далее нам потребуется следующее обобщение леммы IV.3.1.

Лемма 1. Если X — архимедова ВР, а Y — фундамент в X , то для любого $x \in X_+$ найдется направление $y_\alpha \uparrow x$, $0 \leq y_\alpha \in Y$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что достаточно доказать, что для любого $x \in X_+$

$$x = \sup \{y \in Y: 0 \leq y \leq x\}. \quad (1)$$

Так как в Y с любыми двумя элементами входит и их супремум, то множество $A = \{y \in Y: 0 \leq y \leq x\}$ с порядком, индуцированным из X , является направлением по возрастанию. Поэтому, если индексом каждого элемента $y \in A$ считать его самого, то A будет возрастающим направлением, причем $y \uparrow x$ ($y \in A$).

Допустим, что для некоторого $x \in X_+$ формула (1) неверна. Тогда существует $y_0 \in X$ такой, что $y \leq y_0$ для любого $y \in A$, но неверно, что $x \leq y_0$. Для $y_1 = x \wedge y_0$ получаем, что $y \leq y_1$ при всех $y \in A$ и $y_1 < x$. Так как Y — фундамент в X , то для $x - y_1 > 0$ найдется $z_0 \in Y$, для которого $(x - y_1) \wedge z_0 > 0$. Для $z_1 = (x - y_1) \wedge z_0 \in Y$ имеем $0 < z_1 \leq x - y_1$. Следовательно, для любого $y \in A$ получаем $y + z_1 \leq x - y_1 + y \leq x$. Так как $y + z_1 \in Y$, то по индукции выводим, что $y + nz_1 \leq x$ ($n \in \mathbb{N}$), что противоречит принципу Архимеда.

§ 2. Линейные операторы и функционалы

2.1. Пусть X — ВР, Y — K -пространство. В этой главе мы будем рассматривать только линейные операторы и функционалы, поэтому слово «линейный» мы во всех дальнейших определениях опускаем.

Оператор $U: X \rightarrow Y$ называется *положительным*, если $U(x) \geq 0$ для любого $x \geq 0$. Оператор U называется *регулярным*, если $U = U_1 - U_2$, где U_i ($i = 1, 2$) — положительные линейные операторы. Множество всех регулярных операторов из X в Y обозначим $L \sim(X, Y)$.

*) Заметим, что в этом случае компакт Q есть гельфандовский компакт банаховой алгебры $L^\infty(0, 1)$ (см. Наймарк).

Теорема 1. Для того чтобы линейный оператор $U: X \rightarrow Y$ был регулярен, необходимо и достаточно, чтобы образ $U(E)$ любого ограниченного множества $E \subset X$ был ограничен в Y .

Операторы, удовлетворяющие критерию теоремы 1, называются *порядково ограниченными**). Теорема 1 утверждает, что если Y — K -пространство, то классы регулярных и (o) -ограниченных операторов совпадают. В общем случае это не так.

Введем в множестве $L^{\sim}(X, Y)$ порядок следующим образом: $U \geq 0$, если U — положительный оператор; $U_1 \geq U_2$, если $U_1 - U_2 \geq 0$. Исключительно важным является тот факт, что при таком определении порядка множество $L^{\sim}(X, Y)$ является K -пространством (Вулих — I, теорема VIII.2.1). При этом, если $\{U_{\xi}\}$ ($\xi \in \Xi$) ограниченное сверху множество операторов, то оператор $U = \sup U_{\xi}$ при каждом $x \in X_+$ вычисляется по формуле

$$U(x) = \sup \left\{ U_{\xi_1}(x_1) + \dots + U_{\xi_n}(x_n) : x = \sum_{i=1}^n x_i, x_i \geq 0, \right. \\ \left. \xi_i \in \Xi, 1 \leq i \leq n \right\}. \quad (1)$$

Аналогично вычисляется инфимум. Из (1) несложно получить, что если $U \in L^{\sim}(X, Y)$, то для $x \in X_+$ имеем

$$U_+(x) = \sup \{U(x') : 0 \leq x' \leq x\}, \\ U_-(x) = -\inf \{U(x') : 0 \leq x' \leq x\}, \\ |U|(x) = \sup \{|U(x')| : |x'| \leq x\}.$$

Отсюда вытекает, что для любого $x \in X$

$$|U(x)| \leq |U|(|x|). \quad (2)$$

Из формулы (1) следует, что если $U_{\alpha}, U \in L^{\sim}(X, Y)$ и $U_{\alpha} \xrightarrow{(o)} U$, то при любом $x \in X$ имеем $U_{\alpha}(x) \xrightarrow{(o)} U(x)$ (обратное неверно).

Введем еще несколько классов операторов.

Оператор $U \in L^{\sim}(X, Y)$ называется *порядково непрерывным*** или нормальным, если из того, что $x_{\alpha} \rightarrow x$, вытекает, что $U(x_{\alpha}) \rightarrow U(x)$. Множество $L_n^{\sim}(X, Y)$ всех (o) -непрерывных операторов является полосой K -пространства $L^{\sim}(X, Y)$.

Оператор $U \in L^{\sim}(X, Y)$ называется *порядково σ -непрерывным****), если из того, что $x_n \rightarrow x$, вытекает, что $U(x_n) \xrightarrow{(o)} U(x)$.

*) Слово «порядковый» мы по-прежнему будем сокращать (o) . Например, (o) -ограниченный оператор.

**) В Вулих — I — вполне линейный оператор.

*** В Вулих — I — (o) -линейный оператор.

Множество $L_{n\sigma}^{\sim}(X, Y)$ всех $(\sigma\sigma)$ -непрерывных операторов тоже является полосой в $L^{\sim}(X, Y)$. Очевидно, что $L_n^{\sim}(X, Y) \subset \subset L_{n\sigma}^{\sim}(X, Y)$. Доказательства приведенных фактов см. в Вулих — I, гл. VIII, §§ 3, 4.

Обзор новых приложений теории (o) -ограниченных операторов к задачам теории операторов в L^p см. в Бухвалов [3].

2.2. Остановимся теперь подробнее на случае функционалов, т. е. случае $Y = R^1$. В этом случае обозначаем

$$X^{\sim} = L^{\sim}(X, R^1), \quad X_n^{\sim} = L_n^{\sim}(X, R^1), \quad X_{n\sigma}^{\sim} = L_{n\sigma}^{\sim}(X, R^1).$$

Заметим, что если f — линейный функционал на архимедовой ВР X , то $f \in X_{n\sigma}^{\sim}$, если из $x_n \xrightarrow{(\sigma\sigma)} x$ вытекает $f(x_n) \rightarrow f(x)$, что упрощает проверку (o) -непрерывности. K -пространство $X_n^{\sim}$ называется (o) -сопряженным к X . Если X — K -пространство счетного типа, то в силу 1.4 $X_n^{\sim} = X_{n\sigma}^{\sim}$.

Функционал $f \in X^{\sim}$ называется *сингулярным**, если существует фундамент G в X , на котором f обращается в нуль. Легко видеть, что множество $X_s^{\sim}$ всех сингулярных функционалов является идеалом в $X^{\sim}$.

Лемма 1. Если X — архимедова ВР, то $X_s^{\sim} \subset (X_n^{\sim})^d$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется функционал $f \in X_s^{\sim}$ такой, что для некоторого $g \in X_n^{\sim}$ имеем $|f| \wedge |g| > 0$. Так как $X_s^{\sim}$ и $X_n^{\sim}$ — идеалы, то $f_1 = |f| \wedge |g| \in X_s^{\sim} \cap X_n^{\sim}$. По определению сингулярного функционала найдется фундамент Y в X , на котором f_1 обращается в нуль. По лемме 1.1 для любого $x \in X_+$ найдется направление $x_\alpha \uparrow x$, $0 \leq x_\alpha \in Y$. Так как $f_1 \in X_n^{\sim}$, то $f_1(x) = \lim f_1(x_\alpha) = 0$. Следовательно, $f_1 = 0$, чем получено противоречие с $f_1 > 0$.

Ниже мы докажем, что часто имеет место равенство $X_s^{\sim} = (X_n^{\sim})^d$.

2.3. Теперь приведем некоторые факты, связанные с каноническим вложением ВР X во второе (o) -сопряженное пространство.

Пусть X — ВР, Y — идеал в $X^{\sim}$, тотальный на X . Обозначим через π каноническое вложение X в $Y^{\sim}$. Прежде всего отметим, что $\pi(X) \subset Y_n^{\sim}$. Действительно, если $x \in X$ и $f_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$ в K -пространстве Y , то $f_\alpha \rightarrow 0$ в $X^{\sim}$, откуда

$$\pi(x)(f_\alpha) = f_\alpha(x) \rightarrow 0,$$

чем доказано, что $\pi(x) \in Y_n^{\sim}$.

*) В Вулих — I — аномальный функционал.

Теорема 2. 1) *Отображение π является решеточным гомоморфизмом $BP\ X$ на векторную подрешетку K -пространства $Y_n^\sim$.*

2) *Отображение π сохраняет грани тогда и только тогда, когда $Y \subset X_n^\sim$.*

3) *Векторная подрешетка $\pi(X)$ является идеалом в $Y^\sim$ тогда и только тогда, когда $Y \subset X_n^\sim$ и X — K -пространство.*

Доказательство 1) содержится в доказательстве теоремы IX.5.1 из книги Вулих — I (см. также Шефер — I, V.1.6). То, что π сохраняет грани и $\pi(X)$ — идеал, если $Y \subset X_n^\sim$, доказано в лемме IX.5.1 (Вулих — I). Обратное утверждение в 2) очевидно, а 3) доказывается аналогично теореме IX.7.2, Вулих — I. Отметим также, что в силу доказательства леммы IX.5.1, Вулих — I, множество $\pi(X)$ всегда одинаковой ширины с $Y_n^\sim$.

Следствие 1. *Если элемент $x \in X$ таков, что $f(x) \geq 0$ для любого $f \in Y_+$, то $x \geq 0$.*

Следствие 2. *Если $x_\alpha \downarrow$ в X и $x_\alpha \rightarrow x(\sigma(X, Y))$, то $x_\alpha \downarrow x$.*
Доказательство. Если $\alpha' \geq \alpha$, то $f(x_\alpha - x_{\alpha'}) \geq 0$ для любого $f \in Y_+$, откуда, переходя к пределу по α' , получаем $f(x_\alpha - x) \geq 0$. Отсюда по следствию 1 $x_\alpha \geq x$ при всех α . С другой стороны, если $y \leq x_\alpha$ при всех α , то $f(y) \leq f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ для $f \in Y_+$, откуда опять по следствию 1 $x \geq y$. Следовательно, $x_\alpha \downarrow x$.

Пусть X — K -пространство с тотальным $X_n^\sim$, $\kappa: X \rightarrow (X_n^\sim)_n^\sim$ — каноническое вложение. Тогда X называется *(о)-рефлексивным*, если $\kappa(X) = (X_n^\sim)_n^\sim$.

Теорема 3. *Пусть X — K -пространство с тотальным $X_n^\sim$. Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) X — *(о)-рефлексивно*;
- 2) $\kappa(X)$ — *полоса* в $(X_n^\sim)_n^\sim$;
- 3) *если направление $0 \leq x_\alpha \uparrow$ в X таково, что для любого $f \in X_n^\sim$, $f \geq 0$, имеем $\sup f(x_\alpha) < +\infty$, то найдется $x \in X$ такой, что $x_\alpha \uparrow x$.*

То, что 1) $\Leftrightarrow$ 3), доказано в теореме IX.6.1, Вулих — I; 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно; 2) $\Rightarrow$ 1), так как, как было отмечено после теоремы 2, $\kappa(X)$ — фундамент в $(X_n^\sim)_n^\sim$.

Следствие. *Если X — BP , Y — *полоса* в $X^\sim$, то Y — *(о)-рефлексивно*.*

Доказательство. Очевидно, что множество $\{\pi(x): x \in X\}$ есть тотальное множество *(о)-непрерывных функционалов* на Y . Пусть $0 \leq f_\alpha \uparrow$ в Y и $\sup F(f_\alpha) < +\infty$ для любого $F \in Y_n^\sim$, $F \geq 0$. В частности,

$$\sup_\alpha \pi(x)(f_\alpha) = \sup_\alpha f_\alpha(x) < +\infty$$

для любого $x \in X_+$. По определению супремума в K -пространстве

$X^\sim$ существует функционал $f \in X^\sim$ такой, что $f_\alpha \uparrow f$. Так как Y — полоса, то $f \in Y$ и тем самым удовлетворено 3) в теореме 3.

В частности, пространства $X^\sim$ и $X_n^\sim(o)$ -рефлексивны.

2.4. Рассмотрим опять случай идеального пространства X , причем будем, как и в 1.6, предполагать, что мера обладает свойством прямой суммы. Так как в случае σ -конечной меры пространство $S(T, \Sigma, \mu)$ и все идеалы в нем суть K -пространства счетного типа, то, как отмечено в 2.2, классы порядково непрерывных и порядково σ -непрерывных функционалов совпадают; таким образом, в главе VI мы действительно имели дело с порядково непрерывными функционалами.

Теорема VI.1.1 о представлении $X_n^\sim$ при помощи дуального X' без всяких изменений переносится на случай, когда мера μ обладает свойством прямой суммы. При этом отображение $x' \in X' \rightarrow f_{x'} \in X_n^\sim$ является порядковым изоморфизмом K -пространств X' и $X_n^\sim$. Следовательно, если

$$f(x) = \int_T x(t) x'(t) d\mu, \quad x \in X,$$

то

$$|f|(x) = \int_T x(t) |x'(t)| d\mu,$$

$$f_+(x) = \int_T x(t) x'_+(t) d\mu, \quad f_-(x) = \int_T x(t) x'_-(t) d\mu.$$

Если X — ИП, то, используя теорему VI.1.1, легко получить, что X (o) -рефлексивно тогда и только тогда, когда $X = X''$.

2.5. Класс идеальных пространств (наряду с ВР $C(K)$) является важнейшим классом ВР, поэтому важно получить его абстрактную характеристику в классе всех ВР. Оказывается, K -пространство X порядково изоморфно некоторому ИП тогда и только тогда, когда в X найдется фундамент Y с тотальным $Y_n^\sim$. Доказательством этого результата мы и закончим этот параграф. Прежде всего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Если X — K -пространство, то для любого $f \in X_n^\sim$ ($f \geq 0$) существует полоса C_f , называемая полосой существенной положительности функционала f , обладающая следующими свойствами:

- 1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$ из C_f ;
- 2) $f(x) = 0$ для всех $x \in (C_f)^d$.

Доказательство. Положим

$$N_f = \{x \in X: f(|x|) = 0\}.$$

Так как $f \in X_n^\sim$, то N_f — полоса. Очевидно, что полоса $C_f = (N_f)^d$ — искомая.

Лемма 3. Если X — K -пространство, $f, g \geq 0$ — (о)-непрерывные функционалы на X , то $f \wedge g$ тогда и только тогда, когда $C_f \wedge C_g$.

Доказательство. Так как C_f и C_g — полосы, то соотношение $C_f \wedge C_g$ эквивалентно соотношению $C_f \cap C_g = \{0\}$. Если $f \wedge g$ и $0 \leq x \in C_f \cap C_g$, то, так как $f \wedge g = 0$, имеем

$$\inf \{f(x_1) + g(x_2) : x = x_1 + x_2; x_1, x_2 \geq 0\} = 0.$$

Следовательно, можно построить две последовательности $x_1^{(n)}, x_2^{(n)} \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) такие, что $x = x_1^{(n)} + x_2^{(n)}$ и

$$f(x_1^{(n)}) + g(x_2^{(n)}) < 1/2^n.$$

Положим

$$y_i^{(n)} = \sup_{m \geq n} x_i^{(m)}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда $y_i^{(n)} \downarrow y_i \geq 0$ ($i = 1, 2$) и

$$f(y_1^{(n)}) \leq \sum_{m=n}^{\infty} f(x_1^{(m)}) \leq 1/2^{n-1}, \quad g(y_2^{(n)}) \leq 1/2^{n-1}.$$

Следовательно, $f(y_1) = g(y_2) = 0$. Так как $0 \leq y_i \leq x \in C_f \cap C_g$, то $y_i = 0$ ($i = 1, 2$) в силу определения полосы существенной положительности. Тогда $x = x_1^{(n)} + x_2^{(n)} \xrightarrow{(o)} 0$, откуда $x = 0$.

Обратно, пусть $C_f \wedge C_g$. Если $Y = (C_f \cup C_g)^d$, то в силу 1.3 для любого $x \in X_+$ имеем

$$x = [C_f]x + [C_g]x + [Y]x.$$

Тогда $g([C_f]x) = f([C_g]x) = f([Y]x) = g([Y]x) = 0$. Следовательно,

$$0 \leq (f \wedge g)(x) \leq f([C_g]x + [Y]x) + g([C_f]x) = 0,$$

откуда $f \wedge g$.

Функционал $f \in X_n^{\sim}$ ($f \geq 0$) называется существенно положительным, если $C_f = X$.

Лемма 4. Если X — K -пространство с тотальным $X_n^{\sim}$, то найдется такая система $\{f_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) попарно дизъюнктивных функционалов из $X_n^{\sim}$, что $f_\alpha > 0$ ($\alpha \in A$), $\left(\bigcup_{\alpha \in A} C_{f_\alpha}\right)^{dd} = X$ и каждая полоса C_{f_α} — главная.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех систем $\mathfrak{m} = \{f_\beta\}$ ($\beta \in B$) попарно дизъюнктивных функционалов из $X_n^{\sim}$, $f_\beta > 0$ ($\beta \in B$), таких, что каждая полоса C_{f_β} — главная. Введем в $\mathfrak{M}$ порядок, полагая $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} = \{f_\beta\}$ ($\beta \in B$), $\mathfrak{n} = \{g_\gamma\}$ ($\gamma \in \Gamma$), если для любого $\gamma \in \Gamma$ найдется $\beta \in B$, для которого $f_\beta = g_\gamma$. По лемме Цорна существует максимальная система $\mathfrak{m}_0 = \{f_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) в $\mathfrak{M}$. Покажем, что $\{f_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — искомая систе-

ма. Предположим, что $Y = \left(\bigcup_{\alpha \in A} C_{f_\alpha} \right)^{\text{ad}} \neq X$. Положим $Z = Y^{\text{cl}}$. Так как $Z \neq \{0\}$, то найдется $x_0 \in Z$ такой, что $x_0 > 0$. В силу того, что $X_n^\sim$ тотально на X , существует функционал $g \in X_n^\sim$, для которого $g(x_0) \neq 0$. Так как $|g(x_0)| \leq |g|(\bar{x}_0)$, то можно считать, что $g > 0$. Для любого $x \in X$ положим

$$f(x) = g(\lfloor x_0 \rfloor x).$$

Очевидно, что $f \in X_n^\sim$, и так как $f(x_0) = g(x_0) > 0$, то $f > 0$. Кроме того, $C_f \subset X_{x_0} \subset Z$, откуда $C_f \not\subset C_{f_\alpha}$ при всех $\alpha \in A$. По лемме 3 $f \not\in f_\alpha$ при всех $\alpha \in A$. Этим мы получили противоречие с максимальностью $\mathfrak{M}_0$, и лемма доказана.

Приведем теперь одну лемму о пространстве непрерывных функций. Уже в ВР $C[0, 1]$ легко проверить, что грани бесконечных множеств вычисляются не поточно.

Лемма 5. Пусть K — компакт, E — множество неотрицательных функций в ВР $C(K)$, $z(t) = \inf \{x(t) : x \in E\}$ ($t \in K$). Для того чтобы $\inf E = 0$, необходимо и достаточно, чтобы множество $P = \{t \in K : z(t) > 0\}$ было первой категории в K .

Доказательство. Необходимость. Для всякого $\varepsilon > 0$ положим $P(\varepsilon) = \{t \in K : z(t) \geq \varepsilon\}$. Тогда $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(1/n)$. Таким образом, достаточно установить, что для всякого $\varepsilon > 0$ множество $P(\varepsilon)$ нигде не плотно. Так как

$$P(\varepsilon) = \bigcap_{x \in E} \{t \in K : x(t) \geq \varepsilon\},$$

то $P(\varepsilon)$ замкнуто. Если $P(\varepsilon)$ не является нигде не плотным, то найдутся точка $t_0 \in K$ и ее открытая окрестность $V \subset P(\varepsilon)$. Так как компакт вполне регулярен (см. Данфорд, Шварц — I, гл. I, § 5), то найдется функция $x_0 \in C(K)$ такая, что:

- 1) $0 \leq x_0(t) \leq \varepsilon$, $t \in K$;
- 2) $x_0(t_0) = \varepsilon$;
- 3) $x_0(t) = 0$, $t \in K \setminus V$.

Тогда $0 < x_0 \leq x$ для любого $x \in E$, что противоречит $\inf E = 0$.

Достаточность. Пусть P — множество первой категории. Предположим, что 0 не является инфимумом E . Тогда существует функция $x_0 \in C(K)$ такая, что $0 < x_0 \leq x$ для любого $x \in E$; следовательно, найдется точка $t_0 \in K$, для которой $x_0(t_0) > 0$. Тогда $V = \{t \in K : x_0(t) > 0\}$ — открытое непустое множество. Кроме того, $z(t) \geq x_0(t) > 0$ при любом $t \in V$, откуда V содержится в P . Следовательно, V — множество первой категории, но из топологии известно, что непустое открытое множество в компакте не может быть первой категории (для доказательства этого достаточно немного изменить доказательство теоремы I.4.2).

Рассмотрим теперь меры на экстремально несвязных компактах. Пусть далее Q — экстремально несвязный компакт, $\mathcal{E}_Q$ —

совокупность всех открыто-замкнутых подмножеств Q , $\mathcal{N}_Q$ — совокупность всех множеств первой категории в Q . Обозначим через $\mathfrak{B}_Q$ совокупность всех симметрических разностей $G \Delta N$, где $G \in \mathcal{E}_Q$, $N \in \mathcal{N}_Q$.

Лемма 6. $\mathfrak{B}_Q$ — σ -алгебра, содержащая борелевскую σ -алгебру компакта Q .

Доказательство. Легко видеть, что $A \in \mathfrak{B}_Q$ тогда и только тогда, когда существует $G \in \mathcal{E}_Q$ такое, что множества

$$N_1 = A \setminus G, \quad N_2 = G \setminus A \quad (3)$$

суть первой категории. Действительно, если $A = G \Delta N$, $G \in \mathcal{E}_Q$, $N \in \mathcal{N}_Q$, то $N_1 = N \setminus G$ и $N_2 = N \cap G$ — множества первой категории. Обратно, если A удовлетворяет (3), то положим $N = N_1 \cup N_2 \in \mathcal{N}_Q$. Очевидно, что $A = G \Delta N$. Итак, достаточно доказать, что множества, удовлетворяющие (3), образуют σ -алгебру. Если $\{A_n\}$ — последовательность таких множеств и $G_n \in \mathcal{E}_Q$ — соответствующие им множества, то положим $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Так как G открыто, то

$\overline{G} \setminus G$ нигде не плотно. Далее, для $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ имеем

$$A \setminus \overline{G} \subset A \setminus G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus G_n) \in \mathcal{N}_Q,$$

$$G \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus A_n) \in \mathcal{N}_Q.$$

Так как $\overline{G} \setminus A = [(\overline{G} \setminus G) \setminus A] \cup (G \setminus A) \in \mathcal{N}_Q$, то $A \in \mathfrak{B}_Q$. Если $A = G \Delta N \in \mathfrak{B}_Q$, то $Q \setminus A = (Q \setminus G) \Delta N$. Так как $Q \setminus G \in \mathcal{E}_Q$, то $Q \setminus A \in \mathfrak{B}_Q$. Итак, мы доказали, что $\mathfrak{B}_Q$ — σ -алгебра.

Так как для любого открытого множества U множества $\overline{U} = \mathcal{E}_Q$ и $\overline{U} \setminus U$ нигде не плотны, то $U \in \mathfrak{B}_Q$, откуда борелевская σ -алгебра содержится в $\mathfrak{B}_Q$.

Мера μ , заданная на σ -алгебре $\mathfrak{B}_Q$, называется *нормальной*, если:

- 1) из $N \in \mathcal{N}_Q$ вытекает $\mu(N) = 0$;
- 2) для любого $G \in \mathcal{E}_Q$, $\mu(G) = +\infty$, существует $G_1 \in \mathcal{E}_Q$ такое, что $G_1 \subset G$ и $0 < \mu(G_1) < +\infty$.

Нормальная мера μ называется *строго положительной*, если

- 3) из $G \in \mathcal{E}_Q$, $G \neq \emptyset$ вытекает $\mu(G) > 0$.

Экстремально несвязный компакт, на котором существует строго положительная нормальная мера, называется *гиперстоуновым*. Пусть Q — гиперстоунов компакт со строго положительной нормальной мерой μ . Отметим простейшие следствия определений.

- а) $\mu(G \Delta N) = \mu(G)$, если $G \in \mathcal{E}_Q$, $N \in \mathcal{N}_Q$.

Действительно, $\mu(G \Delta N) = \mu(G \setminus N) + \mu(N \setminus G) = \mu(G \setminus N) = \mu(G \setminus N) + \mu(N \cap G) = \mu(G)$.

- б) Мера μ полна.

Если $A \subset G \triangle N$, $G \in \mathcal{E}_Q$, $N \in \mathcal{N}_Q$ и $\mu(G \triangle N) = 0$, то в силу а) и 3) $G = \emptyset$, откуда $A \subset N$, и, следовательно, $A \in \mathcal{N}_Q$.

с) Мера μ локально конечна.

Если $\mu(G \triangle N) = +\infty$, $G \in \mathcal{E}_Q$, $N \in \mathcal{N}_Q$, то в силу 1) $\mu(G) = +\infty$, а тогда в силу 2) найдется $G_1 \in \mathcal{E}_Q$ такое, что $G_1 \subset G$ и $0 < \mu(G_1) < +\infty$. Следовательно, $G_1 \triangle N \subset G \triangle N$ и $\mu(G_1 \triangle N) = \mu(G_1) < +\infty$, что и доказывает с).

d) В компакте Q существует система $\{Q_\alpha\} \subset \mathcal{E}_Q$ попарно дизъюнктивных множеств такая, что $0 < \mu(Q_\alpha) < +\infty$ при любом α и множество $Q \setminus \bigcup Q_\alpha$ нигде не плотно.

Прежде всего отметим, что для любого открытого множества $V \subset Q$ множество $\bar{V} \setminus V \in \mathcal{N}_Q$. Утверждение d) несложно выводится с использованием леммы Цорна и 2).

е) Пусть $\{Q_\alpha\}$ — система из d). Если $A \cap Q_\alpha \in \mathcal{B}_Q$ при любом α , то $A \in \mathcal{B}_Q$.

Пусть $A \cap Q_\alpha = G_\alpha \triangle N_\alpha$, где $G_\alpha \in \mathcal{E}_Q$, $N_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_\alpha^{(n)}$, а множества $N_\alpha^{(n)}$ нигде не плотны. При этом можно считать, что $G_\alpha, N_\alpha \subset Q_\alpha$. Положим $N^{(n)} = \bigcup_{\alpha} N_\alpha^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$). Покажем, что множество $N^{(n)}$ нигде не плотно. Предположим противное.

Пусть непустое открытое множество V содержится в $\overline{N^{(n)}}$. Так как множество $Q \setminus \bigcup_{\alpha} Q_\alpha$ замкнуто и нигде не плотно, то множество $U = V \cap \left(\bigcup_{\alpha} Q_\alpha \right)$ непусто и открыто. Так как Q_α попарно не пересекаются и открыто-замкнуты, то для любого α имеем $\overline{N^{(n)}} \cap Q_\alpha = \overline{N_\alpha^{(n)}}$. Следовательно, $U \cap Q_\alpha \subset \overline{N_\alpha^{(n)}}$, откуда множество $U \cap Q_\alpha$, с одной стороны, открыто, а с другой — нигде не плотно. Поэтому $U \cap Q_\alpha = \emptyset$ при всех α , что означает $U = \emptyset$.

Итак, $N^{(n)}$ нигде не плотно, $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N^{(n)} \in \mathcal{N}_Q$, $G = \bigcup G_\alpha$ — открытое множество, а тогда по лемме 6 $G \in \mathcal{B}_Q$. Теперь очевидно, что

$$A = (G \triangle N) \cup (A \cap (Q \setminus \bigcup Q_\alpha)) \in \mathcal{B}_Q.$$

Из b), c) и e) выводим, что $(Q, \mathcal{B}_Q, \mu)$ удовлетворяет всем аксиомам пространства с мерой (см. I.6.2).

f) Пространство $(Q, \mathcal{B}_Q, \mu)$ обладает свойством прямой суммы.

Покажем выполнение условия прямой суммы относительно системы $\{Q_\alpha\}$ из d). Очевидно, достаточно рассмотреть случай $G \in \mathcal{E}_Q$, $0 < \mu(G) < \infty$.

Представим G в виде

$$G = \bigcup_{\alpha} (G \cap Q_\alpha) \cup [G \cap (Q \setminus \bigcup_{\alpha} Q_\alpha)].$$

Для доказательства f), очевидно, достаточно проверить, что $G \cap Q_\alpha \neq \emptyset$ лишь при не более чем счетном множестве индексов α . Если мы предположим противное, то найдутся число $\varepsilon > 0$ и счетное множество индексов α_n , для которых $\mu(G \cap Q_{\alpha_n}) \geq \varepsilon$. Это противоречит неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(G \cap Q_{\alpha_n}) \leq \mu(G) < +\infty.$$

Теорема 4. Пусть μ — строго положительная нормальная мера на $\mathfrak{B}_Q$.

- 1) Если $x \in C_\infty(Q)$, то x — измеримая п. в. конечная функция.
- 2) Если $x \neq y$ в $C_\infty(Q)$, то функция x и y не эквивалентны.
- 3) Если y — измеримая п. в. конечная функция на Q , то найдется $x \in C_\infty(Q)$, для которой $x(t) = y(t)$ п. в.

Доказательство. 1) Очевидно.

2) Если $x \neq y$, то множество $P = \{t \in Q: x(t) \neq y(t)\}$ открыто и непусто, откуда $\mu(P) = \mu(\bar{P}) > 0$.

3) Установим, что тождественное отображение $x \in C_\infty(Q) \rightarrow x \in S(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$ является порядковым изоморфизмом расширенных K -пространств $C_\infty(Q)$ и $S(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$. Покажем сначала, что это отображение устанавливает изоморфизм $C(Q)$ и $L^\infty(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$. Для этого достаточно проверить, что для любого $y \in L^\infty(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$ найдется $x \in C(Q)$, для которого $x(t) = y(t)$ п. в. Если $G \triangle N \in \mathfrak{B}_Q$, то

$$\chi_{G \triangle N}(t) = \chi_G(t) \text{ п. в.} \quad (4)$$

и $\chi_G \in C(Q)$, так как G открыто-замкнуто. Можно считать, что функция y ограничена. Тогда по теореме I.6.3 существует последовательность конечно-значных измеримых функций y_n , $y_n \rightarrow y$ равномерно на Q . В силу (4) для y_n найдется $x_n \in C(Q)$, $x_n(t) = y_n(t)$ п. в. Тогда $x_n(t) \rightarrow y(t)$ равномерно на множестве A , являющемся дополнением к некоторому множеству первой категории. Следовательно, сужение функции y на A непрерывно и $A = Q$. С другой стороны, $\{x_n\}$ — последовательность Коши в $C(Q)$, так как, очевидно,

$$\|x_n - x_m\|_{C(Q)} = \|y_n - y_m\|_{L^\infty(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)}.$$

В силу полноты $C(Q)$ $x_n \rightarrow x$ в $C(Q)$ по норме и $x(t) = y(t)$ п. в. Итак, мы установили изоморфизм $C(Q)$ и $L^\infty(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$.

Пусть $y \in S(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$. Можно считать, что функция $y(t)$ всюду конечна. Для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ положим

$$y_n(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если } n \leq |y(t)| < n+1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $y_n \in L^\infty(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$. По доказанному найдется $x_n \in C(Q)$, $x_n(t) = y_n(t)$ п. в. Так как $|y_n| \wedge |y_m| = 0$ ($n \neq m$) в $L^\infty(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$,

то $|x_n| \wedge |x_m| = 0$ ($n \neq m$) в $C(Q)$, а тогда и в $C_\infty(Q)$. Так как $C_\infty(Q)$ — расширенное K -пространство, то существует $x = \sup x_n \in C_\infty(Q)$. Очевидно, что поточечный $\sup x_n(t) = y(t)$ п. в., а по лемме 5 $x(t) = \sup x_n(t)$ всюду, кроме множества первой категории, т. е. тоже почти всюду, чем доказано, что $y(t) = x(t)$ п. в.

По ходу доказательства теоремы мы установили

Следствие. *Отображение $x \in C_\infty(Q) \rightarrow x \in S(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$ является порядковым изоморфизмом.*

Теперь мы можем доказать основную теорему.

Теорема 5. *K -пространство X порядково изоморфно идеальному пространству на некотором пространстве с мерой (T, Σ, μ) , обладающем свойством прямой суммы, тогда и только тогда когда в X существует фундамент Y с тотальным $Y_n^\sim$.*

Доказательство. Если X — ИП на (T, Σ, μ) , то $X \cap L^1(T, \Sigma, \mu)$ — фундамент в X , на котором множество (o) -непрерывных функционалов тотально, так как оно тотально на $L^1(T, \Sigma, \mu)$.

Докажем обратное утверждение. Так как, если Y изоморфно фундаменту в $S(T, \Sigma, \mu)$, то X изоморфно фундаменту в $S(T, \Sigma, \mu)$ в силу единственности максимального расширения, то можно считать, что $X_n^\sim$ тотально на X . Пусть $\{f_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — система функционалов из леммы 4, x_α — элемент, порождающий полосу S_{f_α} . По лемме 3 элементы x_α попарно дизъюнкты. Тогда по теореме 1.1 максимальное расширение $\mathfrak{M}(X)$ можно реализовать в виде $C_\infty(Q)$, причем элементы x_α переходят в характеристические функции попарно дизъюнктивных открыто-замкнутых множеств Q_α . Так как $\{x_\alpha: \alpha \in A\}^{cl} = X$, то $\overline{\cup Q_\alpha} = Q$. Определим теперь меру на $\mathfrak{B}_Q$. Если $A = G \Delta N$, $G \in \mathcal{E}_Q$, $N \in \mathcal{N}_Q$, причем A содержится в некотором Q_α , то полагаем

$$\mu(A) = f_\alpha(\chi_Q).$$

(Здесь мы отождествляем X с его изоморфным образом в $C_\infty(Q)$.) Для произвольного $A \in \mathfrak{B}_Q$ полагаем

$$\mu(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \mu(A \cap Q_{\alpha_i}): \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset A \right\}.$$

Легко видеть, что для того, чтобы проверить, что μ — мера, достаточно убедиться, что счетно-аддитивно ее сужение на каждую σ -алгебру $\mathfrak{B}_{Q_\alpha}$. Прежде всего отметим, что если

$$G \Delta N \subset G_1 \Delta N_1, \quad G, G_1 \in \mathcal{E}_Q, \quad N, N_1 \in \mathcal{N}_Q,$$

то $G \subset G_1$. Действительно, в противном случае найдется непустое открытое множество U , содержащееся в G , такое, что $U \cap G_1 = \emptyset$. Тогда

$$U \setminus N \subset G \setminus N \subset G_1 \Delta N_1 = (G_1 \setminus N_1) \cup (N_1 \setminus G_1),$$

откуда $U \setminus N \subset N_1 \setminus G_1$, так как $U \cap G_1 = \emptyset$. Следовательно, $U \subset N \cup N_1$, но мы уже отмечали, что открытое множество в компакте не может быть первой категории.

Итак, теперь докажем, что сужение μ на σ -алгебру $\mathfrak{B}_{Q_\alpha}$ счетно-аддитивно. Пусть $A_n = G_n \triangle N_n \in \mathfrak{B}_{Q_\alpha}$, $A_n \downarrow \emptyset$. Из доказанного вытекает, что $G_n \downarrow$. Очевидно, что $\bigcap G_n$ — множество первой категории. Тогда по лемме 5 $\chi_{G_n} \downarrow 0$ в K -пространстве X , откуда $\mu(A_n) = f_\alpha(\chi_{G_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Проверим, что μ — нормальная мера. Свойства 1) и 2) очевидны из определения меры μ . Свойство 3) вытекает из того, что для любого $G \in \mathcal{E}_Q$ найдется Q_α такое, что $G \cap Q_\alpha \neq \emptyset$, и того, что f_α существенно положителен на C_{f_α} .

§ 3. Нормированные решетки

3.1. Норма $\|\cdot\|$ на БР X называется *монотонной*, если из $|x| \leq |y|$ следует, что $\|x\| \leq \|y\|$. *Нормированной решеткой* *) (сокращенно НР) называется БР, снабженная монотонной нормой. Полная по норме НР называется *банаховой решеткой* **) (сокращенно БР). Если НР (соответственно БР) X является K -пространством, то говорят, что X — *нормированное K -пространство* ***) (соответственно *банахово K -пространство* ****)).

Очевидно, что НИП является нормированным K -пространством, БИП — банаховым K -пространством. Свойства 1)–4) из IV.3.1 сходимости по норме справедливы, очевидно, в любой НР X . Свойство 5) переходит в непрерывность оператора проектирования в нормированном K -пространстве X : если $x_n \rightarrow x$ по норме, то $[E]x_n \rightarrow [E]x$ по норме (более того, норма оператора $[E]$ не превосходит единицы). Отметим также, что любая НР — архимедова.

Рассмотрим связь между сходимостью по норме и сходимостью с регулятором. Если X — НР и $x_n \xrightarrow{(r)} x$, то $x_n \rightarrow x$ по норме, так как $\|x_n - x\| \leq \varepsilon_n \|x\| \rightarrow 0$ (где u — регулятор сходимости). Обратное утверждение, как правило, неверно. Однако, так как доказательство леммы IV.3.2 дословно повторяется в случае БР X , получаем, что если $x_n \rightarrow x$ по норме, то найдется подпоследовательность $x_{n_k} \xrightarrow{(r)} x$. Теперь аналогично теореме IV.3.2 получаем, что любые две монотонные нормы на БР X , превращающие X в БР, эквивалентны.

Теорема 1. 1) Если X — НР, то $X^* \subset X^\sim$.

2) Если X — БР, то $X^* = X^\sim$.

*) В Вулих — I — KN -линеал или нормированная структура.

**) В Вулих — I — KB -линеал или банахова структура.

***). В Вулих — I — KN -пространство.

****). В Вулих — I — (b) -полное KN -пространство.

Доказательство. 1) В силу монотонности нормы порядковые интервалы в НР X ограничены по норме, а так как функционал $f \in X^*$ ограничен на любом ограниченном по норме множестве, то по теореме 2.1 $f \in X^\sim$.

2) Пусть $f \in X^\sim$, $f \notin X^*$. Тогда найдется последовательность $x_n \rightarrow 0$ по норме, для которой $f(x_n) \geq \varepsilon > 0$ ($n \in \mathbb{N}$). С другой стороны, найдется $x_{n_k} \rightarrow 0$, откуда $|f(x_{n_k})| \leq |f|(|x_{n_k}|) \leq \varepsilon_{n_k} |f|(u) \rightarrow 0$. Полученное противоречие доказывает, что $f \in X^*$.

Если X — НР, то легко видеть, что банахово сопряженное X^* с обычной нормой и порядком, индуцированным из $X^\sim$, является банаховым K -пространством (и идеалом в $X^\sim$).

3.2. При исследовании ВР кроме рассмотренного в 1.5 бывает полезен еще один класс реализаций.

Пусть X — архимедова ВР, $u \in X_+$. Превратим u -идеал $X(u)$ в НР, взяв в качестве нормы функционал Минковского порядкового интервала $[-u, u]$. Введенную норму будем обозначать $\|\cdot\|_u$ и называть u -нормой. Очевидно, что ВР X (r) -полна тогда и только тогда, когда каждая НР $X(u)$ полна ($u \in X_+$). Важность (r) -полных решеток подчеркивается тем, что по теореме М. Г. и С. Г. Крейнов — С. Какутани (см. Вулих — I, теорема VII.5.1) каждый полный по u -норме u -идеал $X(u)$ порядково и изометрически изоморфен ВР $C(K)$ на некотором компакте K . В силу результатов 3.1 о связи между сходимостью по норме и (r) -сходимостью в ВР получаем, что любая ВР (r) -полна.

В теории операторов часто естественно рассматривать векторные пространства (и векторные решетки) над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Так как при естественном определении порядка, скажем, в комплексном $L^p(0, 1)$, вообще говоря, не определен супремум двух функций (два комплексных числа не имеют максимума), то определен модуль функции, то именно модуль кладется в основу обобщения понятия ВР на комплексный случай.

Пусть комплексное векторное пространство X есть комплексификация вещественного векторного пространства X_0 *), являющегося (r) -полной ВР. Теперь для элемента $z = x + iy$ ($x, y \in X_0$) определим модуль $|z| \in X_0$. Для этого рассмотрим главный идеал $X_0(|x| + |y|)$, который в силу (r) -полноты X_0 изоморфен вещественному пространству $C(K)$. Продолжим этот изоморфизм естественным образом до изоморфизма $X_0(|x| + |y|) + iX_0(|x| + |y|)$ на комплексное $C_{\mathbb{C}}(K)$. Если $z = x + iy$, $x, y \in C(K)$, то функцию $|z(t)|$ ($t \in K$) можно вычислить по формуле $|z| = \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} |(\cos \theta)x + (\sin \theta)y|$, где супремум берется в ВР $C(K)$. Следовательно, для

*) То есть X есть множество всех элементов вида $x + iy$ ($x, y \in X_0$) с естественным образом введенными линейными операциями (см. § 2 гл. XIII).

любого $z \in X$ существует

$$|z| = \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} |(\cos \theta)x + (\sin \theta)y|, \quad (1)$$

чем и закончено построение модуля в X .

Комплексное векторное пространство X , удовлетворяющее вышеперечисленным условиям, называется *комплексной векторной решеткой*, если модуль элемента определен по формуле (1). Почти все понятия теории ВР и БР переносятся на комплексный случай (см. Шефер — II).

3.3. Остановимся теперь на критериях полноты НР.

Теорема 2 (Амеция). Пусть X — НР. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) X полна по норме;
- 2) если $0 \leq x_n \uparrow$ — последовательность Коши в X , то $x_n \rightarrow x \in X$ по норме;
- 3) если $0 \leq x_n \uparrow$ — последовательность Коши в X , то существует $x = \sup x_n \in X$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1). Если $\{x_n\}$ — последовательность Коши в X , то, переходя, если надо, к подпоследовательности, можно считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| < +\infty. \quad (2)$$

Положим

$$y_n = \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k)_+, \quad z_n = \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k)_-.$$

Тогда $0 \leq y_n \uparrow$, $0 \leq z_n \uparrow$. Если $n < m$, то

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^m (x_{k+1} - x_k)_+ \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \|(x_{k+1} - x_k)_+\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_{k+1} - x_k\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

в силу (2). Таким образом, $\{y_n\}$ — возрастающая последовательность Коши. Следовательно, $y_n \rightarrow y$ по норме. Аналогично, $z_n \rightarrow z$ по норме. Тогда $y_n - z_n \rightarrow y - z$, но

$$y_n - z_n = \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1,$$

откуда $x_n \rightarrow y - z + x_1$ по норме.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть $0 \leq x_n \uparrow$ — последовательность Коши. В силу условия существует $x = \sup x_n$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq 1/n^3, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Рассмотрим

$$y_n = x_1 + \sum_{k=1}^n k(x_{k+1} - x_k).$$

Тогда $0 \leq y_n \uparrow$ и, если $n < m$,

$$\|y_m - y_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m k(x_{k+1} - x_k) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m \rightarrow \infty} 0$$

в силу (3). Следовательно, по условию существует $y = \sup y_n$. Далее,

$$n(x - x_n) = \sup_{m > n} \sum_{k=n}^m n(x_{k+1} - x_k) \leq \sup_{m > n} \sum_{k=n}^m k(x_{k+1} - x_k) \leq y,$$

откуда

$$0 \leq x - x_n \leq y/n.$$

В силу монотонности нормы $x_n \rightarrow x$. Доказательство теоремы закончено.

3.4. Закопчим этот параграф рассмотрением функционалов на ВР.

Пусть $X(u)$ — u -идеал с u -нормой в K -пространстве X .

Теорема 3 (Гротендик [1]). Если последовательность $f_n \rightarrow 0$ в $(X(u))^*$ $(*)$ -слабо, то $f_n \rightarrow 0$ слабо.

Доказательство теоремы 3 и ее обобщений (см. Шефер — II) нетривиально и довольно длинно, поэтому мы его опускаем.

В частности, теорема 3 дает интересные результаты, когда $X(u) = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$. В качестве следствия мы докажем, что если $X = l^\infty$, то замкнутый шар B пространства X^* не является секвенциально $\sigma(X^*, X)$ -компактным (ср. стр. 235). Действительно, в противном случае он был бы по теореме 3 секвенциально слабо компактен в X^* , а тогда по теореме VIII.2.1 B слабо компактен. Следовательно, X^* , а тогда и l^∞ , рефлексивно, что не так (см. VI.2.1).

Лемма 1. Пусть X — (r) -полная ВР, $\{f_\alpha\}$ ($\alpha \in \Lambda$) — направление в X такое, что:

- 1) $\sup_{\alpha \in \Lambda} |f_\alpha(x)| < \infty$ для любого $x \in X$;
- 2) для любого $x \in X$ существует конечный $\lim f_\alpha(x) = f(x)$. Тогда $f \in X^\sim$.

Доказательство. Так как X — (r) -полна, то все u -идеалы полны. В силу теоремы Банаха — Штейнгауза (см. замечание 4 на стр. 267) сужение f на каждый u -идеал $X(u)$ непрерывно, а это и означает, что f ограничен на любом интервале, т. е. $f \in X^\sim$.

Следствие. Пусть X — K -пространство с тотальным $X^\sim$. Тогда:

- 1) любое $\sigma(X^\sim, X)$ -ограниченное множество M относительно компактно в этой топологии;

2) если Y — идеал в $X^\sim$, то любой интервал в Y компактен в топологии $\sigma(Y, X)$.

Доказательство. 1) В силу леммы III.3.5 достаточно доказать, что $\sigma(X^+, X)$ -замыкание множества M содержится в $X^\sim$, но это вытекает из леммы 1.

2) вытекает из 1) и следствия 1) теоремы-2.2.

Теорема 4. Пусть X — K -пространство, $\{f_m\}_{m=1}^\infty \subset X_n^\sim$, f — линейный функционал на X . Если для любого $x \in X$ имеем $f_m(x) \rightarrow f(x)$, то $f \in X_n^\sim$.

Доказательство. В силу леммы 1 $f \in X^\sim$. Очевидно, достаточно доказать, что для любого $u \in X_+$ сужение f на u -идеал $X(u)$, которое мы обозначим через g , (o) -непрерывно. Положим $g_m = f_m|_{X(u)}$. Тогда $g_m \in X(u)_n^\sim$, $g \in X(u)^\sim = X(u)^*$. Так как $g_m \rightarrow g$ $(*)$ -слабо в $X(u)^*$, то по теореме 3 $g_m \rightarrow g$ слабо. По следствию 2 теоремы III.3.2 выпуклые комбинации g'_m элементов g_m сходятся к g по норме в $X(u)^*$. Так как $g'_m \in X(u)_n^\sim$ и $X(u)_n^\sim$ — полоса в $X(u)^*$, а полосы в НР замкнуты по норме, то $g \in X(u)_n^\sim$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 4 непосредственно вытекает

Следствие 1. Если $X_n^\sim$ тотально на K -пространстве X , то пространство $(X_n^\sim; \sigma(X_n^\sim, X))$ секвенциально полно.

Следствие 2. Если K -пространство X (o) -рефлексивно, то пространство $(X, \sigma(X, X_n^\sim))$ секвенциально полно.

Теорема 5. Если X — НР с тотальным $X_n^\sim$, то $X^* \cap X_n^\sim$ разделяет точки на X .

Мы докажем этот результат только для K -пространств. Прежде всего доказательство теоремы VI.1.5 переносится на случай не σ -конечной меры, а тогда теорема 5 для K -пространства X вытекает из теоремы 2.5 о реализации.

Установим теперь важную теорему о строении $X^\sim$.

Теорема 6. Если X — ВР с тотальным $X_n^\sim$, то $X_s^\sim = (X_n^\sim)^d$, т. е. K -пространство $X^\sim$ разлагается в сумму двух дизъюнктивных полос $X_n^\sim$ и $X_s^\sim$.

Доказательство. Мы докажем теорему 6 в случае, когда X — K -пространство. По лемме 2.1 $X_s^\sim \subset (X_n^\sim)^d$. Обратно, возьмем $\varphi \in (X_n^\sim)^d$, $\varphi \geq 0$; $N_\varphi = \{x \in X: \varphi(|x|) = 0\}$. Ясно, что N_φ — идеал в X . Докажем, что N_φ одинаковой ширины с X , откуда получим, что $\varphi \in X_s^\sim$. Предположим, что это не так. Тогда, если мы обозначим $Y = (N_\varphi)^d$, то $Y \neq \{0\}$. Для любого $y \in Y$ положим $\|y\| = \varphi(|y|)$. Тогда Y — НР. Так как $X_n^\sim$ тотально на X , то $Y_n^\sim$ тотально на Y . По теореме 5 $Y^* \cap Y_n^\sim$ тотально на Y . Следовательно, найдется такой функционал f , что $f \in Y^* \cap Y_n^\sim$, $f > 0$ и $f(y) \leq \|y\| = \varphi(y)$ для любого $y \in Y$.

Для любого $x \in X$ положим

$$f_1(x) = f([Y]x).$$

Тогда $0 < f_1 \in X_n^\sim$, $0 \leq f_1 \leq \varphi \in (X_n^\sim)^d$. Следовательно, $f_1 = 0$, чем получено противоречие.

Из теоремы 6, в частности, получаем, что всякий непрерывный функционал на НИП единственным образом разлагается в сумму функционала, допускающего интегральное представление, и сингулярного функционала. Этот результат важен в различных приложениях (и, прежде всего, в оптимальном управлении и выпуклом анализе, см. Дубовицкий, Милютин [2]). Частным случаем теоремы 6 является следующая классическая теорема Иосиды — Хьюитта *) о представлении функционалов на $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$.

Теорема 7 (Иосида — Хьюитт). Если мера μ конечна, то любой линейный непрерывный функционал f на $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ единственным образом разлагается в сумму $f = f_1 + f_2$, где

$$f_1(x) = \int_T x(t) y(t) d\mu, \quad y \in L^1(T, \Sigma, \mu),$$

а f_2 обладает тем свойством, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $A \in \Sigma$, $\mu(T \setminus A) < \varepsilon$, такое, что $f_2(x) = 0$, если $\text{supp } x \subset A \pmod{\mu}$.

§ 4. KB-пространства

4.1. В этом параграфе мы кратко рассмотрим БР с условиями (A), (B) и (C), аналогичными введенным в IV.3.2 **).

Пусть X — нормированная решетка.

Говорят, что норма в X *порядково непрерывна* или что в X выполнено условие (A), если

$$\text{из } 0 \leq x_\alpha \downarrow 0 \text{ следует } \|x_\alpha\| \rightarrow 0.$$

Говорят, что норма в X *порядково полунепрерывна* или, что в X выполнено условие (C), если

$$\text{из } 0 \leq x_\alpha \uparrow x \in X \text{ следует } \sup \|x_\alpha\| = \|x\|.$$

Говорят, что норма в X *монотонно полна* или, что в X выполнено условие (B), если

$$\text{из } 0 \leq x_\alpha \uparrow, x_\alpha \in X, \sup \|x_\alpha\| < \infty \text{ следует,}$$

$$\text{что существует элемент } x \in X, \text{ для которого } x_\alpha \uparrow x.$$

Если аналоги этих условий выполнены только для последовательностей, то мы будем говорить соответственно о *порядковой σ -непрерывности* или условиях (A_σ), *порядковой σ -полунепрерывности* или условию (C_σ), *монотонной σ -полноте* или условию (B_σ). Как мы увидим ниже, в случае НИП на пространстве с σ -конечной

*) Теорема Иосиды — Хьюитта неоднократно обобщалась. В окончательном виде теорема 6 была доказана независимо Г. Я. Лозановским и в работе В. Люксембурга [1]. См. также Лозановский [3].

**) Условия (A) и (B) введены Л. В. Канторовичем, (C) — Х. Накано.

мерой соответствующие условия для последовательностей и для направлений эквивалентны, т. е. введенная терминология согласована с терминологией из IV.3.2.

4.2. Рассмотрим условие (A). Пусть X — нормированное K -пространство. В Вулих — I на с. 207 доказано, что из условия (A_σ) вытекает счетность типа K -пространства X , поэтому $(A) \Leftrightarrow (A_\sigma)^*$. Очевидно также, что если в X выполнено условие (A), то из $x_\alpha \rightarrow x$ вытекает, что $x_\alpha \rightarrow x$ по норме.

Мы рассмотрим сначала условие (A) в связи с классом (o) -непрерывных функционалов. Некоторые результаты в этом направлении для БИП были приведены в § 1 главы VI; здесь мы их обобщим и дополним новыми теоремами.

Лемма 1. Если X — НР и $\{x_\alpha\}$ — направление в X такое, что $x_\alpha \downarrow$ и $x_\alpha \rightarrow x$ в слабой топологии, то $x_\alpha \rightarrow x$ по норме.

Доказательство. Предположим противное. Тогда можно считать, что при всех α

$$\|x_\alpha - x\| \geq \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Так как по следствию 2 теоремы 2.2 $x_\alpha \downarrow x$, то $x_\alpha - x \geq 0$ при любом α . В силу того, что $x_\alpha \rightarrow x(\sigma(X, X^*))$, найдется элемент $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\alpha_i}$, где $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, такой, что $\|y - x\| < \varepsilon/2$. Возьмем $\alpha \geq \alpha_i$ ($1 \leq i \leq n$). Тогда

$$0 \leq x_\alpha - x \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\alpha_i} - x,$$

откуда $\|x_\alpha - x\| < \varepsilon/2$, что противоречит (1).

Теорема 1. Если X — НР, то $X_n^\sim \supset X^*$ тогда и только тогда, когда в X выполнено условие (A).

Доказательство. Если $X_n^\sim \supset X^*$ и $0 \leq x_\alpha \downarrow 0$, то $x_\alpha \rightarrow 0$ в слабой топологии, а тогда по лемме 1 $x_\alpha \rightarrow 0$ по норме.

Если в X выполнено (A), $f \in X^*$ и $x_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$, то $x_\alpha \rightarrow 0$ по норме, откуда $f(x_\alpha) \rightarrow 0$. Следовательно, $f \in X_n^\sim$.

Теорема 2. Пусть X — банахово K -пространство. Следующие условия эквивалентны:

- 1) в X выполнено условие (A);
- 2) интервалы в X слабо компактны;
- 3) если $\pi: X \rightarrow X^{**}$ — каноническое вложение, то $\pi(X)$ — идеал в X^{**} .

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 3). Так как в X выполнено (A), то по теоремам 1 и 3.1 $X^* = X_n^\sim$. Тогда по теореме 2.2 $\pi(X)$ — идеал в X^{**} .

*) Более того, если X — нормированное K_σ -пространство с условием (A_σ) , то X — K -пространство с условием (A). В общем случае из (A_σ) не следует (A).

3) $\Rightarrow$ 2). Возьмем произвольный интервал I в X . Так как $\pi(X)$ — идеал в X^{**} , то $\pi(I)$ — интервал в X^{**} . По следствию леммы 3.1 интервал $\pi(I)$ (*)-слабо компактен, а тогда интервал I слабо компактен.

2) $\Rightarrow$ 1). В силу теоремы 1 достаточно доказать, что $X^* \subset \tilde{X}_n$. Пусть $f \in X^*$. Предположим, что $f \notin \tilde{X}_n$. Тогда найдутся направление $x_\alpha \downarrow 0$ и число $\varepsilon > 0$, для которых

$$|f(x_\alpha)| \geq \varepsilon. \quad (2)$$

Так как можно считать, что $x_1 \geq x_\alpha$ при всех α , то в силу слабой компактности интервалов найдется поднаправление $x_\beta \rightarrow x(\sigma(X, X^*))$. По следствию теоремы 2.2 $x = 0$, откуда $f(x_\beta) \rightarrow 0$, что противоречит (2).

Рассмотрим теперь одну интересную характеристику банаховых K -пространств с условием (A), формулируемую только в терминах теории B -пространств, без привлечения порядка. Предварительно приведем одну вспомогательную теорему.

Пусть X — НР. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ в X убывает вбок к нулю, и писать $x_n \rightarrow 0$, если $x_n \downarrow 0$ и $x_n - x_{n+1} \downarrow x_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Теорема 3. Если X — нормированное K -пространство, в котором из $x_n \rightarrow 0$ вытекает $\|x_n\| \rightarrow 0$, то в X выполнено условие (A).

Доказательство. Пусть $x_n \downarrow 0$. Фиксируем число $\varepsilon > 0$ и положим $q_n = (x_n - \varepsilon x_1)_+$. Тогда $q_n \downarrow 0$ и $[q_n]x_1 \rightarrow 0$. Следовательно, $\|[q_n]x_1\| \rightarrow 0$. Так как

$$x_n = [q_n]x_n + (x_n - [q_n]x_n) \leq [q_n]x_1 + \varepsilon x,$$

то

$$\|x_n\| \leq \|[q_n]x_1\| + \varepsilon \|x_1\|,$$

откуда $\|x_n\| \rightarrow 0$, т. е. в X выполнено условие (A_ε). Как уже было отмечено, из (A_ε) следует (A).

Лемма 2. Если X — банахово K -пространство без условия (A), то найдется последовательность $\{z_n\} \subset X_+$ такая, что:

- 1) $z_n \downarrow z_m$ ($n \neq m$);
- 2) $\|z_n\| = 1$ ($n \in \mathbb{N}$);
- 3) существует $\sup z_n = u \in X$.

Доказательство. Так как в X нет условия (A), то в X не выполнено условие теоремы 3. Тогда существует последовательность $x_n \rightarrow 0$, $\|x_n\| \geq \varepsilon > 0$. Эта последовательность не фундаментальна. В противном случае $x_n \rightarrow x$ по норме, а так как $x_n \downarrow 0$, то $x = 0$, что противоречит $\|x_n\| \geq \varepsilon > 0$. Следовательно, найдутся $\delta > 0$ и $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ такие, что $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \geq \delta$. Положим

$$z_k = \frac{x_{n_k} - x_{n_{k+1}}}{\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|}.$$

Тогда 1) и 2) очевидны, а 3) вытекает из оценки $z_k \leq x_1/\delta$.

Лемма 3. Если X — банахово K -пространство с условием (A), имеющее слабую единицу, то замкнутый единичный шар B_{X^*} пространства X^* (*)-слабо секвенциально компактен.

Доказательство. Пусть x_0 — слабая единица в X ; $I = [-x_0, x_0]$. Так как для любого элемента $x \in X_+$ имеем $x \wedge nx_0 \uparrow x$ (см. Вулих — I, лемма IV.2.1), то в силу того, что в X выполнено условие (A), получаем, что линейная оболочка интервала плотна по норме (а тогда и слабо) в X . Тогда функционал

$$\rho(f) = \sup \{|f(x)| : x \in I\}, \quad f \in X^*,$$

оказывается нормой на X^* . Обозначим получившееся нормированное пространство через X_ρ^* . Так как в пространстве X выполнено условие (A), то по теореме 2 интервал I слабо компактен. Поэтому по теореме Макки — Аренса (см. теорему III.3.8) сопряженное к нормированному пространству X_ρ^* можно отождествить с линейной оболочкой интервала I . Следовательно, топология $\sigma(X^*, X)$ сильнее слабой топологии пространства X_ρ^* , а тогда на шаре B_{X^*} совпадают слабые топологии $\sigma(X^*, X)$ и $\sigma(X_\rho^*, (X_\rho^*)^*)$. Поэтому по теореме VIII.2.1, примененной к нормированному пространству X_ρ^* , получаем, что шар B_{X^*} секвенциально компактен в обеих слабых топологиях *).

Теперь мы можем сформулировать и доказать упоминавшийся критерий, полученный Г. Я. Лозановским [1].

Теорема 4. Для того чтобы в банаховом K -пространстве X было выполнено условие (A), необходимо и достаточно, чтобы в X не было замкнутого подпространства Y , изоморфного, в смысле теории B -пространств, пространству l^∞ .

Доказательство. Необходимость. Предположим противное. Тогда существует изоморфизм $U: l^\infty \rightarrow Y$, где Y — замкнутое подпространство в X . Пусть $Y_0 = U(c_0)$, Z — полоса, порожденная Y_0 в X . Так как пространство Y_0 сепарабельно, то в Z есть слабая единица. Действительно, если $\{x_n\}$ — счетное плотное в Y_0 множество, то слабой единицей будет, как легко

$$\text{видеть, элемент } x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|x_n\|} |x_n|.$$

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность ортов в c_0 . Тогда любой элемент из c_0 записывается в виде $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$, где $\xi_k \rightarrow 0$. Положим

$$f_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \right) = \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*) Теорема VIII.2.1 сформулирована для B -пространства, но импликация 1) $\Rightarrow$ 2) справедлива в любом нормированном пространстве, что очевидно после перехода к пополнению.

Имеем функционалы $f_n \in (c_0)^*$ и $\|f_n\| = 1$ ($n \in N$). Определим функционалы g_n на Y_0 по формуле

$$g_n(y) = f_n(U^{-1}(y)), \quad y \in Y_0.$$

Тогда $\|g_n\| \leq \|f_n\| \|U^{-1}\| = \|U^{-1}\|$ ($n \in N$), откуда множество $\{g_n\}$ ограничено по норме в Y_0^* . Продолжим каждый функционал g_n с сохранением нормы на Z . Получившиеся функционалы обозначим $\tilde{g}_n$. Тогда $\{\tilde{g}_n\}$ — ограниченное по норме множество в Z^* . В силу леммы 3 можно выбрать подпоследовательность $\tilde{g}_{n_m} \rightarrow \tilde{g} \in Z^*$ в топологии $\sigma(Z^*, Z)$. Для всех $x \in X$ положим

$$\tilde{g}_{n_m}(x) = \tilde{g}_{n_m}([Z]x), \quad \tilde{g}(x) = \tilde{g}([Z]x).$$

Тогда $\tilde{g}_{n_m} \rightarrow \tilde{g}(\sigma(X^*, X))$.

Если мы теперь положим $\varphi_{n_m} = U^* \tilde{g}_{n_m}$ и $\varphi = U^* \tilde{g}$, то $\varphi_{n_m} \rightarrow \varphi$ в $(*)$ -слабой топологии пространства $(l^\infty)^*$. По теореме 3.3 $\varphi_{n_m} \rightarrow \varphi$ в слабой топологии $(l^\infty)^*$. При естественном вложении пространство l^1 является полесой в $(l^\infty)^*$ (так как l^1 , очевидно, (o) -рефлексивно). Спроектируем наши функционалы на эту полосу. Тогда легко видеть, что $[l^1] \varphi_{n_m} \rightarrow [l^1] \varphi$ в слабой топологии пространства l^1 . Действительно, так как $[l^1]$ — оператор в $(l^\infty)^*$, то $[l^1]^*$ — оператор в $(l^\infty)^{**}$, и если $\psi \in (l^1)^* = (l^\infty)^{**}$, то $[l^1]^*(\psi) \in (l^\infty)^{**}$, откуда

$$([l^1] \varphi_{n_m})(\psi) = \varphi_{n_m}([l^1]^* \psi) \rightarrow \varphi([l^1]^* \psi) = ([l^1] \varphi)(\psi).$$

Тогда в силу теоремы VIII.3.4 $[l^1] \varphi_{n_m} \rightarrow [l^1] \varphi$ в l^1 по норме. Так как $(c_0)^* = l^1$, то мы можем рассматривать функционалы $[l^1] \varphi_{n_m}$ и $[l^1] \varphi$ как функционалы на c_0 , причем легко видеть, что это просто сужения соответствующих функционалов φ_{n_m} и φ с l^∞ на c_0 . Покажем, что $[l^1] \varphi_{n_m} = f_{n_m}$. Действительно, для произвольного орта e_k имеем

$$\begin{aligned} ([l^1] \varphi_{n_m})(e_k) &= \varphi_{n_m}(e_k) = (U^* \tilde{g}_{n_m})(e_k) = \tilde{g}_{n_m}(Ue_k) = \\ &= g_{n_m}(Ue_k) = f_{n_m}(e_k), \end{aligned}$$

откуда и получаем требуемое. Итак, мы получили, что последовательность $\{f_{n_m}\}$ сходится по норме в l^1 . Но это невозможно, ибо $\|f_n - f_m\| = 1$ при $n \neq m$. Полученное противоречие заканчивает доказательство необходимости.

Достаточность. Если в X не выполнено (A), то возьмем последовательность $\{z_n\}$ из леммы 2. Определим оператор

$U: l^\infty \rightarrow X$ по формуле: если $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, то

$$U(\xi) = (o) - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k z_k.$$

Далее, при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|\xi_n| z_n \leq |U(\xi)| \leq \|\xi\|_\infty u,$$

откуда

$$\|\xi\|_\infty \leq \|U(\xi)\|_X \leq \|\xi\|_\infty \|u\|.$$

Следовательно, подпространство $Y = U(l^\infty)$ изоморфно l^∞ . Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. Если банахово K -пространство X сепарабельно, то в X выполнено условие (A).

Доказательство. Если в X не выполнено (A), то по теореме 4 в X есть подпространство Y , изоморфное l^∞ . Так как l^∞ несепарабельно, то Y несепарабельно, что противоречит сепарабельности X .

Из следствия вытекает та часть теоремы IV.3.3, которую мы в главе IV не доказывали.

4.3. Рассмотрим условия (B) и (C). Если X — K -пространство счетного типа, то, очевидно, $(C) \Leftrightarrow (C_0)$. Таким образом, для НИП на пространстве с σ -конечной мерой эти условия совпадают. В общем случае это не так.

Условия (B) и (B_0) различны даже в классе K -пространств счетного типа, однако в случае НИП на пространстве с σ -конечной мерой μ $(B_0) \Leftrightarrow (B)$ и, таким образом, наша терминология согласована с IV.3.2. Действительно, пусть в таком НИП X выполнено (B_0) и направление $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ограничено по норме в X , а тогда по следствию теоремы IV.3.1 оно является ограниченным множеством в ТВП $S(T, \Sigma, \mu)$. Как показывает доказательство леммы III.1.1, $\sup_\alpha x_\alpha(t) < +\infty$ п. в., поэтому по след-

ствию 2 теоремы I.6.17 существует $x_0 = \sup x_\alpha \in S(T, \Sigma, \mu)$ и найдется последовательность $x_{\alpha_n} \uparrow x_0$. Так как $\{x_{\alpha_n}\}$ тоже ограничена по норме, то в силу (B_0) получаем, что $x_0 \in X$ и, таким образом, в X выполнено (B).

Из условия 3) теоремы 3.2 вытекает

Теорема 5. Если в нормированном K -пространстве X выполнено (B_0) , то X полно по норме.

Как показывает следующая теорема, пространств с условиями (B) и (C) очень много.

Теорема 6. Если X — НР, то в X^* выполнены условия (B) и (C).

Доказательство. Пусть направление $\{f_\alpha\} \subset X^*$, $0 \leq f_\alpha \uparrow$, ограничено по норме. Для $x \in X_+$ положим $f(x) = \sup f_\alpha(x) < +\infty$; для $x \in X$ положим $f(x) = f(x_+) - f(x_-)$. Тогда f — линейный функционал на X . Докажем, что $f \in X^*$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $x \in X_+$, $\|x\| \leq 1$, найдется α_x , для которого $f(x) \leq f_{\alpha_x}(x) + \varepsilon \leq \|f_{\alpha_x}\| + \varepsilon \leq \sup \|f_{\alpha}\| + \varepsilon$, откуда $\|f\| \leq \sup \|f_{\alpha}\| < \infty$. Следовательно, $f \in X^*$, $f_{\alpha} \uparrow f$ и $\|f\| = \sup \|f_{\alpha}\|$, т. е. в X^* выполнены (C) и (B). Так как $X^* \cap X_n^{\sim}$ — полоса в X^* , то в этом пространстве тоже выполнены условия (B) и (C).

Важнейшее свойство пространств с условием (C) содержится в следующей теореме.

Теорема 7 (Накано — Амеия — Мори). Если X — нормированное K -пространство с тотальным $X_n^{\sim}$, то эквивалентны следующие утверждения:

- 1) в X выполнено условие (C);
- 2) $\|x\| = \sup \{ \|f(x)\| : f \in X^* \cap X_n^{\sim}, \|f\| \leq 1 \}$ для любого $x \in X$;
- 3) каноническое вложение $\pi: X \rightarrow (X_n^{\sim} \cap X^*)^*$ сохраняет норму.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Теорема VI.1.6 переносится на НИП без условия σ -конечности меры. Теперь применима теорема 2.5.

2) $\Rightarrow$ 3) очевидно.

3) $\Rightarrow$ 1), так как по теореме 6 в $(X_n^{\sim} \cap X^*)^*$ выполнено (C).

Если X полно, то $X_n^{\sim} \subset X^*$ и мы можем рассматривать на $X_n^{\sim}$ норму, индуцированную из X^* . Тогда определены банаховы K -пространства $(X_n^{\sim})^*$ и $(X_n^{\sim})_n^{\sim}$.

Теорема 8. Если X — банахово K -пространство с тотальным $X_n^{\sim}$, то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) в X выполнены условия (B) и (C);
- 2) каноническое вложение $\kappa: X \rightarrow (X_n^{\sim})_n^{\sim}$ есть изометрия X на $(X_n^{\sim})_n^{\sim}$;
- 3) если $\pi: X \rightarrow X^{**}$ — естественное вложение, то существует проектор P единичной нормы из X^{**} на $\pi(X)$;
- 4) любая центрированная система замкнутых шаров в X имеет непустое пересечение.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). В силу теоремы 7 κ сохраняет норму. Докажем, что $\kappa(X) = (X_n^{\sim})_n^{\sim}$. Как отмечено в 2.3, $\kappa(X)$ — фундамент в $(X_n^{\sim})_n^{\sim}$. Следовательно, для любого $F \in (X_n^{\sim})_n^{\sim}$, $F > 0$, найдется направление $\{x_{\alpha}\} \subset X_+$ такое, что $\kappa(x_{\alpha}) \uparrow F$. Тогда $\|x_{\alpha}\| = \|\kappa(x_{\alpha})\| \leq \|F\|$ и в силу условия (B) существует $x = \sup x_{\alpha}$. Так как отображение κ сохраняет грани, то $F = \kappa(x) \in \kappa(X)$.

2) $\Rightarrow$ 1) вытекает из теоремы 6 и 2.2.

2) $\Rightarrow$ 3). Для $F \in X^{**}$ обозначим через F_1 сужение F на $X_n^{\sim}$. Положим $F_2 = [(X_n^{\sim})_n^{\sim}](F_1)$. Тогда $F_2 \in (X_n^{\sim})_n^{\sim} = \kappa(X)$ и, следовательно, найдется $x_F \in X$, для которого $F_2 = \kappa(x_F)$. Положим $P(F) = \pi(x_F)$ и проверим, что P — требуемый проектор. Докажем,

что для любого $F = \pi(x)$ имеем

$$P(F) = F.$$

Так как множество $X_n^\sim$ тотально на $\pi(X)$, то достаточно доказать, что $x = x_F$. В силу того, что

$$F_1(f) = f(x), \quad f \in X_n^\sim,$$

имеем $F_2 = \kappa(x)$, откуда $x = x_F$.

Нам остается проверить, что $\|P\| = 1$. Пусть $F \in X^{**}$, $\|F\| \leq 1$, причем $P(F) = \pi(x_F)$. Имеем очевидную цепочку

$$\|P(F)\| = \|\pi(x_F)\| = \|x_F\| = \|\kappa(x_F)\| = \|F_2\| \leq \|F_1\| \leq \|F\|.$$

Отсюда $\|P\| \leq 1$. Так как уже доказано, что P оставляет элементы $\pi(X)$ на месте, то $\|P\| = 1$.

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть $\{B_\varepsilon\}$ — центрированная система замкнутых шаров в X , $\bar{B}_\varepsilon$ — $(*)$ -слабое замыкание $\pi(B_\varepsilon)$ в X^{**} . В силу $(*)$ -слабой компактности шаров $\cap \bar{B}_\varepsilon$ не пусто в X^{**} . Пусть $F \in \cap \bar{B}_\varepsilon$. Тогда $P(F) \in \cap B_\varepsilon$.

4) $\Rightarrow$ 1) — это интересный результат А. А. Седаева [1] (доказательство см. Бухвалов, Векслер, Лозановский [1]). Подчеркнем, что свойство 4), очевидно, является изометрическим инвариантом.

Интересные свойства пространств с условиями (В) и (С) — приведены также в работе Лозановского [2].

4.4. Банахово K -пространство, в котором выполнены условия (A_0) и (B_0) , называется KB -пространством. Как отмечено в 4.2, в KB -пространстве выполнено условие (А). В силу теоремы VII.6.3 (Вулих — I) в KB -пространстве выполнено также условие (В), откуда по теореме 8 KB -пространство (o) -рефлексивно.

Теорема 9. Если X — БР, то эквивалентны следующие утверждения:

- 1) X — KB -пространство;
- 2) если $\pi: X \rightarrow X^{**}$ — каноническое вложение, то $\pi(X)$ — полоса в X^{**} ;
- 3) X слабо секвенциально полно;
- 4) в X нет замкнутого подпространства Y , изоморфного в смысле теории B -пространств пространству c_0 ;
- 5) если $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in X$, и $\sup \|x_n\| < \infty$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится по норме.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Так как в X выполнено (А), то $X^* = X_n^\sim$. Тогда в силу (o) -рефлексивности X по теореме 2.3 $\pi(X)$ — полоса в X^{**} .

2) $\Rightarrow$ 3). По теореме 2.2 $X^* = X_n^\sim$, а тогда по теореме 2.3 пространство X (o) -рефлексивно. Отсюда по следствию 2 теоремы 3.4 X слабо секвенциально полно.

3) $\Rightarrow$ 4). Предположим противное. Тогда в X есть замкнутое подпространство Y , изоморфное c_0 . Так как X слабо секвенциально полно, то в силу следствий 1 и 3 теоремы III.3.2 пространство Y , а тогда и c_0 , тоже слабо секвенциально полно. Это, однако, не так. Действительно, если $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$, где

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{если } k \leq n, \\ 0, & \text{если } k > n, \end{cases}$$

то из равенства $(c_0)^* = l^1$ легко получаем, что $\{x_n\}$ — слабая последовательность Коши, которая не сходится в c_0 .

4) $\Rightarrow$ 5). Предположим противное. Тогда найдется ограниченная по норме последовательность $\{x_n\}$, $0 \leq x_n \uparrow$, которая не сходится по норме. Положим

$$\rho_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\|, \quad \rho = \inf \rho_n$$

(предел в определении ρ_n существует в силу монотонности $\{x_n\}$). Так как $\{x_n\}$ — не последовательность Коши, то $\rho > 0$. Разрежая $\{x_n\}$, можно добиться, чтобы при $m < n$ было

$$(3/4)\rho \leq \|x_n - x_m\| \leq (5/4)\rho.$$

Пусть Φ — пространство обрывающихся последовательностей (см. с. 145). Определим оператор $U: \Phi \rightarrow X$ по формуле

$$U(z) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_{i+1} - x_i),$$

где $z = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, 0, 0, \dots) \in \Phi$. Тогда

$$U(z) \leq \|z\| (x_{m+1} - x_1),$$

откуда

$$\|U(z)\| \leq \|z\| \|x_{m+1} - x_1\| \leq (5/4)\rho \|z\|. \quad (3)$$

Теперь получим оценку для $\|U(z)\|$ снизу. Пусть

$$\lambda_i^+ = \max(\lambda_i, 0), \quad \lambda_i^- = \max(-\lambda_i, 0).$$

Положим

$$u = \sum_{i=1}^m \lambda_i^+ (x_{i+1} - x_i), \quad v = \sum_{i=1}^m \lambda_i^- (x_{i+1} - x_i).$$

Тогда

$$U(z) = u - v, \quad U(|z|) = u + v.$$

Если $h^+ = \max\{\lambda_i^+ : 1 \leq i \leq m\}$, $h^- = \max\{\lambda_i^- : 1 \leq i \leq m\}$, то $\|z\| = \max(h^+, h^-)$. Предположим для определенности, что $\|z\| = h^+$. Так как

$$u = \sum_{i=1}^m \lambda_i^+ (x_{i+1} - x_i) \geq \lambda_j^+ (x_{j+1} - x_j), \quad 1 \leq j \leq m,$$

то

$$\|u\| \geq \lambda_j^+ \|x_{j+1} - x_j\| \geq \lambda_j^+ (3/4)\rho, \quad 1 \leq j \leq m,$$

откуда $\|u\| \geq (3/4)\rho\|z\|$. Следовательно, используя (3), получаем

$$\begin{aligned} \|U(z)\| = \|u - v\| &= \|2u - (u + v)\| \geq 2\|u\| - \|u + v\| \geq \\ &\geq (6/4)\rho\|z\| - \|U(|z|)\| \geq (1/4)\rho\|z\|. \end{aligned} \quad (4)$$

Сопоставляя (3) и (4), окончательно получаем

$$(1/4)\rho\|z\| \leq \|U(z)\| \leq (5/4)\rho\|z\|, \quad z \in \Phi.$$

Так как пространство Φ плотно в c_0 , то U продолжается до изоморфизма c_0 на подпространство в X , что противоречит 4).

5) $\Rightarrow$ 1). Покажем, что в X выполнено условие (A_0) . Пусть $x_n \downarrow 0$. Тогда последовательность $\{x_1 - x_n\}$ ограничена по норме и $0 \leq x_1 - x_n \uparrow$. По условию $x_1 - x_n$ сходится по норме к некоторому элементу $\tilde{x}$. Так как $x_1 - x_n \uparrow x_1$, то $\tilde{x} = x_1$, откуда $x_n = (x_1 - x_n) \downarrow 0$ по норме.

Выполнение условия (B_0) очевидно. Тогда X — банахово K_0 -пространство с условиями (A_0) и (B_0) . Как отмечалось в сноске на с. 383, X — K -пространство и, следовательно, X — KB -пространство.

Доказательство теоремы полностью закончено.

Теорема 9 дает легко проверяемый критерий слабой секвенциальной полноты в классе БР, так как проверка выполнения условий (A) и (B) в конкретных пространствах, как правило, затруднений не вызывает. Прежде всего отметим, что в силу теоремы 9 нерефлексивное пространство $L^1(T, \Sigma, \mu)$ слабо секвенциально полно. Остановимся еще на случае пространств Орлича на пространстве с конечной непрерывной мерой. По теореме IV.3.9 пространство Орлича L_M является KB -пространством в том и только в том случае, когда функция M удовлетворяет Δ_2 -условию. Отсюда L_M слабо секвенциально полно тогда и только тогда, когда M удовлетворяет Δ_2 -условию. Аналогично получаем, что БФП E_M , в котором выполнено условие (A), не является слабо секвенциально полным, если M не удовлетворяет Δ_2 -условию.

Понятие KB -пространства позволяет дать легко проверяемый критерий рефлексивности (в смысле теории B -пространств).

Теорема 10 (Огасавара). Если X — БР, то эквивалентны следующие утверждения:

- 1) X рефлексивно;
- 2) X и X^* суть KB -пространства.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Так как X^* тоже рефлексивно, то достаточно доказать, что X — KB -пространство, но это вытекает из определения рефлексивности и пункта 2) теоремы 9.

2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим каноническое вложение $\pi: X \rightarrow X^{**}$. Так как X — KB -пространство, то $X^* = X_n^*$ и $\pi(X) = (X_n^*)_n^\sim = (X^*)_n^\sim$. В силу того, что X^* — KB -пространство, $X^{**} = (X^*)_n^\sim$, откуда $\pi(X) = X^{**}$ и, следовательно, X рефлексивно.

§ 5. Выпуклые множества, замкнутые относительно сходимости по мере

5.1. В этом параграфе с помощью изложенных результатов теории векторных решеток показывается, что изучение ограниченных выпуклых множеств, замкнутых относительно сходимости по мере, в (o) -рефлексивных ИП может быть в определенном смысле сведено к изучению выпуклых компактных множеств в подходящих ТВП. При этом необходимость использовать нетривиальные результаты теории ВР возникает уже в случае классического пространства $L^1(0, 1)$.

Начнем с некоторых предварительных результатов.

Пусть X — ВР, Y — идеал в K -пространстве $X^\sim$, тотальный на X . Рассмотрим локально выпуклую топологию $|\sigma|(X, Y)$ на X , порожденную множеством полунорм

$$p_f(x) = f(|x|), \quad x \in X,$$

где f пробегает все Y_+ .

Отметим два свойства ЛВП $(X, |\sigma|(X, Y))$.

1) Топология $|\sigma|(X, Y)$ является топологией равномерной сходимости на множестве всех интервалов в Y .

2) Топология $|\sigma|(X, Y)$ согласуется с двойственностью $\langle X, Y \rangle$.

Утверждение 1) получается из формулы

$$p_f(x) = f(|x|) = \sup \{ |g(x)| : |g| \leq f \}.$$

По следствию леммы 3.1 все интервалы в Y $\sigma(Y, X)$ -компактны. Поэтому утверждение 2) вытекает из 1) и теоремы Макки-Аренса (см. теорему III.3.8).

Пусть всюду далее в этом параграфе X — ФП на (T, Σ, μ) , где мера μ σ -конечна, и $X_n^\sim$ тотально на X . Напомним, что тогда $X_n^\sim$ изоморфно X' и $\text{supp } X' = T$ (теорема VI.1.1).

Лемма 4. Пусть Y — фундамент в $X_n^\sim$. Если направление $x_\alpha \rightarrow 0$ в топологии $|\sigma|(X, Y)$, то $x_\alpha \rightarrow 0(\mu)$.

Доказательство. В силу изоморфизма между $X_n^\sim$ и X' фундамент Y можно отождествить с ФП в X' . По следствию 2 леммы IV.3.1 существует такое разбиение $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ множества T , что $\chi_{A_n} \in Y$ и $0 < \mu(A_n) < +\infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{A_n} |x_\alpha| d\mu \rightarrow 0.$$

Отсюда $x_\alpha \rightarrow 0(\mu)$ на каждом A_n и, следовательно, $x_\alpha \rightarrow 0(\mu)$.

Лемма 2. Пусть Y — фундамент в $X_n^\sim$. Если $x_\alpha \rightarrow 0(\sigma(X, Y))$, то найдется направление $y_\beta \rightarrow 0(\mu)$, где каждый элемент y_β есть выпуклая комбинация элементов $\{x_\alpha\}$.

Доказательство. Так как сопряженное к $(X, |\sigma|(X, Y))$ есть Y , то существует направление $y_\beta \rightarrow 0(|\sigma|(X, Y))$, где y_β указанного вида (см. следствие 2 теоремы III.3.2). По лемме 1 $y_\beta \rightarrow 0(\mu)$.

Лемма 3. Пусть Y — фундамент в $X_n^\sim$, $\{x_\alpha\}$ — направление в X ; $x, x_0 \in X$. Если существует $y \in S(T, \Sigma, \mu)$ такой, что $|x_\alpha| \leq y$ при любом α , $x_\alpha \rightarrow x(\mu)$ и $x_\alpha \rightarrow x_0(\sigma(X, Y))$, то $x = x_0$.

Доказательство. В силу следствия 2 леммы IV.3.1 можно считать, что мера μ конечна и $y \in X$. Если $x' \in Y$, то существуют последовательность $\{x_{\alpha_n}\}$ такая, что

$$\left| \int_T (x_{\alpha_n} - x_0) x' d\mu \right| < 1/n, \quad x_{\alpha_n} \rightarrow x(\mu).$$

Тогда по теореме Лебега о мажорированной сходимости получаем, что $\int_T (x - x_0) x' d\mu = 0$ при любом $x' \in Y$, откуда $x = x_0$.

Если M — подмножество в $S = S(T, \Sigma, \mu)$, то через $\tau(M)$ обозначим топологию на M , индуцированную из S .

Лемма 4. Пусть X — (o) -рефлексивно, а множество $M \subset X$ ограничено в слабой топологии $\sigma(X, X_n^\sim)$. Следующие утверждения эквивалентны:

1) M замкнуто в ТВП $S(T, \Sigma, \mu)$;

2) M замкнуто в $(X, \tau(X))$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1). Так как $M \sigma(X, X_n^\sim)$ -ограничено, то оно $|\sigma|(X, X_n^\sim)$ -ограничено (см. теорему III.3.3). Пусть $\{x_\alpha\} \subset M$, $x \in S$ и $x_\alpha \rightarrow x(\mu)$. Докажем, что $x \in X$. Так как $X = X''$, то для этого достаточно доказать, что для любого $x' \in X'$ имеем $\int |xx'| d\mu < \infty$, но это очевидно из $|\sigma|(X, X_n^\sim)$ -ограниченности M и теоремы Фату.

5.2. Пусть далее X — ФП, причем $X = X''$, т. е. X (o) -рефлексивно. Обозначим через κ каноническое вложение X в $(X_n^\sim)^\sim$. Тогда $\kappa(X) = (X_n^\sim)_n^\sim$ — полоса в K -пространстве $(X_n^\sim)^\sim$. Обозначим через Pr проектор на полосу $\kappa(X)$.

Лемма 5. Если направление $\{x_\alpha\}$ в X таково, что $\kappa(x_\alpha) \rightarrow F$ в слабой топологии $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$ и $\text{Pr } F = \pi(x)$ ($x \in X$), то существует фундамент Y в $X_n^\sim$ такой, что $x_\alpha \rightarrow x(\sigma(X, Y))$.

Доказательство. В силу теоремы 3.6 K -пространство $(X_n^\sim)^\sim$ разлагается в сумму двух дизъюнктивных полос $(X_n^\sim)_n^\sim = \kappa(X)$ и $(X_n^\sim)_s^\sim$. Если $F_1 = F - \kappa(x)$, то $F_1 \in (X_n^\sim)_s^\sim$. Тогда множество $Y = \{f \in X_n^\sim : |F_1|(|f|) = 0\}$ является фундаментом

в $X_n^\sim$. Кроме того, для любого $f \in Y$ имеем

$$f(x_\alpha) = [\kappa(x_\alpha)](f) \rightarrow F(f) = [\kappa(x)](f) + F_1(f) = f(x),$$

т. е. $x_\alpha \rightarrow x(\sigma(X, Y))$.

Леммы 2 и 5 являются ключевыми при доказательстве следующей основной теоремы этого параграфа.

Теорема 1. Пусть X — (σ) -рефлексивное ФП, V — непустое выпуклое подмножество в X , W — $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$ -замыкание множества $\kappa(V)$. Тогда:

а) если V замкнуто в $(X, \tau(X))$, то

$$\text{Pr } W = \kappa(V); \quad (1)$$

б) если V $\sigma(X, X_n^\sim)$ -ограничено и удовлетворяет условию (1), то V замкнуто в $(X, \tau(X))$.

Доказательство. а) Пусть V замкнуто в $(X, \tau(X))$. Очевидно, что $\kappa(V) \subset \text{Pr } W$. Пусть $F \in W$ и $\kappa(x) = \text{Pr } F$. Тогда существует направление $\{x_\alpha\} \subset V$ такое, что $\kappa(x_\alpha) \rightarrow F$ в топологии $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$. В силу леммы 5 существует фундамент Y в $X_n^\sim$ такой, что $x_\alpha \rightarrow x(\sigma(X, Y))$. Так как V выпукло и (μ) -замкнуто, то по лемме 2 $x \in V$ и, следовательно, $\kappa(x) \in \kappa(V)$.

б) Так как множество $\kappa(V)$ $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$ -ограничено, то по следствию леммы 3.1 оно относительно компактно в этой топологии, а следовательно, множество W компактно.

Так как мера μ σ -конечна, для доказательства (μ) -замкнутости V достаточно проверить, что из $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset V$, $x_n \rightarrow x$ п. в., $x \in X$, следует $x \in V$. Так как $x_n \rightarrow x$ п. в., то существует $y \in S$ такой, что $|x_n| \leq y$ ($n \in \mathbb{N}$).

В силу компактности W существует поднаправление $\{x_\alpha\}$ в $\{x_n\}$, которое сходится в топологии $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$ к некоторому $F \in W$. Тогда в силу условия (1) и леммы 5 существуют фундамент Y в $X_n^\sim$ и элемент $x_0 \in V$ такие, что $x_\alpha \rightarrow x_0(\sigma(X, Y))$. Так как $x_\alpha \rightarrow x(\mu)$ как поднаправление (μ) -сходящейся последовательности, то по лемме 3 $x = x_0 \in V$, чем теорема полностью доказана.

Именно теорема 1 и позволяет сводить изучение выпуклых ограниченных (μ) -замкнутых множеств к рассмотрению $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$ -компактных множеств. Пусть по-прежнему X — (σ) -рефлексивное ФП.

Теорема 2. Пусть V_1 и V_2 — непустые, выпуклые, непересекающиеся множества в X , замкнутые в $(X, \tau(X))$. Если хотя бы одно из них $\sigma(X, X_n^\sim)$ -ограничено, то они строго отделены функционалом из $X_n^\sim$, т. е. существует $f \in X_n^\sim$ такой, что $\sup \{f(x): x \in V_1\} < \inf \{f(x): x \in V_2\}$.

Доказательство. Пусть W_i — $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$ -замыкание множества $\kappa(V_i)$ ($i = 1, 2$). Тогда в силу (1) $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Ес-

ли, скажем, V_1 ограничено, то $W_1 \sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$ -компактно (см. начало доказательства п. б) в теореме 1). Теперь применяем обычную теорему отделимости (см. теорему III.2.6).

Теорема 3. Пусть $\{V_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — центрированная система выпуклых, $\sigma(X, X_n^\sim)$ -ограниченных, замкнутых в $(X, \tau(X))$ подмножеств пространства X . Тогда $\bigcap_{\xi \in \Xi} V_\xi$ непусто.

Доказательство. Пусть $W_\xi = \sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$ -замыкание $\kappa(V_\xi)$. Так как W_ξ компактно в этой топологии, то $\bigcap_{\xi \in \Xi} W_\xi$ непусто. Тогда по теореме 1(a) $\bigcap_{\xi \in \Xi} V_\xi$ непусто.

Теорема 4. Пусть V_1 и V_2 — выпуклые, $\sigma(X, X_n^\sim)$ -ограниченные, замкнутые в $(X, \tau(X))$ подмножества пространства X . Тогда $V = V_1 + V_2$ замкнуто в $(X, \tau(X))$.

Доказательство. Пусть $W_i = \sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$ -замыкание $\kappa(V_i)$ ($i = 1, 2$). Тогда, если $W = W_1 + W_2$, то

$$\text{Pr } W = \text{Pr } W_1 + \text{Pr } W_2 = \kappa(V_1) + \kappa(V_2) = \kappa(V)$$

в силу теоремы 1(a). Так как W есть, очевидно, $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$ -замыкание V , то из теоремы 1(б) получаем, что V (μ) -замкнуто.

Теорема 5. Пусть X — БФП с условиями (B) и (C). Пусть V_1 и V_2 — непустые выпуклые множества в X , замкнутые в $(X, \tau(X))$. Если хотя бы одно из них ограничено по норме в X , то существуют $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ такие, что

$$\|v_1 - v_2\|_X = \inf \{\|x_1 - x_2\|_X : x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}.$$

Доказательство. Пусть V_1 ограничено по норме. Следовательно, ближайший к V_1 элемент $v_2 \in V_2$ достаточно искать в пересечении V_2 с замкнутым шаром достаточно большого радиуса. В силу условия (C) по лемме IV.3.4 это пересечение (μ) -замкнуто. Поэтому V_2 можно также считать ограниченным по норме. Пусть $W_i = \sigma((X_n^\sim)^*, X_n^\sim)$ -замыкание $\kappa(V_i)$ ($i = 1, 2$). Так как W_i $(*)$ -слабо компактны, то существуют $F_1 \in W_1$, $F_2 \in W_2$ такие, что

$$\|\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2\|_{(X_n^\sim)^*} = \inf \{\|F_1 - F_2\|_{(X_n^\sim)^*} : F_1 \in W_1, F_2 \in W_2\}.$$

Так как $\kappa: X \rightarrow (X_n^\sim)^*$ — изометрия, то легко видеть, что элементы $v_i = \text{Pr } \tilde{F}_i$, принадлежащие V_i по теореме 1(a) ($i = 1, 2$), — искомые.

Теоремы 1—5 имеют приложения к выпуклому анализу и теории оптимального управления (см. Левин [2]; один результат из этой работы мы приведем в 5.3). Результаты, изложенные в 5.1 и 5.2, получены А. В. Бухваловым и Г. Я. Лозановским (см. [1], где содержатся и другие приложения и обобщения).

5.3. Докажем при помощи теоремы 3 теорему о достижении минимума выпуклым функционалом на выпуклом множестве, замкнутом относительно сходимости по мере.

Функционал p , заданный на $L^1(T, \Sigma, \mu)$, принимающий, возможно, и значение $+\infty$, называется *полу непрерывным снизу* относительно сходимости по мере, если

$$\text{из } x_n \rightarrow x(\mu) \text{ вытекает } p(x) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} p(x_n).$$

Функционал p называется *выпуклым*, если

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y)$$

для всех $x, y \in L^1$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Теорема 6. *Выпуклый функционал p , полу непрерывный снизу относительно сходимости по мере, достигает минимума на всяком замкнутом в $(L^1, \tau(L^1))$, ограниченном по норме выпуклом множестве $V \subset L^1$.*

Доказательство. Пусть

$$m = \inf \{p(x) : x \in V\}.$$

Возьмем последовательность чисел m_n ($m_n > m$), которая, убывая, стремится к m . Рассмотрим множества

$$V_n = \{x \in V : p(x) \leq m_n\}.$$

Так как $m_n > m$, то каждое V_n непусто, а так как $m_n \downarrow$, то последовательность множеств V_n убывает и тем самым центрирована. В силу выпуклости p множества V_n выпуклы, а в силу полу непрерывности p снизу — $\tau(L^1)$ -замкнуты. По теореме 3 получаем $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$. Если $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, то $x_0 \in V$ и $p(x_0) \leq m_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, откуда $p(x_0) = m$.

5.4. Важным шагом при исследовании экстремальных задач для выпуклых числовых функционалов является применение теорем отделимости (см. § III.2), основанных на теореме Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов (см. теорему II.4.1). Чрезвычайно ценным для самых различных приложений оказался тот факт, что теорема Хана — Банаха допускает обобщение на случай продолжения мажорируемых линейных операторов со значениями в K -пространстве (Канторович [21]). Доказательство этого результата, сформулированного ниже в виде теоремы 7*), в основном (с учетом свойств пространств) повторяет доказательство обычной теоремы Хана — Банаха (см. Канторович, Вулих, Пинскер; Акилов, Кутателадзе).

*) В литературе теорему 7 обычно называют теоремой Хана — Банаха — Канторовича. (Прим. ред).

Теорема 7. Пусть X — произвольное векторное пространство, а Y — K -пространство. Пусть $p: X \rightarrow K$ — отображение, обладающее свойствами калибровочной функции относительно порядка в Y , т. е. $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$; $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\lambda \geq 0$.

Предположим, что X_0 — линейное подмножество в X и что линейный оператор $U_0: X_0 \rightarrow Y$ удовлетворяет неравенству

$$U_0(x) \leq p(x) \quad (2)$$

для всех $x \in X_0$.

Тогда оператор U_0 может быть распространен на все пространство X с сохранением линейности и условия (2), т. е. существует линейный оператор $U: X \rightarrow Y$, совпадающий с U_0 на X_0 и удовлетворяющий неравенствам

$$-p(-x) \leq U(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

В случае, когда $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$, теорема 7 была распространена на случай комплексных пространств А. В. Бухваловым.

Заметим, что теорема 7 содержит в себе следующий результат: если Q — экстремально несвязный компакт, то B -пространство $C(Q)$ является P_1 -пространством. Это важнейшая достаточная часть сформулированного на с. 244 результата. Для доказательства достаточно заметить, что $C(Q)$ — K -пространство (см. с. 364), и положить $p(x) = \|U_0\|e$, где e — функция, тождественно равная единице на Q .

5.5. В последнее время теория K -пространств нашла широкое приложение в выпуклом анализе и тех разделах математики, где выпуклый анализ используется. В частности, методы этой теории применяются при исследовании экстремальных задач и некоторых экономико-математических моделей. Многие из указанных приложений основываются на сформулированной выше теореме Хана — Банаха — Канторовича, которая позволяет изучать выпуклые операторы $F: X \rightarrow Y$, где X — векторное пространство, а Y — K -пространство, т. е. операторы, для которых справедливо неравенство Йенсена:

$$F(\alpha x + \beta y) \leq \alpha Fx + \beta Fy, \quad \alpha, \beta \geq 0; \quad \alpha + \beta = 1; \quad x, y \in X.$$

Теория выпуклых операторов и ее приложения к исследованию задач выпуклого программирования в K -пространствах подробно изложена в Акилов, Кутателадзе; см. также обзор Кусраев, Кутателадзе [1], где приведена обширная библиография. Выпуклые и, в частности, сублинейные операторы, действующие в K -пространство, нашли применения в так называемой негладкой оптимизации (Демьянов, Рубинов [1], Тибо [1]), а также при исследовании оптимальных траекторий в весьма общих динамических задачах, являющихся далеко идущим обобщением моделей экономической динамики (Кусраев, Кутателадзе [1]).

Теорема Хана — Банаха — Канторовича в определенном смысле эквивалентна основным фактам выпуклого анализа и выпуклой оптимизации в K -пространствах. Подчеркнем, что эта теорема справедлива в полном объеме лишь для операторов, действующих в K -пространстве (этот круг вопросов обсуждается в Акилов, Кутателадзе; см. также Эльстер, Неезе [1]). Другие приложения теории K -пространств, основанные на теореме Хана — Банаха — Канторовича (границы Шоке в K -пространствах, супремальное генерирование, эргодические свойства полугрупп, см.: Кутателадзе, Рубинов; Рубинов [1]; Акилов, Кутателадзе).

Известно много задач, относящихся к указанному кругу вопросов, при исследовании которых используются другие аспекты теории ВР. В качестве примера из области выпуклого анализа приведем исследование многозначных отображений, сопряженных к сублинейным операторам (см. Рубинов).

Перейдем к экстремальным задачам. В настоящее время наиболее развит раздел теории экстремальных задач в векторных решетках, содержащий различные обобщения задач линейного программирования и смежные вопросы. Одно из естественных обобщений представляет собой задача вида

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \leq 0, \quad Ax \leq y, \quad (3)$$

где $A: X \rightarrow Y$ — линейный оператор, X , Y — векторные пространства, (пред)упорядоченные некоторыми конусами. (Примером может служить задача о перемещении масс, рассмотренная в § 4, гл. VIII).

Задача (3) рассматривалась многими авторами в основном с точки зрения теории двойственности. Содержательные примеры полученных результатов возникают, как правило, в случае, когда по крайней мере одно из пространств X , Y — векторная решетка (см., например, Вершик [1], а также Левин, Милютин [1]).

Другое обобщение задачи линейного программирования исследовано в серии работ А. Г. Пинскера (см., например, Пинскер [1, 2]). Оно представляет собой экстремальную задачу, формально записываемую так же, как обычная конечномерная задача линейного программирования в координатной форме с той лишь разницей, что все ее параметры — не числа, а элементы расширенного K -пространства. Доказывается существование решения, предлагается способ его отыскания, развивается теория двойственности.

В последнее время появились работы, посвященные изучению задач в банаховых решетках, в определенном смысле близких к задачам математического программирования. Сюда относится задача о существовании наименьшего элемента в множестве $U = \{x \in X: x \geq 0, Ax \geq 0\}$, где X — БР с банаховым сопряженным X^* , $A: X \rightarrow X^*$ — нелинейный оператор; проблема дополнителности — найти элемент $x \in U$, для которого $Ax(x) = 0$; вариационное неравенство — найти элемент $x \geq 0$, для которого $Ax(y - x) \geq 0$ при всех $y \geq 0$, где A — тот же оператор, что и выше. По поводу этих задач см., например, Риддел [1], Крайер, Демистер [1].

Методы теории упорядоченных пространств активно используются в математической экономике; отметим, что основные объекты, изучаемые там, определяются в порядковых терминах (см. Никайдо; Макаров, Рубинов; Багриновский; Рубинов). Современная математическая экономика оперирует в основном конечномерными моделями. Однако уже сейчас рассматриваются некоторые постановки, использующие теорию K -пространств. В качестве примера приведем абстрактную модель межотраслевого взаимодействия (см. Багриновский). Во многих работах, относящихся к теории экономического равновесия и теории игр, используются решеточные свойства конкретных пространств мер или функций.

Г л а в а XI

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Интегральное представление операторов

1.1. Интегральные операторы являются важным и часто встречающимся в приложениях классом операторов. Мы уже имели дело с интегральными операторами в § 2 главы V. Однако, там основное внимание было уделено операторам в $C[a, b]$ с непрерывными ядрами. В этом же параграфе мы рассмотрим интегральные операторы с произвольными измеримыми ядрами, заданные на идеальных пространствах.

Пусть (S, Σ_S, ν) и (T, Σ_T, μ) — пространства с σ -конечными мерами, (R, Σ_R, λ) — произведение этих пространств (см. I.6.8), т. е. $R = S \times T$ и $\lambda = \nu \times \mu$.

Всюду далее в этом параграфе через X обозначено некоторое ФП на (T, Σ_T, μ) , а через Y — некоторое ФП на (S, Σ_S, ν) *).

Оператор $U: X \rightarrow Y$ называется *интегральным*, если существует λ -измеримая функция $K(s, t)$ ($s \in S, t \in T$) такая, что для любого $x \in X$ значение $y = U(x)$ есть функция

$$y(s) = \int_T K(s, t) x(t) d\mu(t). \quad (1)$$

Функция $K(s, t)$ называется *ядром* интегрального оператора U . Легко видеть, что ядро λ -почти всюду конечно.

Интегральный оператор (1) называется *регулярным оператором* из X в Y , если оператор $|U|$, определяемый соотношением

$$z = |U|(x), \quad z(s) = \int_T |K(s, t)| x(t) d\mu(t), \quad x \in X, \quad (2)$$

переводит X в Y . При этом оператор $|U|$ называется *модулем оператора* U **).

*) В этой главе мы для определенности будем предполагать все пространства вещественными, хотя результаты справедливы и в комплексном случае.

**) Интегральный оператор U является регулярным в смысле приведенного определения тогда и только тогда, когда $U \in L \sim (X, Y)$. При этом оказывается, что $|U|$ — это модуль в K -пространстве $L \sim (X, Y)$ (см. с. 367).

Пусть $U: X \rightarrow S(S, \Sigma_s, \nu)$ — интегральный оператор (1). Перечислим некоторые его свойства.

I. Оператор U линеен.

II. Для того чтобы для всех $x \in X_+$ выполнялось $U(x) \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $K(s, t) \geq 0$ λ -п. в.

Достаточность в утверждении II очевидна. Докажем необходимость. В силу следствия 2 леммы IV.3.1 можно считать, что $L^\infty(T, \Sigma_T, \mu) \subset X$. Если l_T — функция, тождественно равная единице на T , то при ν -п. в. s имеем

$$\left| \int_T K(s, t) d\mu(t) \right| = |[U(l_T)](s)| < +\infty,$$

откуда при ν -п. в. s получаем, что

$$y(s) = \int_T |K(s, t)| d\mu(t) < +\infty.$$

Так как функция $y(s)$ ν -почти всюду конечна, то существует такое разбиение $\{B_n\}$ множества S , что $y\chi_{B_n} \in L^1(S, \Sigma_s, \nu)$ ($n \in \mathbb{N}$). Таким образом, можно считать, что $y \in L^1(S, \Sigma_s, \nu)$. Тогда в силу теоремы Тонелли (теорема I.6.12)

$$\int_R |K(s, t)| d\lambda(s, t) = \int_S y(s) d\nu(s) < +\infty,$$

т. е. $K \in L^1(R, \Sigma_R, \lambda)$. Следовательно, по теореме Фубини для любых измеримых $B \subset S$ и $A \subset T$ имеем

$$\int_{B \times A} K(s, t) d\lambda(s, t) = \int_B [U(\chi_A)](s) d\nu(s) \geq 0,$$

откуда $K(s, t) \geq 0$ λ -п. в. (см. I.6.8).

Применяя утверждение II к операторам U и $-U$, получаем:

III. Оператор $U = 0$ тогда и только тогда, когда $K(s, t) = 0$ λ -п. в.

IV. $|U|$, действующий по формуле (2), переводит X в $S(S, \Sigma_s, \nu)$.

Действительно, из (1) вытекает, что для любого $x \in X$ при ν -п. в. $s \in S$

$$\int_T |K(s, t) x(t)| d\mu(t) < +\infty,$$

откуда получаем п. в. конечность функции $z = |U|(x)$ в (2).

V. Если $x_n \rightarrow 0(\mu)$ и $|x_n| \leq x \in X$ ($n \in \mathbb{N}$), то $[U(x_n)](s) \rightarrow 0$ ν -п. в.

Свойство V вытекает из IV и теоремы Лебега. Следствием свойства V является:

VI. Если $x_n \rightarrow 0$ μ -п. в. и $|x_n| \leq x \in X$ ($n \in \mathbb{N}$), то $[U(x_n)](s) \rightarrow 0$ ν -п. в.

VII. Если X и Y — БФП, а интегральный оператор U действует из X в Y , то оператор U непрерывен, т. е. $U \in B(X, Y)$.

Это утверждение следует из теоремы о замкнутом графике (см. теорему XII.1.4 ниже), лемм IV.3.2 и V. Вопрос об описании в терминах ядра $K(s, t)$ того, что оператор U действует из X в Y , весьма труден. Некоторые результаты в этом направлении приведены в §§ 2 и 3.

VIII. Если U — регулярный интегральный оператор (1) из X в Y , а оператор $V: Y' \rightarrow X'$ при любых $x \in X$, $y' \in Y'$ удовлетворяет соотношению

$$\int_S U(x) y' dv = \int_T xV(y') d\mu,$$

то для $z = V(y')$ имеем

$$z(t) = \int_S K(s, t) y'(s) dv(s), \quad y' \in Y',$$

т. е. $V: Y' \rightarrow X'$ — тоже регулярный интегральный оператор с ядром $K^*(t, s) = K(s, t)$.

Действительно, так как оператор U регулярен, то при любом $x \in X$ функция $\int_T |K(s, t)| x(t) d\mu(t)$ входит в Y . Тогда по теореме Тонелли для всех $x \in X_+$, $y' \in Y'_+$ имеем

$$\begin{aligned} \int_R |K(s, t)| x(t) y'(s) d\lambda(s, t) &= \\ &= \int_S \left\{ \int_T |K(s, t)| x(t) d\mu(t) \right\} y'(s) dv(s) < +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме Фубини для всех $x \in X_+$, $y' \in Y'_+$ получаем

$$\begin{aligned} \int_T xV(y') d\mu &= \int_S U(x) y' dv = \int_S \left\{ \int_T K(s, t) x(t) d\mu(t) \right\} y'(s) dv(s) = \\ &= \int_T \left\{ \int_S K(s, t) y'(s) dv(s) \right\} x(t) d\mu(t) = \int_T zx d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что функции $V(y')$ и z определяют один и тот же (о)-непрерывный функционал на X . Теперь по теореме VI.1.1 получаем, что $z = V(y')$.

1.2. В этом параграфе мы займемся нахождением условий, когда линейный оператор U , действующий из одного ФП в другое, является интегральным оператором, т. е. допускает представление (1).

Отметим сразу, что дело обстоит очень просто в случае дискретной меры. Именно, пусть мера μ дискретна. Тогда любой

линейный оператор U , действующий из ФП X на (T, Σ_T, μ) в $S(S, \Sigma_S, \nu)$ и удовлетворяющий условию VI, является интегральным, т. е. в этом случае условие VI является необходимым и достаточным для того, чтобы оператор был интегральным. Действительно, так как мера μ дискретна, то множество T можно представить в виде объединения счетного числа атомов $\{A_n\}$. Тогда любой $x \in X$ можно единственным образом записать в виде

$$x = \sum_n \lambda_n \chi_{A_n},$$

где ряд в правой части сходится почти всюду. Так как оператор U удовлетворяет VI, то

$$U(x) = \sum_n \lambda_n U(\chi_{A_n}),$$

где ряд также сходится почти всюду. При $t \in A_n$ ($n \in \mathbb{N}$) положим

$$K(s, t) = \frac{1}{\mu(A_n)} [U(\chi_{A_n})](s).$$

Очевидно, что функция $K(s, t)$ $\nu \times \mu$ -измерима. Проверим, что $K(s, t)$ — ядро оператора U . Для любого $x \in X$ имеем

$$\begin{aligned} \int_T K(s, t) x(t) d\mu(t) &= \sum_n \frac{1}{\mu(A_n)} [U(\chi_{A_n})](s) \lambda_n \mu(A_n) = \\ &= \sum_n \lambda_n [U(\chi_{A_n})](s) = [U(x)](s), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Легко видеть, что в случае, когда X — ФП последовательностей, то линейный оператор $U: X \rightarrow S$ является интегральным тогда и только тогда, когда он является матричным оператором. Последнее означает, что существует бесконечная матрица $\{a_{ik}\}_{i=1, k=1}^{\infty}$ такая, что если $y = U(x)$, $x = \{\xi_k\} \in X$, $y = \{\eta_i\} \in S$, то

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k.$$

Значительно сложнее обстоит дело в случае непрерывной меры, а этот случай наиболее интересен с точки зрения теории операторов. Здесь уже необходимое условие VI не является достаточным. Действительно, если мы рассмотрим ФП X на пространстве (T, Σ_T, μ) с непрерывной мерой и обозначим через I тождественный оператор на X , то I , очевидно, удовлетворяет условию VI, но не удовлетворяет необходимому условию V, так как в случае непрерывной меры легко построить последовательность $\{x_n\}$ в X , которая ограничена в X и сходится по мере, но не сходится почти всюду (см., например, Вулих — III).

Однако оказывается, что условие V уже является необходимым и достаточным в общем случае. Приведем точную формулировку этого результата, нетривиального уже для операторов в $L^2(D)$.

Теорема 1. Пусть X — ФП на (T, Σ, μ) , $U: X \rightarrow S(S, \Sigma, \nu)$ — линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) U — интегральный оператор;
- 2) если $x_n \rightarrow 0(\mu)$ и $|x_n| \leq x \in X$ ($n \in \mathbb{N}$), то $[U(x_n)](s) \rightarrow 0$ ν -п. в.;
- 3) оператор U удовлетворяет условию VI и из $\chi_{A_n} \leq x \in X$ ($n \in \mathbb{N}$), $\mu(A_n) \rightarrow 0$, следует, что $[U(\chi_{A_n})](s) \rightarrow 0$ ν -п. в.

Справедливость импликации 1) $\Rightarrow$ 2) уже отмечалась (см. V). Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна. Теорема 1 была получена А. В. Бухваловым [1] и решает задачу Дж. фон Неймана [1] о нахождении необходимых и достаточных условий интегральности оператора в L^2 . Доказательство импликации 3) $\Rightarrow$ 1), основанное на технике, связанной с теоремой Л. В. Канторовича о свойствах пространства (o) -ограниченных операторов (см. § X.2), подробно изложено в Бухвалов [3] (там же рассмотрена история вопроса).

Следствие. Пусть функция $\Phi(s, t)$, вообще говоря неизмеримая, такова, что при любом $x \in X$ определена ν -почти всюду конечная ν -измеримая функция $y(s) = \int_T \Phi(s, t) x(t) d\mu(t)$. Определим оператор $U(x) = y(x \in X)$. Тогда существует λ -измеримая функция $K(s, t)$ такая, что при любом $x \in X$ имеем

$$[U(x)](s) = \int_T \Phi(s, t) x(t) d\mu(t) = \int_T K(s, t) x(t) d\mu(t)$$

для ν -п. в. s (исключаемое множество, вообще говоря, зависит от x).

Доказательство. При любом $x \in X$ имеем

$$\left| \int_T \Phi(s, t) x(t) d\mu(t) \right| \leq \int_T |\Phi(s, t) x(t)| d\mu(t) < +\infty \quad \nu\text{-п. в.}$$

(заметим, что функция, стоящая в этом неравенстве справа, может оказаться неизмеримой). Пользуясь теоремой Лебега, убеждаемся, что оператор U удовлетворяет условию 2) теоремы 1, откуда и получаем требуемое.

Следствие позволяет заменять ядра измеримыми. Если пространство (T, Σ, μ) сепарабельно, то из следствия легко получить, что при ν -п. в. s имеем $K(s, t) = \Phi(s, t)$ для μ -п. в. t (Грибанов [2]). Можно показать, что без условия сепарабельности это утверждение неверно.

В оставшейся части параграфа мы получим две теоремы об интегральном представлении операторов некоторых специальных

классов. Мы легко бы могли вывести эти теоремы из теоремы 1, но не будем делать этого как из-за того, что их доказательства в отличие от доказательства теоремы 1 не требуют большого вспомогательного аппарата, так и из-за того, что при доказательстве теоремы 1 используется один частный случай теоремы 6.

1.3. Начнем с одного вспомогательного факта, интересного и самого по себе.

Пусть E — произвольное непустое множество функций $x \in S(T, \Sigma, \mu)$, $K(s, t)$ — λ -измеримая λ -почти всюду конечная функция на $R = S \times T$. Мы будем говорить, что множество E и функция $K(s, t)$ согласованы, если выполнены следующие два условия:

1) существует такое множество $S'_0 \subset S$, $\nu(S'_0) = 0$, что для любого $x \in E$ при всех $s \in S \setminus S'_0$ функция $K(s, t)x(t)$ μ -измерима и существует $\int_T K(s, t)x(t)d\mu(t)$ *);

2) существует такое множество $S''_0 \subset S$, $\nu(S''_0) = 0$, что для любого $x \in E$ при всех $s \in S \setminus S''_0$ функции

$$x_s(t) = \begin{cases} (\operatorname{sign} K(s, t)) |x(t)|, & \text{если } K(s, t) \neq 0, \\ |x(t)|, & \text{если } K(s, t) = 0, \end{cases}$$

входят в множество E .

Если обозначить $S_0 = S'_0 \cup S''_0$, то $\nu(S_0) = 0$. Для любых таких E и K при всех $s \in S \setminus S_0$ положим

$$d_{K,E}(s) = \sup \left\{ \int_T K(s, t)x(t)d\mu(t) : x \in E \right\}. \quad (3)$$

Мы сейчас займемся доказательством ν -измеримости поточечного супремума $d_{K,E}$, которая в случае несчетного E и несепабельности меры μ проверяется совсем не просто. Типичным примером согласованной пары E и K являются множество E , состоящее из неотрицательных μ -измеримых функций, и λ -измеримая функция $K(s, t) \geq 0$ λ -п. в. Условие 2), очевидно, выполнено с $S''_0 = \emptyset$. В силу теоремы Фубини при ν -п. в. s функция $K(s, \cdot)$ μ -измерима и при ν -п. в. s имеем $K(s, t) \geq 0$ при μ -п. в. t . Теперь очевидно, и выполнение условия 1). Далее мы познакомимся и с другими примерами.

Отметим, что для всех $s \in S \setminus S_0$ справедливо равенство

$$d_{K,E}(s) = \sup \left\{ \int_T |K(s, t)| |x(t)| d\mu(t) : x \in E \right\}. \quad (4)$$

Действительно, очевидно, что $d_{K,E}(s)$ меньше или равно выражения, стоящего в правой части равенства (4). Если $x \in E$,

*) Не предполагается, что этот интеграл конечен; см. I.6.4.

то $x_s \in E$, и поэтому

$$\begin{aligned} \int_T |K(s, t)| |x(t)| d\mu(t) &= \int_T K(s, t) (\operatorname{sign} K(s, t)) |x(t)| d\mu(t) = \\ &= \int_T K(s, t) x_s(t) d\mu(t) \leq d_{K, E}(s), \end{aligned}$$

откуда получаем противоположное неравенство. Тем самым (4) доказано.

Теорема 2. Пусть множество E и функция $K(s, t)$ согласованы. Тогда функция $d_{K, E}(s)$ ν -измерима. Кроме того, существует такая последовательность функций $x_n \in E$, что

$$d_{K, E}(s) = \sup_n \int_T K(s, t) x_n(t) d\mu(t) \quad \nu\text{-н. в.}$$

Прежде чем приступать к доказательству теоремы 2, отметим, что ее нетривиальность заключается, во-первых, в том, что точечный супремум $d_{K, E}$, вообще говоря, несчетного множества измеримых функций измерим, а во-вторых, в том, что он совпадает с супремумом соответствующего множества в упорядоченном пространстве $S(S, \Sigma_s, \nu)$, так как в силу теоремы 2 $d_{K, E}$ реализуется на некотором счетном семействе (ср. I.6.10).

Доказательство теоремы 2. Так как на множестве S , мы можем положить $K(s, t) = 0$ ($t \in T$), то можно считать, что $\int_T K(s, t) x(t) d\mu(t)$ существует при всех $x \in E$ и $s \in S$. Сформулируем сначала лемму, доказательство которой в более общем виде мы проведем позже (см. лемму 2).

Лемма 1. Обозначим через H множество всех функций вида

$$\sum_{i=1}^{i_0} \chi_{B_i}(s) g_i(t),$$

где $B_i \in \Sigma_s(\nu)$ попарно не пересекаются, $g_i \in L^1(T, \Sigma_t, \mu) \cap L^\infty(T, \Sigma_t, \mu)$ ($1 \leq i \leq i_0$). Тогда множество H всюду плотно в B -пространстве $L^1(R, \Sigma_R, \lambda)$.

Напомним (см. I.6.4), что символом $[x]_n$ мы обозначаем срезки функции x . Положим $E_n = \{[x]_n : x \in E\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда каждое множество E_n согласовано с функцией K . В силу теоремы Фату при помощи формулы (4) получаем, что при любом $s \in S$

$$d_{K, E_n}(s) \uparrow d_{K, E}(s). \quad (5)$$

Пусть

$$K_m(s, t) = \sum_{i=1}^{i_0} \chi_{B_i}(s) g_i(t) \in H.$$

Ясно, что функция K_m согласована с каждым множеством E_n .

Тогда, поскольку $B_i \cap B_{i'} = \emptyset$ ($i \neq i'$), то для любого $s \in S$ имеем

$$d_{K_m, E_n}(s) = \sum_{i=1}^{i_0} \left[\sup_{x \in E_i} \int_T g_i(t) [x]_n(t) d\mu(t) \right] \chi_{B_i}(s).$$

Следовательно, функция d_{K_m, E_n} измерима и, очевидно, существует такое не более, чем счетное множество $E(n, m) \subset E$, что при любом $s \in S$

$$d_{K_m, E_n}(s) = \sup \left\{ \int_T K_m(s, t) [x]_n(t) d\mu(t) : x \in E(n, m) \right\}. \quad (6)$$

Пусть $K \in L^1(R, \Sigma_R, \lambda)$. Согласно лемме 1 существует такая последовательность функций $K_m \in H$, что при любом m имеем $\|K_m - K\|_{L^1} \leq 2^{-m}$. Тогда в $L^1(R, \Sigma_R, \lambda)$ (а следовательно, и λ -почти всюду) сходится ряд

$$L(s, t) = \sum_{m=1}^{\infty} |K_m(s, t) - K(s, t)|.$$

Поэтому

$$|K_m(s, t) - K(s, t)| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \lambda\text{-п. в.},$$

$$|K_m(s, t) - K(s, t)| \leq L(s, t) \quad \lambda\text{-п. в.}$$

Определим множество $S_1 \subset S$, относя $s \in S$ к множеству S_1 в том и только том случае, когда одновременно выполняются следующие условия:

$$1) |K_m(s, t) - K(s, t)| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \mu\text{-п. в.};$$

$$2) |K_m(s, t) - K(s, t)| \leq L(s, t) \quad \mu\text{-п. в. при всех } m \in \mathbb{N};$$

$$3) \text{ функция } L(s, \cdot) \text{ } \mu\text{-интегрируема};$$

$$4) d_{K_m, E_n}(s) < +\infty \text{ и } d_{K, E_n}(s) < +\infty \quad \text{при всех } m, n \in \mathbb{N}.$$

Используя теорему Фубини, легко доказать, что каждое из условий 1)–4) выполняется при ν -п. в. s . Следовательно, S_1 измеримо и $\nu(S \setminus S_1) = 0$.

При каждом $s \in S_1$ и любых $m, n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|d_{K_m, E_n}(s) - d_{K, E_n}(s)| \leq d_{|K_m - K|, E_n}(s). \quad (7)$$

На основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла при каждом $s \in S_1$ получаем

$$d_{|K_m - K|, E_n}(s) \leq n \int_T |K_m(s, t) - K(s, t)| d\mu(t) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (8)$$

В силу (7) и (8) при $s \in S_1$ имеем

$$d_{K_m, E_n}(s) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} d_{K, E_n}(s), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Так как уже было доказано, что функции d_{K_m, E_n} ν -измеримы, то отсюда следует, что функция d_{K, E_n} ν -измерима. Положим

$E(n) = \bigcup_{m=1}^{\infty} E(n, m)$. Тогда в силу (6) и (9) при всех $s \in S_1$ выполнено

$$d_{K, E_n}(s) = \sup \left\{ \int_T K(s, t) [x]_n(t) d\mu(t) : x \in E(n) \right\}, \quad n \in N. \quad (10)$$

Так как множество $E(n)$ не более, чем счетно, то функция d_{K, E_n} ν -измерима; а тогда в силу (5) и функция $d_{K, E}$ ν -измерима, причем на основании (5) и (10) при всех $s \in S_1$ имеем

$$d_{K, E}(s) = \sup \left\{ \int_T K(s, t) x(t) d\mu(t) : x \in E_0 \right\},$$

где $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(n)$ не более, чем счетно. Таким образом, справедливость теоремы доказана, если функция $K(s, t)$ λ -интегрируема.

В общем случае зафиксируем две последовательности $S_n \uparrow S$, $T_n \uparrow T$, где $S_n \in \Sigma_s(\nu)$, $T_n \in \Sigma_t(\mu)$. Функции $K_n(s, t) = [K]_n(s, t) \chi_{S_n \times T_n}(s, t)$ λ -интегрируемы. Используя формулу (4) и теорему Фату, получаем, что при ν -п. в. s имеем $d_{K_n, E}(s) \uparrow d_{K, E}(s)$. Так как для функций $K_n(s, t)$ теорема уже доказана, то отсюда заключение теоремы справедливо и для $K(s, t)$. Теорема полностью доказана.

Следствие. Если $U: X \rightarrow S(S, \Sigma_s, \nu)$ — интегральный оператор (1), то для всякого $x \in X_+$ найдется такая последовательность $\{x_n\}$ в X , что $|x_n| = x$ и

$$|U \downarrow(x)(s)| = \int_T |K(s, t)| x(t) d\mu(t) = \sup_n \int_T |K(s, t)| x_n(t) d\mu(t)$$

при ν -п. в. s (исключаемое множество, вообще говоря, зависит от x).

Доказательство. Зафиксируем $x \in X_+$ и рассмотрим множество $E = \{\tilde{x} \in X : |\tilde{x}| = x\}$. Положим $S_0 = \left\{ s \in S : \int_T |K(s, t)| \times x(t) d\mu(t) = +\infty \right\}$. В силу IV $\nu(S_0) = 0$. Так как $\int_T |K(s, t)| \times \tilde{x}(t) d\mu(t) = \int_T |K(s, t)| x(t) d\mu(t)$, то для любого $\tilde{x} \in E$ при всех $s \in S \setminus S_0$ существует и конечен $\int_T K(s, t) \tilde{x}(t) d\mu(t)$. Следовательно, множество E и функция $K(s, t)$ согласованы. Осталось применить теорему 2 и формулу (4).

Теорема 2, в чуть более слабой форме получена в работе Ю. И. Гриванова [1].

1.4. Пусть, по-прежнему, X — ФП на (T, Σ_T, μ) , Y — на (S, Σ_S, ν) . Предположим, что Y — БФП с условием (C). Через $X[Y]$ обозначим пространство всех λ -измеримых функций $K(s, t)$, удовлетворяющих двум условиям:

- 1) при μ -п. в. $t \in T$ функция $s \rightarrow K(s, t)$ входит в Y ;
- 2) функция $w_Y(K)(t) = \|K(\cdot, t)\|_Y$ входит в X .

Уже тот факт, что $X[Y]$ — линейное множество, требует привлечения теоремы 2. Дело в том, что априори функция $w_Y(K)$ может оказаться неизмеримой (так, вообще говоря, и будет, если в Y не выполнено условие (C)). Пусть $K(s, t)$ — λ -измеримая функция, удовлетворяющая условию 1). Проверим, что функция $w_Y(K)$ μ -измерима. Так как в Y выполнено условие (C), то в силу теоремы Накано — Амеми — Мори (см. теорему VI.1.6) при μ -п. в. t имеем

$$\begin{aligned} K(\cdot, t)\|_Y &= \sup \left\{ \left| \int_S K(s, t) y'(s) d\nu(s) \right| : y' \in Y', \|y'\| \leq 1 \right\} = \\ &= \sup \left\{ \int_S |K(s, t)| |y'(s)| d\nu(s) : y' \in Y'_+, \|y'\| \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что множество $E = \{y' \in Y'_+ : \|y'\| \leq 1\}$ и функция $|K|$ согласованы. Тогда по теореме 2 функция $w_Y(K)$ μ -измерима, и, более того, найдется последовательность $\{y'_n\} \subset Y'_+$, $\|y'_n\| \leq 1$ такая, что

$$\|K(\cdot, t)\|_Y = \sup_n \left\{ \int_S |K(s, t)| y'_n(s) d\nu(s) \right\} \quad \mu\text{-п. в.}$$

Теперь очевидно, что $X[Y]$ — линейное множество в $S(R, \Sigma_R, \lambda)$, а тогда и ФП на (R, Σ_R, λ) .

Если X — БФП, то вводим на $X[Y]$ норму по формуле $\|K\| = \|w_Y(K)\|_X$ ($K \in X[Y]$). Очевидно, что эта норма монотонна, и тем самым $X[Y]$ — НФП. Можно доказать, что в этих условиях $X[Y]$ полно по норме, но мы этого делать не будем, так как нам этот результат не понадобится (см. Бухвалов, Векслер, Гейлер [1], § 4.3, где приведены и другие свойства пространств $X[Y]$). Пространства $X[Y]$ часто называют пространствами со смешанной нормой.

В том случае, когда X — БФП на (T, Σ_T, μ) с условием (C), а Y — ФП на (S, Σ_S, ν) , аналогично тому, как это было сделано выше, поменяв (S, Σ_S, ν) и (T, Σ_T, μ) местами, можно определить пространство $Y[X]$ и функцию $w_X(K)$.

Важным примером пространств со смешанной нормой являются пространства L^{p_1, p_2} , обобщающие пространства L^p . Пусть $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$; $L^{p_1} = L^{p_1}(S, \Sigma_S, \nu)$, $L^{p_2} = L^{p_2}(T, \Sigma_T, \mu)$. Пространство L^{p_1, p_2} определяется как пространство $L^{p_2}[L^{p_1}]$ со смешанной

нормой, т. е. норма в L^{p_1, p_2} дается формулой

$$\|K\| = \begin{cases} \left(\int_T \left(\int_S |K(s, t)|^{p_1} dv(s) \right)^{p_2/p_1} d\mu(t) \right)^{1/p_2}, & 1 \leq p_1, p_2 < \infty, \\ \text{vrai sup}_{t \in T} \left(\int_S |K(s, t)|^{p_1} dv(s) \right)^{1/p_1}, & 1 \leq p_1 < \infty, p_2 = \infty, \\ \left(\int_T (\text{vrai sup}_{s \in S} |K(s, t)|)^{p_2} d\mu(t) \right)^{1/p_2}, & p_1 = \infty, 1 \leq p_2 < \infty, \\ \text{vrai sup}_{(s, t) \in R} |K(s, t)|, & p_1 = p_2 = \infty. \end{cases}$$

Используя теорему Фубини, легко проверить, что если $p_1 = p_2 = p$, то $L^{p_1, p_2} = L^{p_1}[L^{p_2}] = L^p(R, \Sigma_R, \lambda)$. Отметим, что аналогичное свойство не может быть выполнено для других БФП, т. е. если $X \neq L^p(T, \Sigma_T, \mu)$ и $Y \neq L^p(S, \Sigma_S, \nu)$, то пространства $X[Y]$ и $Y[X]$, как правило, различны.

Л е м м а 2. Если X и Y — БФП с условием (A), то:

- 1) в $X[Y]$ выполнено условие (A);
- 2) в $X[Y]$ всюду плотно множество H_1 всех функций вида

$$\sum_{i=1}^{i_0} \chi_{B_i}(s) x_i(t),$$

где множества $B_i \in \Sigma_S(\nu)$ попарно не пересекаются, $\chi_{B_i} \in Y$, $x_i \in X \cap L^\infty(T, \Sigma_T, \mu)$ ($1 \leq i \leq i_0$).

Доказательство. 1) Если $K_n \downarrow 0$ в $X[Y]$, то при μ -п. в. t имеем $K_n(s, t) \downarrow 0$ для ν -п. в. s . Так как в Y выполнено условие (A), то $w_Y(K_n) \downarrow 0$, а так как в X тоже выполнено условие (A), то $\|K_n\| = \|w_Y(K_n)\|_X \rightarrow 0$.

2) Так как в $X[Y]$ выполнено (A), то множество всех функций $K \in X[Y]$, каждая из которых обращается в нуль вне какого-либо множества $B \times A$, где $B \in \Sigma_S(\nu)$, $A \in \Sigma_T(\mu)$, $\chi_B \in Y$, $\chi_A \in X$, всюду плотно в $X[Y]$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\mu(T), \nu(S) < \infty$ и $L^\infty(T, \Sigma_T, \mu) \subset X$, $L^\infty(S, \Sigma_S, \nu) \subset Y$. В силу леммы IV.3.3 множество всех функций вида

$$\sum_{i=1}^{i_0} \lambda_i \chi_{C_i}, \quad C_i \in \Sigma_R,$$

плотно в $X[Y]$. Теперь ясно, что для доказательства леммы достаточно приблизить функциями из H_1 произвольную функцию χ_C , $C \in \Sigma_R$. На основании I.6.8 существует последовательность множеств $C_n = \bigcup_{k=1}^{h(n)} B_k \times A_k$, где $B_k \in \Sigma_S$, $A_k \in \Sigma_T$, такая, что $\chi_{C_n} \rightarrow \chi_C$ в пространстве $L^1(R, \Sigma_R, \lambda)$. Переходя, если надо, к под-

последовательности, мы можем считать, что $\chi_{C_n}(s, t) \rightarrow \chi_C(s, t)$ λ -п. в. Так как $L^\infty(R, \Sigma_R, \lambda) \subset X[Y]$ и в $X[Y]$ выполнено (A), то $\chi_{C_n} \rightarrow \chi_C$ по норме в $X[Y]$. Следовательно, множество всех функций вида

$$L(s, t) = \sum_{i=1}^{i_0} \lambda_i \chi_{B_i}(s) \chi_{A_i}(t)$$

плотно в $X[Y]$. Покажем, что $L \in H_1$. Существуют такие попарно непересекающиеся множества $B_j \in \Sigma_S$ ($1 \leq j \leq j_0$), что каждое множество B_j содержится хотя бы в одном множестве $B'_1, \dots, B'_{i_0}$, и каждое множество B'_i является объединением некоторых множеств B_j ($1 \leq j \leq j_0$). Рассмотрим множество индексов $I_j = \{p: B_j \subset B'_p, 1 \leq p \leq i_0\}$. Тогда, очевидно,

$$L(s, t) = \sum_{j=1}^{j_0} \chi_{B_j}(s) \left(\sum_{p \in I_j} \lambda_p \chi_{A_p}(t) \right) = \sum_{j=1}^{j_0} \chi_{B_j}(s) x_j(t),$$

причем

$$x_j = \sum_{p \in I_j} \lambda_p \chi_{A_p} \in X \cap L^\infty(T, \Sigma_T, \mu), \quad 1 \leq j \leq j_0.$$

Доказательство леммы полностью закончено.

Как мы увидим ниже, пространства со смешанной нормой играют важную роль при интегральном представлении операторов.

1.5. Пусть X — БФП на (T, Σ_T, μ) , Y — БФП на (S, Σ_S, ν) . Линейный оператор $U: X \rightarrow S(S, \Sigma_S, \nu)$ называется *оператором с абстрактной нормой*, если U переводит единичный шар B_X пространства X в множество, ограниченное по упорядочению в $S(S, \Sigma_S, \nu)$. Следовательно, в упорядоченном пространстве $S(S, \Sigma_S, \nu)$ существует элемент

$$|U| = \sup \{ |U(x)| : x \in B_X \},$$

который и называется *абстрактной нормой оператора U* . Множество всех операторов с абстрактной нормой обозначим через $L_A(X, S)$. Отметим, что оператор $U \in B(X, L^\infty)$ тогда и только тогда, когда $U \in L_A(X, S)$ и $|U| \in L^\infty$; при этом $\|U\| = \| |U| \|_{L^\infty}$. Таким образом, класс операторов с абстрактной нормой является обобщением класса $B(X, L^\infty)$.

Напомним, что в БФП X' всегда выполнено условие (C).

Теорема 3. Если U — интегральный оператор (1), то $U \in L_A(X, S)$ тогда и только тогда, когда $K \in S(S, \Sigma_S, \nu)[X']$; при этом $|U| = w_{X'}(K)$.

Доказательство. Если $K \in S(S, \Sigma_s, \nu)[X']$, то для $x \in X$

$$|[U(x)](s)| \leq \int_T |K(s, t)| |x(t)| d\mu(t) \leq \|K(s, \cdot)\|_{X'} \|x\|_X$$

при ν -п. в. s , откуда $|U| \leq w_{X'}(K)$.

Для доказательства обратного утверждения и обратного неравенства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. Если 'интегральный оператор $U \in L_A(X, S)$, то оператор $|U|$ (см. (2)) — тоже оператор с абстрактной нормой; при этом $|U| = ||U||$.

Доказательство. Пусть $U \in L_A(X, S)$. По следствию теоремы 2 для любого элемента $x \in X_+$, $\|x\| \leq 1$, существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $|x_n| = x$ и

$$|U|(x)(s) = \sup_n \left| \int_T K(s, t) x_n(t) d\mu(t) \right|.$$

Тогда

$$|U|(x) = \sup_n |U(x_n)| \leq |U|,$$

откуда $|U| \in L_A(X, S)$ и $||U|| \leq |U|$. Неравенство $|U| \leq ||U||$ очевидно.

Продолжим доказательство теоремы 3. Пусть $U \in L_A(X, S)$. Распространим норму пространства X' на все $S(T, \Sigma_T, \mu)$, полагая $\|x\|_{X'} = \infty$, если $x \notin X'$. Тогда для любого $s \in S$ имеем

$$\|K(s, \cdot)\|_{X'} = \sup \left\{ \int_T |K(s, t)| |x(t)| d\mu(t) : x \in X_+, \|x\| \leq 1 \right\}. \quad (11)$$

Ясно, что $K(s, \cdot) \in X'$ тогда и только тогда, когда правая часть в (11) конечна. Очевидно, что множество $E = \{x \in X_+ : \|x\| \leq 1\}$ и функция $|K(s, t)|$ согласованы. В силу теоремы 2 найдется такая последовательность $\{x_n\} \subset X_+$, $\|x_n\| \leq 1$, что при ν -п. в. s имеем

$$\|K(s, \cdot)\|_{X'} = \sup_n \int_T |K(s, t)| x_n(t) d\mu(t).$$

Следовательно, используя лемму 3, при ν -п. в. s получаем

$$\|K(s, \cdot)\|_{X'} = \sup_n |U|(x_n)(s) \leq ||U|| (s) = |U|(s),$$

откуда $K \in S(S, \Sigma_s, \nu)[X']$ и $w_{X'}(K) \leq |U|$, чем теорема полностью доказана.

Из теоремы 3 вытекает, что интегральный оператор U является оператором Гильберта — Шмидта тогда и только тогда, когда $U \in L_A(L^2, S)$ и $|U| \in L^2(S, \Sigma_s, \nu)$.

Рассмотрим теперь интегральные операторы, действующие из пространства $L^1 = L^1(T, \Sigma_T, \mu)$ в БФП Y . Как мы уже отмечали (см. VII в 1.1), любой такой оператор непрерывен.

Лемма 4. Если $U \in B(L^1, Y)$ — интегральный оператор, где Y — БФП с условиями (B) и (C), то интегральный оператор $|U|$ тоже действует из L^1 в Y , т. е. U регулярен. Кроме того, $\|U\| = \||U|\|$ *).

Доказательство. Зафиксируем элемент $x \in L^1$, $x \geq 0$, и рассмотрим множество E_x всех элементов вида

$$y = |U(x\chi_{A_1})| + \dots + |U(x\chi_{A_n})|,$$

где $\{A_i\}_{i=1}^n$ — разбиение множества T . Если $y_1, y_2 \in E_x$, то, беря подразбиение разбиений, соответствующих y_1 и y_2 , получаем $y \in E_x$ такой, что $y \geq y_1 \vee y_2$. Следовательно, множество E_x направлено по возрастанию. Для каждого $y \in E_x$ имеем

$$\|y\| \leq \sum_{i=1}^n \|U(x\chi_{A_i})\| \leq \|U\| \sum_{i=1}^n \|x\chi_{A_i}\|_{L^1} = \|U\| \|x\|_{L^1}. \quad (12)$$

Поэтому множество E_x ограничено по норме в Y . В силу следствия теоремы 2 существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $|x_n| = x$ и

$$|U|(x)(s) = \sup_n \left| \int_T K(s, t) x_n(t) d\mu(t) \right| \quad \text{v-п. в.}$$

Если $A_1^n = \{t: x_n(t) > 0\}$, $A_2^n = \{t: x_n(t) < 0\}$, $A_3^n = \{t: x(t) = 0\}$, то

$$|U(x_n)| \leq |U(x\chi_{A_1^n})| + |U(x\chi_{A_2^n})| + |U(x\chi_{A_3^n})| \in E_x.$$

Положим $z_m = \sup_{n=1}^m |U(x_n)|$. Тогда $0 \leq z_m \uparrow$ и, так как E_x направлено по возрастанию, то последовательность $\{z_m\}$ ограничена по норме в Y . В силу того, что в Y выполнено условие (B), существует $\sup z_m \in Y$. Но по выбору $\{x_n\}$ имеем $z_m \uparrow |U|(x)$, откуда $|U|(x) \in Y$. Так как элемент x произволен, то оператор U регулярен.

В силу того, что в Y выполнено (C), получаем, что $\|z_m\| \uparrow \||U|(x)\|$. Так как из (12) очевидно, что $\|z_m\| \leq \|U\| \|x\|_{L^1}$ ($m \in \mathbb{N}$), то $\||U|\| \leq \|U\|$. Обратное неравенство очевидно. Тем самым лемма полностью доказана.

Обозначим для краткости $L^1 = L^1(T, \Sigma_T, \mu)$, $L^\infty = L^\infty(T, \Sigma_T, \mu)$.

Теорема 4. Пусть Y — БФП с условиями (B) и (C). Если U — интегральный оператор (1), то $U \in B(L^1, Y)$ тогда и только тогда, когда $K \in L^\infty[Y]$; при этом $\|U\| = \|K\|_{L^\infty[Y]} = \text{vrai sup}_{t \in T} \|K(\cdot, t)\|_Y$.

*) На самом деле верно, что любой непрерывный оператор из L^1 в Y регулярен в смысле определения из X.2.1. При этом проходит приведенное доказательство.

Доказательство. Если $K \in L^\infty[Y]$; то для любых $x \in L^1$ и $y' \in Y'$ в силу теоремы Тонпели имеем

$$\begin{aligned} \int_S |[U(x)](s) y'(s)| dv(s) &\leq \int_S \left\{ \int_T |K(s, t)| |x(t)| d\mu(t) \right\} |y'(s)| dv(s) = \\ &= \int_T \left\{ \int_S |K(s, t)| |y'(s)| dv(s) \right\} |x(t)| d\mu(t) \leq \\ &\leq \operatorname{vrai} \sup_{t \in T} \|K(\cdot, t)\|_Y \|y'\| \|x\|_{L^1} = \|K\|_{L^\infty[Y]} \|y'\| \|x\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Так как в Y выполнено условие (C), то в силу теоремы VI.1.6 $\|U(x)\| \leq \|K\| \|x\|$, откуда $U \in B(L^1, Y)$ и $\|U\| \leq \|K\|$.

Обратно, пусть $U \in B(L^1, Y)$. Тогда $U^* \in B(Y^*, L^\infty)$. Если V — сужение оператора U^* на Y_n^* , то $V \in B(Y_n^*, L^\infty)$. В силу изоморфизма между Y_n^* и Y' оператор V можно рассматривать как оператор из Y' в L^∞ . Тогда, используя обозначения из VI.1.1, для любых $x \in X$ и $y' \in Y'$ имеем

$$\int_S U(x) y' dv = f_{y'}(U(x)) = f_x(U^*(f_{y'})) = f_x(V(f_{y'})) = \int_T x V(y') d\mu.$$

Так как в силу леммы 4 оператор U регулярен, то, пользуясь свойством VIII из 1.1, получаем, что $V: Y' \rightarrow L^\infty$ — интегральный оператор с ядром $K^*(t, s) = K(s, t)$, т. е. для любого $y' \in Y'$ имеем

$$V(y')(t) = \int_S K^*(t, s) y'(s) dv(s).$$

Тогда по теореме 3 $K^* \in L^\infty[Y'']$ и $|V| = w_{Y''}(K^*)$, но, так как $w_{Y''}(K^*)(t) = \|K^*(t, \cdot)\|_{Y''} = \|K(\cdot, t)\|_{Y''} = w_{Y''}(K)(t)$, то $K \in L^\infty[Y'']$ и $|V| = w_{Y''}(K)$. В силу теоремы VI.1.7 $Y = Y''$ по запасу элементов и по норме. Поэтому $K \in L^\infty[Y]$ и $|V| = w_Y(K)$. Далее,

$$\|U\| = \|U^*\| \geq \|V\| = \| |V| \|_{L^\infty} = \|K\|_{L^\infty[Y]},$$

откуда $\|U\| = \|K\|$.

1.6. Теперь мы можем доказать теоремы об интегральном представлении операторов. Пусть в следующей теореме

$$S = S(S, \Sigma_S, \nu), \quad L^1 = L^1(S, \Sigma_S, \nu), \quad L^\infty = L^\infty(S, \Sigma_S, \nu).$$

Теорема 5. Пусть X — БФП на (T, Σ_T, μ) с условием (A). Общий вид оператора U класса $L_A(X, S)$ дается формулой

$$U(x)(s) = \int_T K(s, t) x(t) d\mu(t), \quad x \in X, \quad (1)$$

где $K \in S[X']$. При этом $|U| = w_{X'}(K)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $|U|(s) > 0$ для любого $s \in S$. Рассмотрим оператор V ,

заданный на X при помощи формулы

$$V(x)(s) = \frac{1}{|U|(s)} U(x)(s).$$

Так как $U \in L_A(X, S)$, то $V \in B(X, L^\infty)$. Если мы докажем, что

$$V(x)(s) = \int_T K_1(s, t) x(t) d\mu(t), \quad x \in X,$$

то, положив $K(s, t) = K_1(s, t) |U|(s)$, получим

$$U(x)(s) = |U|(s) [V(x)](s) =$$

$$= \int_T K_1(s, t) |U|(s) x(t) d\mu(t) = \int_T K(s, t) x(t) d\mu(t).$$

Таким образом, если мы докажем наличие интегрального представления для любого оператора $V \in B(X, L^\infty)$, то, учитывая, что формула $|U| = w_{X'}(K)$ следует из теоремы 3, мы получим утверждение теоремы.

Итак, мы можем считать, что $U \in B(X, L^\infty)$. Рассмотрим множество H_2 всех функций вида

$$L(s, t) = \sum_{i=1}^{i_0} \chi_{B_i}(s) x_i(t),$$

где множества $B_i \in \Sigma_S(v)$ попарно не пересекаются и $x_i \in X$ ($1 \leq i \leq i_0$). Очевидно, что H_2 — линейное множество. По лемме 2 H_2 плотно в $L^1[X]$. Определим линейный функционал φ на H_2 по формуле

$$\varphi(L) = \sum_{i=1}^{i_0} \int_S U(x_i)(s) \chi_{B_i}(s) dv(s).$$

Предоставляем читателю проверку корректности этого определения.

Так как в силу попарной дизъюнктивности множеств B_i имеем

$$|\varphi(L)| \leq \sum_{i=1}^{i_0} \int_{B_i} |U(x_i)| dv \leq \sum_{i=1}^{i_0} v(B_i) \|U\| \|x_i\| = \|U\| \|L\|_{L^1[X]},$$

то φ — линейный непрерывный функционал на H_2 , если мы рассмотрим на H_2 норму, индуцированную из $L^1[X]$. Следовательно, существует единственное непрерывное продолжение функционала φ на пространство $L^1[X]$, которое мы обозначим той же буквой. Так как по лемме 2 в $L^1[X]$ выполнено условие (Λ) , то в силу следствия 2 теоремы VI.1.4 найдется λ -измеримая функция $K(s, t)$ такая, что

$$\varphi(L) = \int_R L(s, t) K(s, t) d\lambda(s, t), \quad L \in L^1[X].$$

В частности, для $L(s, t) = \chi_B(s)x(t)$, $B \in \Sigma_S(v)$, $x \in X$, получаем

$$\int_B U(x) dv = \varphi(L) = \int_R K(s, t) \chi_B(s) x(t) d\lambda(s, t). \quad (13)$$

По теореме VI.1.1 функция $|K(s, t)|$ тоже порождает линейный непрерывный функционал на $L^1[X]$, поэтому преобразуя правую часть в (13) при помощи теоремы Фубини, выводим, что

$$\int_B U(x) dv = \int_B \left\{ \int_T K(s, t) x(t) d\mu(t) \right\} dv(s).$$

В силу произвольности $B \in \Sigma_S(v)$, отсюда следует представление (1). Доказательство теоремы закончено.

Следствие. Пусть X — БФП на (T, Σ_T, μ) с условием (A), $L^\infty = L^\infty(S, \Sigma_S, v)$. Общий вид оператора U класса $B(X, L^\infty)$ дается формулой (1), где $K \in L^\infty[X']$; при этом $\|U\| = \operatorname{vrai\,sup}_{s \in S} \|K(s, \cdot)\|_{X'}$.

Из теоремы 5 вытекают абстрактные характеристики операторов Гильберта — Шмидта и карлемановских операторов (см. Коротков [1]).

Пусть в следующей теореме $L^1 = L^1(T, \Sigma_T, \mu)$, $L^\infty = L^\infty(T, \Sigma_T, \mu)$.

Теорема 6. Пусть Y — БФП на (S, Σ_S, v) с условием (A). Общий вид оператора U класса $B(L^1, Y')$ дается формулой

$$U(x)(s) = \int_T K(s, t) x(t) d\mu(t), \quad x \in L^1, \quad (1)$$

где $K \in L^\infty[Y']$. При этом $\|U\| = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in T} \|K(\cdot, t)\|_{Y'}$.

Доказательство. Так как в Y' выполнены условия (B) и (C), то в силу теоремы 4 нам надо только доказать, что любой оператор $U \in B(L^1, Y')$ допускает интегральное представление (1). Рассмотрим сопряженный оператор $U^* \in B((Y')^*, L^\infty)$. Пространство Y канонически вкладывается в $(Y')^*$, причем в силу теоремы VI.1.6 это вложение сохраняет норму. Обозначим через V сужение оператора U^* на Y . Тогда $V \in B(Y, L^\infty)$, и по теореме 5 существует ядро $K \in L^\infty[Y']$, для которого

$$V(y)(t) = \int_S K(t, s) y(s) dv(s), \quad y \in Y.$$

В силу леммы 3 V — регулярный оператор, а тогда, используя VIII из 1.1 аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 4, легко получить, что для U имеет место представление (1).

В качестве важного частного случая получаем

Следствие. Пусть $L^p = L^p(S, \Sigma_S, \nu)$, $1 < p \leq \infty$. Общий вид оператора U класса $B(L^1, L^p)$ дается формулой

$$U(x)(s) = \int_T K(s, t) x(t) d\mu(t), \quad x \in L^1,$$

где $K \in L^{p, \infty}$. При этом $\|U\| = \text{vrai sup}_{t \in T} \left(\int_S |K(s, t)|^p d\nu(s) \right)^{1/p}$, если $1 < p < \infty$, и $\|U\| = \text{vrai sup}_{(s, t) \in R} |K(s, t)|$, если $p = \infty$.

Замечание. Это следствие нельзя распространить на случай $p=1$, так как тождественный оператор в $L^1(0, 1)$ не допускает интегрального представления (см. 1.2).

Интегральное представление операторов давно привлекает внимание математиков. Важнейшие частные случаи теорем 5 и 6 были получены в 1930-х годах (см. Гельфанд [1], Данфорд, Петтис [1], Канторович, Вулих [1], а также Канторович, Вулих, Пинскер*). При этом вместо абстрактного пространства с мерой, как правило, брался отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега, а вместо абстрактного БФП — подходящее пространство L^p .

Теоремы пунктов 1.5 и 1.6 в их настоящем виде получены в статье Бухвалова [2] — этой работе мы следовали в нашем изложении. Обзор по теории интегрального представления операторов см. Бухвалов [3], а также Коротков. Имеется и другая постановка задачи об интегральном представлении, тоже идущая от Дж. фон Неймана [1]: когда оператор U в L^2 унитарно эквивалентен интегральному? Здесь наиболее весомый вклад принадлежит новосибирскому математику В. Б. Короткову (см. Коротков; Халмош, Сандер).

§ 2. Операторы в пространствах последовательностей

2.1. Дадим описание непрерывных и, в частности, компактных линейных операторов, переводящих пространство l^p в l^r ($1 < p < \infty$, $1 \leq r < \infty$).

Пусть U — непрерывный линейный оператор из l^p в l^r :

$$y = U(x), \quad x = \{\xi_k\} \in l^p, \quad y = \{\eta_i\} \in l^r.$$

Обозначим $f_i(x) = \eta_i$ ($i = 1, 2, \dots$). Так как

$$|f_i(x)| = |\eta_i| \leq \|y\| \leq \|U\| \|x\|,$$

то ясно, что f_i есть непрерывный линейный функционал в пространстве l^p . При этом $\|f_i\| \leq \|U\|$. По теореме об общей форме функционала в пространстве l^p функционал f_i может быть пред-

* Теорему 5 часто называют теоремой Канторовича — Вулиха, а теорему 6 — теоремой Данфорда — Петтиса. (Прим. ред.)

ставлен в виде

$$\eta_i = f_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k,$$

$$z_i = \{a_{ik}\} \in l^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \|z_i\| = \|f_i\|, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Итак, оператор U естественным образом определяет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$a_{ik} = f_i(x_k), \quad x_k = \underset{1 \dots k-1}{0}, \dots, \underset{k+1}{0}, 1, 0, \dots; \quad i, k = 1, 2, \dots$$

Пусть $x = \{\xi_k\} \in l^p$, $y = \{\eta_k\} \in l^r$. Напомним обозначение для «срезанных» элементов:

$$[x]_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots), \quad [y]_n = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, \dots),$$

и рассмотрим наряду с оператором U операторы

$$U_n(x) = [U(x)]_n, \quad U_{nm}(x) = U_n([x]_m), \quad x \in l^p.$$

Положим

$$[a_{ik}]_n = \begin{cases} a_{ik}, & i \leq n, \\ 0, & i > n, \end{cases} \quad [a_{ik}]_{mn} = \begin{cases} a_{ik}, & i \leq n, k \leq m, \\ 0, & i > n \text{ или } k > m, \end{cases}$$

и введем матрицы

$$[A]_n = \begin{bmatrix} [a_{11}]_n & [a_{12}]_n & \dots & [a_{1k}]_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a_{i1}]_n & [a_{i2}]_n & \dots & [a_{ik}]_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix},$$

$$[A]_{nm} = \begin{bmatrix} [a_{11}]_{nm} & [a_{12}]_{nm} & \dots & [a_{1k}]_{nm} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a_{i1}]_{nm} & [a_{i2}]_{nm} & \dots & [a_{ik}]_{nm} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что эти матрицы как раз и соответствуют операторам U_n и U_{nm} . В самом деле, сохраняя прежние обозначения за элементами x и $y = U(x)$ и, кроме того, полагая $U_n(x) = \{\{\eta_k\}_n\}$, $U_{nm}(x) = \{\{\eta_k\}_{nm}\}$, будем иметь

$$[\eta_i]_n = \begin{cases} \eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k, & i \leq n, \\ 0, & i > n, \end{cases}$$

т. е.

$$[\eta_i]_n = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{ik}]_n \xi_k, \quad i = 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$[\eta_i]_{nm} = \sum_{k=1}^m [a_{ik}]_n \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{ik}]_{nm} \xi_k, \quad i = 1, 2, \dots$$

Докажем, что последовательности операторов $\{U_n\}$ и $\{U_{nm}\}$ сходятся к U на каждом элементе из l^p . Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} [y]_n = y$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [U(x)]_n = U(x), \quad x \in l^p.$$

Отметим также, что ввиду очевидного неравенства $\|[y]_n\| \leq \|y\|$ имеем $\|U_n(x)\| \leq \|U(x)\| \leq \|U\|\|x\|$, т. е.

$$\|U_n\| \leq \|U\|. \quad (3)$$

Возьмем N, M так, чтобы

$$\|x\|_m - \|x\| < \varepsilon, \quad \|U_n(x) - U(x)\| < \varepsilon \text{ при } m \geq M, n \geq N.$$

Тогда, если $m \geq M, n \geq N$, то

$$\begin{aligned} \|U(x) - U_{nm}(x)\| &\leq \|U(x) - U_n(x)\| + \|U_n(x) - U_n([x]_m)\| < \\ &< \varepsilon + \|U_n\|\|x - [x]_m\| \leq \varepsilon + \|U\|\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} U_{nm}(x) = U(x), \quad x \in l^p.$$

В случае, если U — компактный оператор, сходимость $U_n \rightarrow U$ и $U_{nm} \rightarrow U$ имеет место по норме в пространстве линейных операторов.

Теорема 1. Для того чтобы оператор U был компактным, необходимо и достаточно, чтобы $U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U$ или $U_{nm} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} U$, т. е. чтобы имело место любое из соотношений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n - U\| = 0 \text{ или } \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|U_{nm} - U\| = 0. \quad (4)$$

Доказательство. Достаточность. Операторы U_n и U_{nm} компактны, так как они переводят l^p в конечномерное (n -мерное) пространство. А тогда по теореме IX.2.3 будет компактным и оператор $U = \lim U_n = \lim U_{nm}$.

Необходимость. Обозначим через Γ множество значений $U(x)$ при $\|x\| \leq 1$. Так как U компактен, то Γ — относительно компактное множество. Рассмотрим далее операторы V_n :

$$V_n(y) = [y]_n, \quad y \in l^r; \quad n = 1, 2, \dots$$

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(y) = y, \quad y \in l^r. \quad (5)$$

Следовательно, по теореме Гельфанда (теорема IX.1.3) на относительно компактном множестве Γ сходимость (5) равномерная, т. е. для всех $y \in \Gamma$ и достаточно больших n ($n \geq N$)

$$\| [y]_n - y \| < \varepsilon,$$

или, что то же самое,

$$\| U_n(x) - U(x) \| < \varepsilon, \quad \| x \| \leq 1, \quad n \geq N,$$

а это и означает, что

$$\| U_n - U \| < \varepsilon, \quad n \geq N. \quad (6)$$

Таким образом, первое из соотношений (4) доказано.

Для установления второго исходим из того, что

$$U_N(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x), 0, \dots).$$

Если положить

$$f_{im}(x) = f_i([x]_m) = \sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_k, \quad x = \{\xi_k\} \in l^p,$$

то для достаточно больших m ($m \geq M$) будем иметь

$$\| f_i - f_{im} \| = \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_{ik}|^q \right\}^{1/q} < \frac{\varepsilon}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \| U_N(x) - U_{Nm}(x) \| &= \\ &= \| (f_1(x) - f_{1m}(x), f_2(x) - f_{2m}(x), \dots, f_N(x) - f_{Nm}(x), 0, \dots) \| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{N} \| x \| (1, 1, \dots, 1, 0, \dots) = \frac{\varepsilon}{N} \| x \| N^{1/r} \leq \varepsilon \| x \|. \end{aligned}$$

Наконец, отсюда и из неравенства $\| U_n - U_N \| \leq 2\varepsilon$ ($n \geq N$), которое следует из (6), получаем

$$\begin{aligned} \| U_n(x) - U_{nm}(x) \| &= \| U_n(x) - U_n([x]_m) \| \leq \\ &\leq \| U_n(x) - U_N(x) \| + \| U_n([x]_m) - U_N([x]_m) \| + \| U_N(x) - U_N([x]_m) \| \leq \\ &\leq 2\varepsilon \| x \| + 2\varepsilon \| [x]_m \| + \varepsilon \| x \| \leq 5\varepsilon \| x \|. \end{aligned}$$

Так как, кроме того, $\| U_n - U \| \leq \varepsilon$, то

$$\| U_{nm} - U \| \leq 6\varepsilon, \quad n \geq N, \quad m \geq M,$$

и теорема доказана.

Замечание. Формулировке данной теоремы можно придать другую форму. Прежде всего можно вместо оператора U_{nm} ограничиться оператором U_n и сходимость к U заменить сходимостью в себе. Таким образом, можно сказать, что для компактности оператора U необходимо и достаточно, чтобы для всякого

$\varepsilon > 0$

$$\|U_{nn} - U_{pp}\| < \varepsilon, \quad n, p \geq N_\varepsilon.$$

Отметим теперь, что

$$\|U_{nn}\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|x'\| \leq 1}} \left| \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi'_k \right|, \quad (7)$$

$$x = \{\xi_k\} \in l^p, \quad x' = \{\xi'_k\} \in l^s, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

Действительно, пусть X — B -пространство. Обозначим через F_x функционал в пространстве X^* , определяемый элементом $x \in X$ (см. V.7.3). Тогда

$$\|x\| = \|F_x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |F_x(f)| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)|, \quad f \in X^*.$$

Если оператор U переводит X в пространство Y , то

$$\|U\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|U(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|g\| \leq 1} |g(U(x))|, \quad x \in X, \quad g \in Y^*. \quad (8)$$

Полнимая под X пространство l^p , под Y пространство l^s и взяв в качестве U оператор U_{nn} , будем иметь

$$g(U(x)) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi'_k, \quad x = \{\xi_k\} \in l^p, \quad (9)$$

где последовательность $x' = \{\xi'_k\} \in l^s$ определяет функционал g ($\|g\| = \|x'\|$). Сопоставляя (8) и (9), получаем (7).

Применяя формулу (7) к разности $U_{nn} - U_{pp}$ (считая $n \geq p$), можем записать предыдущее условие в виде

$$\left| \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi'_k - \sum_{i,k=1}^p a_{ik} \xi_i \xi'_k \right| < \varepsilon, \quad p \geq N,$$

для $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \leq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi'_k|^s \leq 1$. Иначе говоря, теорему можно сформулировать и таким образом:

Для того чтобы оператор U был компактным, необходимо и достаточно, чтобы последовательность билинейных форм, соответствующих «срезанным» матрицам $[A]_{nn}$, равномерно сходилась в себе на единичных шарах пространств l^p и l^s .

Это предложение по существу было установлено еще Гильбертом.

2.2. Выше мы исходили из данного линейного оператора U и по нему определяли матрицу (2). Представляет интерес выяснить, при каких условиях данная заранее матрица (2) является матрицей, соответствующей некоторому непрерывному или компактному оператору.

С помощью «срезанных» матриц мы можем образовать операторы U_{nm} , полагая

$$y = U_{nm}(x), \quad x = \{\xi_k\} \in l^p, \quad y = \{\eta_k\} \in l^r,$$

$$\eta_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_k, & i \leq n, \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

Теорема 2. Для того чтобы матрица (2) служила матрицей некоторого непрерывного линейного оператора U из l^p в l^r , необходимо и достаточно, чтобы определенные по этой матрице операторы U_{nn} (или U_{nm}) были ограничены по норме:

$$\|U_{nn}\| \leq K, \quad n = 1, 2, \dots \quad [\text{или } \|U_{nm}\| \leq K \quad (n, m = 1, 2, \dots)]. \quad (10)$$

Для того чтобы оператор U был компактным, необходимо и достаточно, чтобы последовательность операторов U_{nn} сходилась в себе:

$$\lim_{n, p \rightarrow \infty} \|U_{nn} - U_{pp}\| = 0 \quad *). \quad (11)$$

Доказательство. Необходимость. В случае, если оператор U существует, то, как мы показали выше, имеет место сходимостъ $U_{nn} \rightarrow U$ на l^p . Ввиду полноты пространств l^p и l^r нормы операторов U_{nn} ограничены в совокупности (теорема Банаха — Штейнгауза; VII.1.2).

В случае компактности оператора имеем по теореме 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{nn} = U$, откуда непосредственно следует (11).

Достаточность. Рассмотрим сначала поведение операторов U_{nn} на срезанных элементах. Пусть дан элемент $x \in l^p$ такой, что $[x]_m = x$. Считая $n \geq m$, будем иметь

$$U_{nn}(x) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, \dots),$$

$$\eta_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_k; \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, 0, \dots); \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При этом в силу (10)

$$\|U_{nn}(x)\| = \left[\sum_{i=1}^n |\eta_i|^r \right]^{1/r} \leq K \|x\|.$$

В таком случае $\{\eta_i\} \in l^r$ и, следовательно, существует

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{nn}(x) = \{\eta_i\}.$$

Итак, и последовательность $\{U_{nn}\}$ сходится на плотном в l^p

*) Для случая пространства l^2 теорема доказана Гильбертом (см. Гильберт).

множестве срезанных элементов, и поскольку последовательность норм этих операторов ограничена, то сходимость имеет место во всем пространстве l^p . Пусть

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{nn}(x), \quad x \in l^p.$$

Так как для произвольного $x \in l^p$

$$U([x]_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{nn}([x]_m) = (\eta_1^{(m)}, \eta_2^{(m)}, \dots, \eta_i^{(m)}, \dots),$$

$$\eta_i^{(m)} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_k, \quad x = \{\xi_k\}; \quad i = 1, 2, \dots,$$

то при $m \rightarrow \infty$ получаем

$$U(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} U([x]_m) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i, \dots),$$

где

$$\eta_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \eta_i^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k, \quad i = 1, 2, \dots,$$

т. е. оператор U соответствует матрице (2).

Если выполнено условие (11), то, очевидно,

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{nn}.$$

а так как операторы U_{nn} компакты, то компактным будет и оператор U . Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия.

Следствие 1. Если A — симметрическая матрица, то для того, чтобы ей отвечал непрерывный линейный оператор из l^2 в l^2 , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_n |\lambda_1^{(n)}| < \infty, \quad (12)$$

где $\lambda_1^{(n)}$ — наибольшее по модулю собственное значение матрицы

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Действительно, оператор U_{nn} по существу является оператором в n -мерном пространстве, образованном теми элементами, все координаты которых, начиная с $(n+1)$ -й, равны нулю. А тогда

$$\|U_{nn}\| = |\lambda_1^{(n)}|.$$

Таким образом, (12) означает, $\sup_n \|U_{nn}\| < \infty$, что совпадает с условием (10).

Следствие 2. Если матрица (2) удовлетворяет условию

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q \right]^{r/q} \right\}^{1/r} < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (13)$$

то этой матрице отвечает компактный оператор U , причем

$$\|U\| \leq B.$$

Действительно, оценим норму оператора U_{nn} . Имеем $\|U_{nn}(x)\|^r =$

$$= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k \right|^r \leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^q \right]^{r/q} \left[\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right]^{r/p} \leq B^r \|x\|^r.$$

Следовательно, $\|U_{nn}\| \leq B$, т. е. выполнено (10). Поэтому матрица A отвечает линейный оператор U , причем $\|U\| \leq B$.

Понимая под U_n оператор, определенный в 2.1, применим найденную оценку для нормы оператора U к разности $U - U_n$:

$$\|U - U_n\| \leq \left\{ \sum_{i=n+1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q \right]^{r/q} \right\}^{1/r},$$

откуда ясно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U - U_n\| = 0$, а потому U компактен.

Замечание 1. В случае, если $p = r = 2$, условие (13) приобретает вид

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

Замечание 2. Если $p = 1$, то условие (13) надо заменить условием

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sup_k |a_{ik}|^r \right\}^{1/r} < \infty. \quad (14)$$

Доказательство проводится аналогично.

§ 3. Интегральные операторы в пространствах функций

В этом параграфе указываются условия, при которых интегральный оператор U

$$y = U(x), \quad y(s) = \int_D K(s, t) x(t) dt, \quad s \in D', \quad (1)$$

является непрерывным (или компактным) оператором, преобразующим одно пространство функций X в другое Y . Большая часть результатов относится при этом к случаю $X = L^p(D)$, $Y = L^q(D')$ ($1 \leq p, q \leq \infty$), где D и D' — ограниченные области

μ -мерного, соответственно ν -мерного, евклидова пространства *). Не умаляя общности, будем в дальнейшем считать, что $\text{mes } D = 1$.

Функция $K(s, t)$ — ядро оператора U — всегда предполагается измеримой в области $D' \times D$, лежащей в $(\mu + \nu)$ -мерном пространстве, и, следовательно, для почти всех $s \in D'$ функция $K(s, t)$ измерима по t , а для почти всех $t \in D$ измерима по s .

Факты, установленные в этом параграфе, находят важнейшее применение в § 4 при изложении теорем вложения С. Л. Соболева, которые в свою очередь играют большую роль в теории дифференциальных уравнений математической физики.

Большинство результатов этого параграфа представляет обобщение теорем С. Л. Соболева об интегралах типа потенциала. Изложение здесь и в § 4 следует статье Л. В. Канторовича [11].

3.1. Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

$$1) \quad \left[\int_D |K(s, t)|^r dt \right]^{1/r} \leq C_1, \quad r > 0, \quad (2)$$

для почти всех $s \in D'$;

$$2) \quad \left[\int_{D'} |K(s, t)|^\sigma ds \right]^{1/\sigma} \leq C_2, \quad \sigma > 0, \quad (3)$$

для почти всех $t \in D$;

$$3) \quad q \geq p, \quad q \geq \sigma, \quad \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right) p' \leq r^{**}, \quad p, q \geq 1. \quad (4)$$

Тогда интегральный оператор (1) является непрерывным линейным оператором из пространства $L^p(D)$ в $L^q(D')$, причем ***)

$$\|U\| \leq C_1^{1-\sigma/q} C_2^{\sigma/q}. \quad (5)$$

Доказательство. Преобразуем очевидную оценку для $|y(s)|$:

$$\begin{aligned} |y(s)| &\leq \int_D |K(s, t)| |x(t)| dt = \\ &= \int_D [|K(s, t)|^\sigma |x(t)|^p]^{1/q} |x(t)|^{p(1/p-1/q)} |K(s, t)|^{1-\sigma/q} dt. \end{aligned}$$

Применим к последнему интегралу обобщенное неравенство

*) В §§ 3, 4, в связи с большим количеством индексов мы обозначаем конечномерное пространство через R^μ или R^ν , а не через R^m и R^n , как это принято на протяжении всей книги.

**) Здесь и в дальнейшем штрихом обозначен «сопряженный» показатель. Он определяется равенством $1/p + 1/p' = 1$.

***) Сформулированная теорема обобщена Х. Л. Смолицким [1].

Гёльдера (IV.2.4) с показателями

$$\lambda_1 = q, \quad \lambda_2 = \frac{1}{1/p - 1/q}, \quad \lambda_3 = p' = \frac{p}{p-1}, \quad \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 1 \quad *).$$

Это даст

$$|y(s)| \leq \left[\int_D |K(s, t)|^\sigma |x(t)|^p dt \right]^{1/q} \left[\int_D |x(t)|^p dt \right]^{1/p-1/q} \times \\ \times \left[\int_D |K(s, t)|^{p'(1-\sigma/q)} dt \right]^{1-1/p}. \quad (6)$$

Обозначая

$$\lambda = p' \left(1 - \frac{\sigma}{q} \right),$$

будем иметь в силу (2), учитывая, что $\text{mes } D = 1$ и, по (4), $\lambda \leq r$,

$$\left[\int_D |K(s, t)|^\lambda dt \right]^{1-1/p} = \left[\int_D |K(s, t)|^\lambda dt \right]^{\frac{1}{\lambda}(1-\sigma/q)} \leq \\ \leq \left[\int_D |K(s, t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}(1-\sigma/q)} \leq C_1^{1-\sigma/q}.$$

Используя это в (6), получим оценку для $|y(s)|$:

$$|y(s)| \leq \left[\int_D |K(s, t)|^\sigma |x(t)|^p dt \right]^{1/q} \|x\|^{1-p/q} C_1^{1-\sigma/q}. \quad (7)$$

Оценивая с помощью этого неравенства $\|y\|$, находим

$$\|y\| = \left[\int_{D'} |y(s)|^q ds \right]^{1/q} \leq \\ \leq \left\{ \int_{D'} \int_D |K(s, t)|^\sigma |x(t)|^p dt ds \right\}^{1/q} \|x\|^{1-p/q} C_1^{1-\sigma/q} = \\ = C_1^{1-\sigma/q} \left\{ \int_D |x(t)|^p \left(\int_D |K(s, t)|^\sigma ds \right) dt \right\}^{1/q} \|x\|^{1-p/q} \leq C_1^{1-\sigma/q} C_2^{\sigma/q} \|x\|,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Замечание 1. В случае, если фигурирующее в условии 3) требование $q \geq \sigma$ не выполнено, основное заключение теоремы о том, что (1) есть непрерывный оператор из L^p в L^q , все же справедливо. Действительно, если $q < \sigma$, то, заменяя q на $q_1 = \sigma$, сохраним неравенства (4). А в таком случае U есть непрерывный оператор из L^p в L^{q_1} и тем более в L^q (так как $q < q_1$).

*) Мы предполагаем, что $q > p > 1$. Рассмотрение случая, когда $p = q$, предоставляем читателю. Случай $p = 1$ рассмотрен в замечании 3.

Если же не выполнено условие $q \geq p$, то оператор U будет непрерывен из L^p в L^q в том случае, когда выполнено неравенство

$$p' \left(1 - \frac{\sigma}{p}\right) \leq r, \quad (8)$$

получающееся из (4) заменой q на $q_1 = p$.

Отметим, что (8) будет выполнено, если $\sigma \geq 1$, $r \geq 1$.

Замечание 2. Ограничение $\text{mes } D = 1$ не является, очевидно, существенным. Его выполнения всегда можно добиться, применяя преобразование подобия к области D . При этом в некоторых оценках может появиться множитель A , зависящий лишь от $\text{mes } D$ и показателей.

Замечание 3. Отметим предельный случай теоремы, когда $p = 1$, т. е. когда речь идет об операторе, переводящем $L^1(D)$ в $L^q(D')$. В этом случае условия теоремы упрощаются. Именно, чтобы оператор U являлся непрерывным из $L^1(D)$ в $L^q(D')$, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\left[\int_{D'} |K(s, t)|^q ds \right]^{1/q} \leq C_2 \quad (3')$$

для почти всех $t \in D$; при этом для нормы оператора U имеет место оценка

$$\|U\| \leq C_2.$$

Таким образом, условия 1) и 3) отбрасываются, а условие 2) должно выполняться для $\sigma = q$.

Доказательство теоремы в этом случае также упрощается, так как при установлении (6) будет отсутствовать последний множитель, и достаточно будет использовать обычное неравенство Гёльдера.

Замечание 4. Отметим другой важный случай, когда $q = \infty$. В этом случае теорема формулируется так: интегральный оператор (1) переводит $L^p(D)$ в $L^\infty(D')$, если выполнено условие (2) при некотором $r \geq p'$. Норма оператора U оценивается с помощью неравенства

$$\|U\| \leq C_1.$$

Доказательство в этом случае получается непосредственным применением неравенства Гёльдера к (1).

Замечание 5. Теорема сохраняет силу и в том случае, когда в неравенстве (2) правая часть зависит от s , именно, если неравенства (2) и (3) заменяются следующими:

$$\left[\int_D |K(s, t)|^r dt \right]^{1/r} \leq C_1 \Psi(s), \quad (2a)$$

$$\left\{ \int_{D'} [|K(s, t)| (\Psi(s))^{q/\sigma - 1}]^\sigma ds \right\}^{1/\sigma} \leq C_2. \quad (3a)$$

В частности, сохраняется и неравенство (5).

3.2. Переходим к описанию компактных операторов. Докажем сначала простую теорему.

Теорема 2. *Интегральный оператор (1) является компактным оператором из $L^p(D)$ в $L^q(D')$, если его ядра суммируемо в области $D \times D'$ со степенью r' , где $r = \min(p, q')$, т. е. если*

$$\left[\int_{D'} \int_D |K(s, t)|^{r'} dt ds \right]^{1/r'} \leq C < \infty. \quad (9)$$

При этом

$$\|U\| \leq AC, \quad (10)$$

где можно принять

$$A = [\text{mes } D']^{\frac{1}{q(r'/q)'}}.$$

Доказательство. Прежде всего установим справедливость указанной оценки для нормы оператора U . Пользуясь неравенством Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} |y(s)| &\leq \left[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt \right]^{1/r'} \left[\int_D |x(t)|^p dt \right]^{1/p} \leq \\ &\leq \left[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt \right]^{1/r'} \left[\int_D |x(t)|^p dt \right]^{1/p} = \|x\| \left[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt \right]^{1/r'}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|y\| = \left[\int_{D'} |y(s)|^q ds \right]^{1/q} \leq \|x\| \left\{ \int_{D'} \left[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt \right]^{q/r'} ds \right\}^{1/q},$$

Учитывая, что $r \leq q'$ и, следовательно, $r' \geq q$, применим к внешнему интегралу неравенство Гёльдера с показателями $\frac{r'}{q}$ и $\left(\frac{r'}{q}\right)'$; это даст

$$\|y\| \leq \|x\| \left\{ \int_{D'} \left[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt \right] ds \right\}^{1/r'} \left\{ \int_{D'} 1^{\left(\frac{r'}{q}\right)'} ds \right\}^{(q(\frac{r'}{q})')^{-1}} \leq AC \|x\|,$$

откуда и следует (10).

Ядро K есть элемент пространства $L^{r'}(D \times D)$, поэтому найдется такая последовательность непрерывных ядер K_n , что

$$\left[\int_{D'} \int_D |K(s, t) - K_n(s, t)|^{r'} dt ds \right]^{1/r'} \leq \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Обозначая через U_n интегральный оператор с ядром $K_n(s, t)$, получим, что U_n компактен (см. IX.2.1) и согласно (10) и (11)

$$\|U_n - U\| \leq A\varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

т. е. последовательность $\{U_n\}$ сходится к U . А тогда оператор U компактен (теорема IX.2.3).

З а м е ч а н и е. Если ядро $K(s, t)$ таково, что

$$B = \left\{ \int_{D'} \left[\int_D |K(s, t)|^{p'} dt \right]^{q/p'} ds \right\}^{1/q} < \infty, \quad (12)$$

то оператор U является компактным оператором из $L^p(D)$ в $L^q(D')$, причем $\|U\| \leq B$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы.

Т е о р е м а 3. Пусть соблюдены условия 1) и 2) теоремы 1, а условие 3) выполнено в усиленной форме:

$$q \geq p, \quad q > \sigma, \quad \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right) p' < r. \quad (13)$$

Тогда интегральный оператор (1) является компактным оператором из $L^p(D)$ в $L^q(D')$.

Доказательство. Выберем число $\rho < r$ так, чтобы соблюдалось условие (4)

$$\left(1 - \frac{\sigma}{q}\right) p' < \rho,$$

и введем ядра $K_n(s, t)$, полагая

$$K_n(s, t) = \begin{cases} -n, & -n > K(s, t), \\ K(s, t), & -n \leq K(s, t) \leq n, \\ n, & K(s, t) > n. \end{cases}$$

Оценим величину

$$\begin{aligned} C_1^{(n)} &= \text{vrai sup}_{s \in D'} \left\{ \int_D |K(s, t) - K_n(s, t)|^\rho dt \right\}^{1/\rho} \leq \\ &\leq \text{vrai sup}_{s \in D'} \left\{ \int_{A_n(s)} |K(s, t)|^\rho dt \right\}^{1/\rho}, \end{aligned}$$

где через $A_n(s)$ обозначена совокупность тех точек из D , для которых $|K(s, t)| > n$. Если $t \in A_n(s)$, то, так как $|K(s, t)| > n$,

$$|K(s, t)|^\rho \leq \frac{1}{n^{r-\rho}} |K(s, t)|^r,$$

а потому

$$C_1^{(n)} \leq \text{vrai sup}_{s \in D'} \left\{ \int_{A_n(s)} \frac{1}{n^{r-\rho}} |K(s, t)|^r dt \right\}^{\frac{1}{r} \cdot \frac{r}{\rho}} \leq n^{1-r/\rho} C_1^{r/\rho}.$$

Обозначая через U_n , как и раньше, оператор с ядром $K_n(s, t)$ и применяя для оператора $U - U_n$ оценку (5) теоремы 1 (с заме-

ной C_1 на $C_1^{(n)} \leq n^{1-r/\rho} C_1^{r/\rho}$, получим

$$\|U - U_n\| \leq (n^{1-r/\rho} C_1^{r/\rho})^{1-\sigma/q} C_2^{\sigma/q},$$

откуда вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U - U_n\| = 0$.

Поскольку ядро оператора U_n ограничено, то оно суммируемо с любой степенью; следовательно, по теореме 2 оператор U_n компактен. А тогда и оператор U , являясь пределом последовательности компактных операторов, компактен (теорема IX.2.3).

З а м е ч а н и е 1. Утверждение теоремы остается в силе, если даже в третьем из условий (13) имеет место знак равенства, но существует такая возрастающая функция $\Phi(\lambda)$ ($\lambda \geq 0$), что отношение $\Phi(\lambda)/\lambda$, возрастаая, стремится к бесконечности при $\lambda \rightarrow \infty$, причем неравенство (2) выполнено в усиленной форме:

$$\left\{ \int_D |\Phi(|K(s, t)|)|^r dt \right\}^{1/r} \leq C_1.$$

З а м е ч а н и е 2. Теоремы 1—3 справедливы и в том случае, когда D и D' — произвольные пространства с конечной мерой (в доказательствах при этом потребуются лишь незначительные изменения). Более того, их можно обобщить на широкие классы идеальных пространств.

3.3. Введем в рассмотрение пространство $\text{Lip } \beta$ всех функций, определенных в области D' и удовлетворяющих там условию Липшица с показателем β ($0 < \beta \leq 1$); $y \in \text{Lip } \beta$ означает, таким образом, что существует постоянная B такая, что

$$|y(s + \Delta s) - y(s)| \leq B|\Delta s|^\beta \quad (\text{отрезок } [s, s + \Delta s] \text{ входит в } D'),$$

где под $|\Delta s|$ понимается длина вектора Δs в ν -мерном пространстве. Очевидно, что всякая функция $y \in \text{Lip } \beta$ допускает единственное непрерывное распространение на замыкание $\bar{D}'$. Действительно, если $s_n \rightarrow s$, $s_n \in D'$, $s \in \bar{D}'$, то

$$|y(s_n) - y(s_m)| \leq B|s_n - s_m|^\beta \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, $\{y(s_n)\}$ — последовательность Коши, откуда существует $y(s) = \lim y(s_n)$. Опять, пользуясь условием Липшица, проверяем, что $y(s)$ не зависит от выбора $s_n \rightarrow s$. Так как продолженная функция y , очевидно, удовлетворяет условию Липшица на $\bar{D}'$ с тем же показателем β , то y непрерывна на компакте $\bar{D}'$. Таким образом, определено естественное вложение $\text{Lip } \beta$ в $C(D')$ (см. IV.4.4). Норма $\text{Lip } \beta$ определяется соотношением

$$\|y\| = \sup_{[s, s+\Delta s] \subset D'} \frac{|y(s+\Delta s) - y(s)|}{|\Delta s|^\beta} + \sup_{s \in D'} |y(s)| = C_\beta(y) + \|y\|_C.$$

Предоставляем читателю проверить, что при этом $\text{Lip } \beta$ обращается в B -пространство.

Рассмотрим более подробно случай интегрального оператора (1), когда множества D и D' лежат в одном и том же пространстве, а все особенности ядра $K(s, t)$ сосредоточены на «диагонали» множества $D' \times D$, т. е. при $s = t$. Для $s \neq t$ будем предполагать ядро дифференцируемым по координатам точки s . Через $|s - t|$ будем обозначать в дальнейшем расстояние между точками s и t , иначе говоря, длину вектора $s - t$.

Для указанного случая имеет место

Теорема 4. Пусть ядро $K(s, t)$ таково, что:

$$1) \quad \left\{ \int_D [|\operatorname{grad}_s K(s, t)| \cdot |s - t|^{1-\beta}]^r dt \right\}^{1/r} \leq E, \quad (14)$$

где через grad_s обозначен градиент, вычисленный по переменной s ;

$$2) \quad \left\{ \int_D \left[\frac{|K(s, t)|}{|s - t|^\beta} \right]^r dt \right\}^{1/r} \leq F. \quad (15)$$

Тогда интегральный оператор (1) отображает пространство $L^{r'}(D)$ (и любое $L^p(D)$ при $p \geq r'$) в пространство $\operatorname{Lip} \beta$ причем

$$C_\beta(y) \leq [E + (2^\beta + 3^\beta)F] \|x\|. \quad (16)$$

Доказательство. Возьмем произвольный отрезок $[s, s + \Delta s]$, целиком лежащий внутри D' . Для приращения функции $y = U(x)$ вдоль этого отрезка имеем

$$|y(s + \Delta s) - y(s)| = \left| \int_D [K(s + \Delta s, t) - K(s, t)] x(t) dt \right| \leq \left[\int_D |K(s + \Delta s, t) - K(s, t)|^r dt \right]^{1/r} \|x\|_{L^{r'}}. \quad (17)$$

Для оценки первого множителя разобьем область интегрирования на две части: D_1 — пересечение D с шаром $|t - s| \leq 2|\Delta s|$ и $D_2 = D \setminus D_1$. Для интеграла от $|K(s, t)|^r$ по D_1 имеем

$$\left[\int_{D_1} |K(s, t)|^r dt \right]^{1/r} = \left[\int_{D_1} \left(\frac{|K(s, t)|}{|s - t|^\beta} \right)^r |s - t|^{\beta r} dt \right]^{1/r} \leq (2|\Delta s|)^\beta F.$$

Аналогичная оценка верна и для интегралов от $|K(s + \Delta s, t)|^r$ с заменой множителя 2^β на 3^β , поскольку

$$|s + \Delta s - t| \leq |s - t| + |\Delta s| \leq 3|\Delta s|.$$

Учитывая это, находим

$$I_1 = \left[\int_{D_1} |K(s + \Delta s, t) - K(s, t)|^r dt \right]^{1/r} \leq \left[\int_{D_1} |K(s + \Delta s, t)|^r dt \right]^{1/r} + \left[\int_{D_1} |K(s, t)|^r dt \right]^{1/r} \leq (2^\beta + 3^\beta) F |\Delta s|^\beta. \quad (18)$$

Далее,

$$I_2 = \left[\int_{D_2} |K(s + \Delta s, t) - K(s, t)|^r dt \right]^{1/r} \leq \left[\int_{D_2} \left[\int_s^{s+\Delta s} |\operatorname{grad}_\lambda K(\lambda, t)| d\lambda \right]^r dt \right]^{1/r} *).$$

*) Выражение $\int_s^{s+\Delta s} \varphi(\lambda) d\lambda$ следует понимать как интеграл по отрезку $[s, s \pm \Delta s]$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

При этом, так как $t \in D_2$, то $|\lambda - t| \geq |s - t| - |\lambda - s| \geq |s - t| - |\Delta s| \geq \frac{1}{2}|s - t|$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2^{1-\beta} \left\{ \int_{D_2} \left[\int_s^{s+\Delta s} |\operatorname{grad}_\lambda K(\lambda, t)| |\lambda - t|^{1-\beta} d\lambda \right]^r \frac{dt}{|s - t|^{r(1-\beta)}} \right\}^{1/r} \leq \\ &\leq 2^{1-\beta} \left\{ \int_{D_2} \left[\int_s^{s+\Delta s} (|\operatorname{grad}_\lambda K(\lambda, t)| |\lambda - t|^{1-\beta})^r d\lambda \right] \times \right. \\ &\quad \times \left. \left[\int_s^{s+\Delta s} 1 \cdot d\lambda \right]^{r/r'} \frac{dt}{|s - t|^{r(1-\beta)}} \right\}^{1/r} \leq \\ &\leq \frac{2^{1-\beta} |\Delta s|^{1/r'}}{(2|\Delta s|)^{1-\beta}} \left\{ \int_s^{s+\Delta s} d\lambda \int_{D_2} [|\operatorname{grad}_\lambda K(\lambda, t)| |\lambda - t|^{1-\beta}]^r dt \right\}^{1/r} \leq \\ &\leq |\Delta s|^{\frac{1}{r'} + \beta - 1 + \frac{1}{r}} E = |\Delta s|^\beta E. \quad (19) \end{aligned}$$

Сопоставляя (18) и (19), получим

$$\left[\int_D |K(s + \Delta s, t) - K(s, t)|^r dt \right]^{1/r} \leq I_1 + I_2 \leq [E + (2^\beta + 3^\beta) F] |\Delta s|^\beta,$$

а тогда по (17)

$$\frac{|\psi(s + \Delta s) - \psi(s)|}{|\Delta s|^\beta} \leq [E + (2^\beta + 3^\beta) F] \|x\|,$$

что и приводит к (16).

Оценка максимума модуля $\psi(s)$ может быть получена на основании того, что в силу условия (15) U есть непрерывный оператор из $L^r(D)$ в $L^\infty(D')$ (см. замечание 4 к теореме 1), а потому

$$\max |\psi(s)| \leq A \|x\|$$

Вместе с (16) это неравенство и устанавливает непрерывность оператора U .

Замечание 1. Так как функции, имеющие ограниченную норму в $\operatorname{Lip} \beta$, равномерно непрерывны и равномерно ограничены, то из доказанной теоремы следует, что если ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условиям (14) и (15) для некоторого $\beta > 0$, то оператор (1), рассматриваемый как оператор из $L^r(D)$ в $C(D')$, компактен.

Замечание 2. Утверждение теоремы сохраняет силу и для случая, когда $p = \infty$. Именно, если условия (14) и (15) выполнены для $r = 1$ и некоторого $\beta > 0$, то оператор U — непрерывный оператор из $L^\infty(D)$ в $\operatorname{Lip} \beta$, причем

$$C_\beta(\psi) \leq [E + (2^\beta + 3^\beta) F] \|x\|.$$

Как и выше, рассматривая U как оператор из $L^\infty(D)$ в $C(D')$, получим, что он компактен.

Отметим, что обобщение теоремы 4 на БФП получено в работе Берколайко и Рутцко [1].

3.4. Рассмотрим теперь случай, когда ядро оператора U зависит от параметра.

Будем говорить, что функция $K_\tau(s, t)$ при $\tau = \tau_0$ почти равномерно непрерывна по параметру τ относительно s и t , если, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, $h > 0$ и s , найдутся $\delta > 0$ и множество $A(s)$ такие, что $|K_\tau(s, t) - K_{\tau_0}(s, t)| < \varepsilon$, как только $|\tau - \tau_0| < \delta$, $t \notin A(s)$, причем $\text{mes } A(s) < h^*$.

Понятие почти равномерной непрерывности используется в следующей теореме.

Теорема 5. Пусть ядро интегрального оператора почти равномерно непрерывно относительно τ при $\tau = \tau_0$ и для каждого τ удовлетворяет условиям теоремы 3, причем все входящие в формулировку этой теоремы постоянные (C_1 , C_2 , σ и т. д.), не зависят от τ . Тогда интегральный оператор U_τ

$$y_\tau = U_\tau(x), \quad y_\tau(s) = \int_D K_\tau(s, t) x(t) dt, \\ x \in L^p(D), \quad y_\tau \in L^q(D'), \quad (20)$$

непрерывно зависит от параметра в том смысле, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|U_\tau - U_{\tau_0}\| = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$y_{\tau_0}(s) - y_\tau(s) = \int_D [K_{\tau_0}(s, t) - K_\tau(s, t)] x(t) dt.$$

Используя обозначения доказательства теоремы 3, оценим постоянную

$$C_1^{(p)} = \text{vrai sup}_{s \in D'} \left[\int_D |K_{\tau_0}(s, t) - K_\tau(s, t)|^p dt \right]^{1/p}.$$

Считая $\varepsilon > 0$, $h > 0$ и s заданными, найдем согласно определению почти равномерной непрерывности соответствующие им $\delta > 0$ и $A(s) \subset D$. Тогда, полагая для простоты $\rho \geq 1$ **), получим

$$\left[\int_D |K_{\tau_0}(s, t) - K_\tau(s, t)|^p dt \right]^{1/p} \leq \\ \leq \left[\int_{D' \setminus A(s)} |K_{\tau_0}(s, t) - K_\tau(s, t)|^p dt \right]^{1/p} +$$

*) Значения параметра τ — точки евклидова пространства. Однако можно подразумевать под τ и элементы произвольного метрического пространства.

**) Если $\rho < 1$, надо воспользоваться неравенством

$$(a + b)^{1/\rho} \leq 2^{1/\rho-1} [a^{1/\rho} + b^{1/\rho}], \quad a, b \geq 0.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\int_{A(s)} |K_{\tau_0}(s, t) - K_{\tau}(s, t)|^p dt \right]^{1/p} \leq \\
& \leq \varepsilon [\text{mes } D]^{1/p} + \left[\int_{A(s)} |K_{\tau_0}(s, t) - K_{\tau}(s, t)|^{p \cdot \frac{r}{p}} dt \right]^{1/r} \left[\int_{A(s)} dt \right]^{1/\left(\frac{r}{p}\right)'} \leq \\
& \leq \varepsilon [\text{mes } D]^{1/p} + 2C_1 h^{1/p-1/r}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $C_1^{(p)} \leq \varepsilon [\text{mes } D]^{1/p} + 2C_1 h^{1/p-1/r}$, т. е. величина $C_1^{(p)}$ для оператора $U_{\tau_0} - U_{\tau}$ может быть сделана сколь угодно малой. Поскольку согласно теореме 1 (см. 5))

$$\|U_{\tau_0} - U_{\tau}\| \leq [C_1^{(p)}]^{1-\sigma/q} [2C_2]^{q/q},$$

то $\|U_{\tau_0} - U_{\tau}\|$ также сколь угодно мало, что и доказывает утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Теорема непосредственно применима к случаю, когда $q = \infty$ (ср. замечание 4 к теореме 1). Точнее говоря, если $r > p'$ и выполнено (2) (при каждом τ), а ядро $K_{\tau}(s, t)$ почти равномерно непрерывно по параметру при $\tau = \tau_0$, то имеет место непрерывная зависимость оператора (20) от параметра τ . Здесь это обстоятельство означает, очевидно, что по $\eta > 0$ можно подобрать $\lambda > 0$ так, что

$$|y_{\tau_0}(s) - y_{\tau}(s)| < \eta, \quad |\tau_0 - \tau| < \lambda, \quad s \in D'.$$

3.5. В заключение рассмотрим случай ядра специального типа. Именно, считая, что множества D и D' лежат в одном и том же пространстве, будем рассматривать ядра вида

$$K(s, t) = \frac{B(s, t)}{|s - t|^m}, \quad (21)$$

где $B(s, t)$ — ограниченная функция, непрерывная при $s \neq t$. Ядра указанного вида называются *ядрами типа потенциала*.

Чтобы такое ядро было суммируемо по t со степенью r , точнее говоря, чтобы было выполнено (2), достаточно потребовать, чтобы $mr < \mu$; условие (3) будет выполнено, если $mv < \nu$. Таким образом, в качестве r и σ можно взять числа, сколь угодно близкие к μ/m и ν/m соответственно. Условия (4) запишутся при этом в виде

$$q \geq p, \quad q > \frac{\nu}{m}, \quad \left(1 - \frac{\nu}{mq}\right)p' < \frac{\mu}{m}.$$

Принимая во внимание замечание 1 к теореме 1, можно, таким образом, сказать, что условия

$$q < \frac{\nu p}{\mu - (\mu - m)p}, \quad \nu > \mu - (\mu - m)p \quad (22)$$

гарантируют непрерывность оператора (1) с ядром вида (21), рассматриваемого как оператор из $L^p(D)$ в $L^q(D')$. Поскольку при этом выполнены и условия теоремы 3 (с учетом аналогичного замечания), то из (22) вытекает и компактность оператора U^*). В частности, когда $m = \mu - 1$, условия (22) принимают вид

$$q < \frac{vp}{\mu - p}, \quad v > \mu - p. \quad (23)$$

Теорема 4 применима к рассматриваемому случаю при следующих условиях. Так как, очевидно,

$$|\operatorname{grad}_s K(s, t)| \leq \frac{|\operatorname{grad}_s B(s, t)|}{|s - t|^m} + m \frac{|B(s, t)|}{|s - t|^{m+1}},$$

то выполнение условий (14) и (15) обеспечивается, если

$$\sup_{s \in D'} \left[\int_D \frac{|\operatorname{grad}_s B(s, t)|^r}{|s - t|^{(m+\beta-1)r}} dt \right]^{1/r} \leq E', \quad (24)$$

$$(m + \beta)r < \mu. \quad (25)$$

При этих условиях оператор (1) является непрерывным оператором из пространства $L^p(D)$ в пространство $\operatorname{Lip} \beta$.

Если рассматривать ядро $K(s + \Delta s, t)$ как функцию параметра Δs , то (поскольку по выключении некоторой сколь угодно малой окрестности точки s ядро $K(s + \Delta s, t)$ становится равномерно непрерывным по параметру Δs при $\Delta s = 0$) на основании теоремы 5 заключаем, что

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \|U_{\Delta s} - U\| = 0,$$

где $U_{\Delta s}$ — интегральный оператор с ядром $K(s + \Delta s, t)$. В частности,

$$\int_{D'} |y(s + \Delta s) - y(s)|^q ds \rightarrow 0 \text{ при } \Delta s \rightarrow 0^{**}).$$

Аналогичным образом, пусть D' есть v -мерное многообразие, непрерывно и гладко зависящее от параметра τ , $D' = D'_\tau$, т. е. многообразие, образованное точками $s + \varphi(s, \tau)$, где s пробегает область D_0 , а $\varphi(s, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, равномерно относительно s и, кроме того, $|\varphi(s, \tau) - \varphi(s', \tau)| \leq \alpha |s - s'|$ ($\alpha < 1$). Тогда

*) Действительно, первое из соотношений (22) равносильно неравенству $\left(1 - \frac{v}{mq}\right) p' < \frac{\mu}{m}$. Если при этом $q < p$, то второе из условий (22) обеспечивает выполнение неравенства (8).

**) Здесь и ниже под y понимается результат применения оператора U к некоторому $x \in L^p(D)$: $y = U(x)$.

функция y , рассматриваемая на многообразии D'_τ :

$$y_\tau(s) = y(s + \varphi(s, \tau)) = \int_D K(s + \varphi(s, \tau), t) x(t) dt,$$

непрерывна по τ в метрике пространства $L^q(D'_0)$, т. е.

$$\|y_0 - y_\tau\| = \left\{ \int_{D'_0} |y_0(s) - y_\tau(s)|^q ds \right\}^{1/q} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0.$$

Резюмируя сказанное, можно сформулировать следующие две теоремы.

Теорема 6. Если выполнены условия (22), то интегральный оператор с ядром типа (21) является компактным оператором, отображающим пространство $L^p(D)$ в $L^q(D')$, где D — μ -мерная область евклидова пространства, D' — ν -мерное многообразие в нем. При этом, если это многообразие непрерывно зависит от параметра, то и $y = U(x)$ будет непрерывно по параметру. В частности,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\int_{D'} |y(s + \Delta s) - y(s)|^q ds \right]^{1/q} = 0. \quad (26)$$

Замечание. Теорема справедлива и при $q = \infty$. Условия (22) при этом заменяются следующими (см. замечание 4 к теореме 1):

$$(\mu - m)p > \mu. \quad (27)$$

Соотношение (26) запишется в рассматриваемом случае в виде

$$\sup_s |y(s + \Delta s) - y(s)| \xrightarrow{\Delta s \rightarrow 0} 0,$$

что означает непрерывность функции y , т. е. фактически оператор U переводит в этом случае $L^p(D)$ в $C(D')$.

Условие (27) можно переписать так: $mp' < \mu$. А тогда, применяя замечание к теореме 2, получаем, что U будет компактным оператором из $L^p(D)$ в $L^\infty(D')$ (и, следовательно, как было показано, в $C(D')$). Таким образом, справедлива

Теорема 7. Если выполнено условие (27), то интегральный оператор с ядром типа потенциала является компактным оператором, преобразующим пространство $L^p(D)$ в пространство $C(D')$.

§ 4. Теоремы вложения Соболева

В различных вопросах математической физики и других областей анализа большую роль играют взаимоотношения между дифференциальными свойствами функций. Так, в известных случаях, зная интегральные оценки частных производных, можно

сделать заключение об ограниченности или даже непрерывности самой функции. В ряде случаев по поведению функции во всем пространстве можно судить о ее дифференциальных свойствах на некоторой поверхности и т. д.

В главе VI мы использовали уже идею, что одна и та же функция может быть рассматриваема как элемент различных функциональных пространств. Здесь эта идея будет развита дальше и более систематическим образом. Пространства, изучаемые в этом параграфе, характеризуются теми или иными дифференциальными свойствами входящих в них функций, так что, если одно такое пространство есть часть другого (в теоретико-множественном смысле), то группа свойств, характеризующих первое пространство, влечет за собой свойства, характерные для элементов второго пространства. Далее, сопоставляя в этом случае функцию, рассматриваемую как элемент первого пространства, ей же самой, но рассматриваемой как элемент второго пространства, мы получаем оператор вложения, изучение которого дает возможность не только уточнить установленные уже качественные связи между различными свойствами функций, но и охарактеризовать эти связи количественно.

Результаты этого параграфа принадлежат в основном С. Л. Соболеву (см. Соболев — I, II) и играют фундаментальную роль для приложений в математической физике.

4.1. В дальнейшем важную роль будет играть следующая лемма об интегральном представлении дифференцируемой функции.

Лемма 1. Пусть $x(s)$ — непрерывно дифференцируемая функция, определенная в ограниченной выпуклой области $D \subset R^n$. Справедливо тождество

$$x(s) = \frac{1}{\text{mes } D} \int_D x(t) dt - \sum_{k=1}^{\mu} \int_D \frac{B_k(s, t)}{|s-t|^{\mu-1}} \frac{Dx(t)}{Dt_k} dt, \quad (1)$$

где

$$B_k(s, t) = \frac{d^{\mu} - R^{\mu}}{\mu \text{ mes } D} \frac{t_k - s_k}{|t-s|} = B(s, t) \cos(\bar{l}, t_k), \quad k = 1, \dots, \mu, \quad (2)$$

$$B(s, t) = \frac{d^{\mu} - R^{\mu}}{\mu \text{ mes } D},$$

$d = d(s, t)$ — длина содержащегося в D отрезка луча, идущего из s через точку t , $\bar{l}$ — единичный вектор этого направления, $R = |s-t|$ — расстояние от t до s , $t_1, \dots, t_{\mu}$ — координаты точки t , $\cos(\bar{l}, t_k)$ — косинус угла между направлением $\bar{l}$ и координатной осью t_k .

Лемма 1 является частным случаем более общей леммы, которую мы сформулируем и докажем ниже. Сначала введем необходимые определения и обозначения.

Пусть D — область пространства R^n , а D_1 — ее выпуклая под-область. Будем говорить, что область D является *звездной* относительно подобласти D_1 , если для каждой точки $s \in D$ отрезки, соединяющие s с любой точкой $t \in D_1$, содержатся в D . Тело, образованное всеми такими отрезками (s — фиксированная точка, а t пробегает все D_1), будем для краткости называть «конусом» с вершиной в s и обозначать через V_s . Заметим, что если $s \in D_1$, то $V_s = D_1$.

Пусть $s \in D$, $t \in V_s$. Обозначим через $d_2 = d_2(s, t)$ длину содержащегося в V_s отрезка луча, идущего из s через точку t ; $d_1 = d_1(s, t) = \max \{|s - t|, \tilde{d}_1(s, t)\}$, где $\tilde{d}_1(s, t)$ — длина отрезка упомянутого луча, содержащегося в $V_s \setminus D_1$. В частности, если D — выпуклая область и $D_1 = D$, то $V_s = D$ для каждой точки $s \in D$, причем $d_2(s, t) = d(s, t) = d$ (см. формулировку леммы 1), $d_1(s, t) = |s - t|$.

Введем еще следующие обозначения. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\mu)$ — мультииндекс, т. е. μ -мерный вектор с целыми неотрицательными компонентами. Положим $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_\mu$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_\mu!$; если $t = (t_1, \dots, t_\mu)$ — точка с координатами $t_1, \dots, t_\mu$, то

$$t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \dots t_\mu^{\alpha_\mu}, \quad D^\alpha x(t) = \frac{D^{\alpha_1 + \dots + \alpha_\mu} x(t)}{Dt_1^{\alpha_1} \dots Dt_\mu^{\alpha_\mu}}.$$

В дальнейшем $\sum_{|\alpha| \leq k}$ будет обозначать суммирование по всем мультииндексам α , для которых $|\alpha| \leq k$, k — целое неотрицательное число.

Лемма 1 а. Пусть D — область пространства R^n , звездная относительно выпуклой ограниченной области $D_1 \subset D$, а $x(s)$ — функция, определенная в D и имеющая непрерывные производные до порядка l включительно в D . Пусть $\omega(s)$ — суммируемая функция, определенная на R^n , равная нулю вне D_1 и такая, что

$$\kappa = \int_{R^n} \omega(t) dt = \int_{D_1} \omega(t) dt \neq 0.$$

Тогда для каждой точки $s \in D$ справедливо равенство

$$x(s) = \frac{1}{\kappa} \left[\sum_{|\alpha| \leq l-1} \frac{1}{\alpha!} \int_{D_1} D^\alpha x(t) (s-t)^\alpha \omega(t) dt + \right. \\ \left. + l \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} \int_{V_s} D^\alpha x(t) \frac{(s-t)^\alpha}{|s-t|^\mu} \omega(s, t) dt \right], \quad (1')$$

где

$$\omega(s, t) = \int_{d_1(s, t)}^{d_2(s, t)} \omega \left(s + \rho \frac{t-s}{|t-s|} \right) \rho^{\mu-1} d\rho. \quad (2')$$

Доказательство*). Доопределим функции $D^\alpha x(t)$, $|\alpha| \leq l$, нулем вне D .

Пусть s — произвольная фиксированная точка области D , а $t \in D_1$. Справедлива следующая формула Тейлора:

$$x(s) = \sum_{|\alpha| \leq l-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha x(t) (s-t)^\alpha + \\ + l \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-u)^{l-1} (s-t)^\alpha (D^\alpha x)(t+u(s-t)) du.$$

Умножим обе части этого равенства на $\omega(t)$ и проинтегрируем по R^m (по существу по D_1); тогда после деления обеих частей равенства на κ получим

$$x(s) = \frac{1}{\kappa} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq l-1} \frac{1}{\alpha!} \int_{D_1} D^\alpha x(t) (s-t)^\alpha \omega(t) dt + \right. \\ \left. + \sum_{|\alpha|=l} \frac{l}{\alpha!} \int_{R^m} \int_0^1 (1-u)^{l-1} (s-t)^\alpha (D^\alpha x)(t+u(s-t)) \omega(t) du dt \right\}.$$

Слагаемые первой суммы в правой части полученного равенства совпадают с аналогичными слагаемыми в формуле (1'). Осталось преобразовать интегралы, входящие под знак второй суммы, к виду соответствующих слагаемых в формуле (1'). Для этого на основании теоремы Фубини переставим в них порядок интегрирования и произведем замену переменной интегрирования, полагая $t+u(s-t)=z$, а затем еще раз применим теорему Фубини. Учитывая, что при указанной замене $t = \frac{z-us}{1-u}$, $s-t = \frac{s-z}{1-u}$,

$$dt = \frac{dz}{(1-u)^\mu}, \text{ получим}$$

$$J_\alpha = \int_0^1 \int_{R^m} (1-u)^{l-1} (D^\alpha x)(t+u(s-t)) (s-t)^\alpha \omega(t) dt du = \\ = \int_{R^m} D^\alpha x(z) (s-z)^\alpha \left(\int_0^1 \omega \left(s + \frac{z-s}{1-u} \right) \frac{du}{(1-u)^{\mu+1}} \right) dz.$$

*) Формулировка и методика доказательства леммы 1а в существенном позаимствованы из работ Ю. Г. Решетняка и В. И. Буренкова.

Заменяя теперь $\frac{|s-z|}{1-u}$ на ρ , будем иметь

$$J_\alpha = \int_{R^\mu} D^\alpha x(z) \frac{(s-z)^\alpha}{|s-z|^\mu} \left(\int_{|s-z|}^{\infty} \omega\left(s + \rho \frac{z-s}{|z-s|}\right) \rho^{\mu-1} d\rho \right) dz.$$

При фиксированном s функция

$$\begin{aligned} w(s, z) &= \int_{|s-z|}^{\infty} \omega\left(s + \rho \frac{z-s}{|z-s|}\right) \rho^{\mu-1} d\rho = \\ &= \int_{d_1(s, z)}^{d_2(s, z)} \omega\left(s + \rho \frac{z-s}{|z-s|}\right) \rho^{\mu-1} d\rho \end{aligned}$$

обращается в нуль вне «конуса» V_s . Поэтому окончательно

$$J_\alpha = \int_{V_s} D^\alpha x(z) \frac{(s-z)^\alpha}{|s-z|^\mu} w(s, z) dz.$$

Лемма 1а доказана.

Следствие 1. Положим в лемме 1а $l=1$, $\omega(s) \equiv 1$ на D_1 ($\omega(s) = 0$ вне D_1). Замечая, что тогда $\kappa = \text{mes } D_1$, а

$$w(s, t) = \int_{d_1(s, t)}^{d_2(s, t)} \rho^{\mu-1} d\rho = \frac{d_2^\mu - d_1^\mu}{\mu},$$

получим на основании (1') и (2') следующие формулы:

$$x(s) = \frac{1}{\text{mes } D_1} \int_{D_1} x(t) dt - \sum_{k=1}^{\mu} \int_{V_s} \frac{Dx(t)}{Dt_k} \frac{\tilde{B}_k(s, t)}{|s-t|^{\mu-1}} dt, \quad (3)$$

где

$$\tilde{B}_k(s, t) = \frac{d_2^\mu - d_1^\mu}{\mu \text{mes } D_1} \cdot \frac{t_k - s_k}{|t-s|} = \tilde{B}(s, t) \cos(\bar{l}, t_k), \quad (3')$$

$$\tilde{B}(s, t) = \frac{d_2^\mu - d_1^\mu}{\mu \text{mes } D_1},$$

$\cos(\bar{l}, t_k)$ имеет тот же смысл, что и в лемме 1.

Если, кроме того, предположить, что D — выпуклая ограниченная область, то, полагая $D_1 = D$, получим из (3) и (3') соответственно формулы (1) и (2).

Замечание. Если ограниченная область D является звездной относительно выпуклой области $D_1 \subset D$, то для каждой точки $s \in D_1$ наряду с представлением (3) имеет место также представ-

ление (1). Это следует из того, что если $s \in D_1$, то отрезок, соединяющий ее с любой точкой $t \in D$, содержится в D . Этот факт используется уже в формуле Тейлора, которая являлась исходной при доказательстве леммы 1. Полагая, далее, $\omega(t) = 1$ в D и $\omega(t) = 0$ вне D и поступая, как и при выводе формулы (1'), приходим к формуле (1).

Следствие 2. *Предположим, что функция $\omega(t)$, фигурирующая в лемме 1а, является $l-1$ раз непрерывно дифференцируемой в R^n и она вместе со своими производными до порядка $l-1$ включительно обращается в нуль вне D_1 . Тогда, преобразуя слагаемые первой суммы в правой части (1') путем интегрирования по частям, получим следующее тождество:*

$$x(s) = \int_{D_1} x(t) L(s, t) dt + \sum_{|\alpha|=l} \int_{V_s} D^\alpha x(t) \frac{L_\alpha(s, t)}{|s-t|^{\mu-l}} dt, \quad (4)$$

где

$$L(s, t) = \sum_{|\alpha| \leq l-1} \frac{1}{\alpha! \kappa} D_t^\alpha [(t-s)^\alpha \omega(t)], \quad (5)$$

$$L_\alpha(s, t) = \frac{l}{\alpha! \kappa} \frac{(s-t)^\alpha}{|s-t|^l} w(s, t) \quad (|\alpha| = l), \quad (5')$$

а κ и $w(s, t)$ определяются так же, как и в лемме 1а.

Пусть D — выпуклая область в R^n , ограниченная достаточно гладкой поверхностью S . Пусть $B_k(s, t)$ — функции, фигурирующие в формулировке леммы 1.

Лемма 2. *Функции $B_k(s, t)$ таковы, что интеграл*

$$\int_D \frac{|\operatorname{grad}_s B_k(s, t)|^r}{|s-t|^{(\mu-2+\beta)r}} dt \quad (6)$$

ограничен независимо от s , если только $r < \frac{\mu}{\mu-1}$, а $\beta > 0$ настолько мало, что $(\mu-1+\beta)r < \mu$.

Доказательство. Так как

$$B_k(s, t) = B(s, t) \cos(\vec{l}, t_k),$$

то

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad}_s B_k(s, t)| &\leq \\ &\leq |\operatorname{grad}_s B(s, t)| |\cos(\vec{l}, t_k)| + |B(s, t)| |\operatorname{grad}_s \cos(\vec{l}, t_k)| \leq \\ &\leq |\operatorname{grad}_s B(s, t)| + K/R, \quad R = |s-t|, \end{aligned}$$

где K — некоторая постоянная.

Справедливость утверждения леммы для слагаемого K/R вытекает из условия $(\mu-1+\beta)r < \mu$. Проверим утверждение леммы для первого слагаемого. Поскольку $B(s, t) = \frac{1}{\mu \operatorname{mes} D} \times$

$\times (d^\mu - R^\mu)$, и для R^μ лемма, очевидно, верна, остается доказать ее лишь для функции d^μ .

Обозначим через u точку пересечения луча, определяемого вектором $\bar{l}$, с границей области D , через $\bar{n} = (A_1, \dots, A_\mu)$ — единичный вектор нормали к поверхности S в точке u (A_i , $1 \leq i \leq \mu$, — проекции вектора $\bar{n}$ на оси координат), а через φ — угол между $\bar{l}$ и $\bar{n}$.

Пусть $\tilde{s} = s + h e_j$, где e_j — единичный вектор, направленный по j -й координатной оси, — точка, близкая к s . Пусть $\tilde{u}$ — точка пересечения луча, исходящего из $\tilde{s}$ в направлении к t , с границей области D , а $\tilde{\varphi}$ — угол между этим лучом и введенным выше вектором $\bar{n}$. Пусть, наконец, v — точка на касательной гиперплоскости к поверхности S в точке u , являющаяся основанием перпендикуляра, опущенного из $\tilde{u}$ на эту гиперплоскость.

Запишем координаты точек $u = (u_1, \dots, u_\mu)$ и $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_\mu)$ в виде

$$u_i = s_i + (t_i - s_i)r(s), \quad \tilde{u}_i = \tilde{s}_i + (t_i - \tilde{s}_i)r(\tilde{s}), \quad 1 \leq i \leq \mu.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d(s) &= |u - s| = r(s)|t - s| = r(s)R(s), \\ d(\tilde{s}) &= |\tilde{u} - \tilde{s}| = r(\tilde{s})|t - \tilde{s}| = r(\tilde{s})R(\tilde{s}). \end{aligned}$$

Найдем производную от функции $d(s)$ по координате s_j . Имеем

$$\begin{aligned} d'_{s_j}(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(s + h e_j) - d(s)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(\tilde{s})R(\tilde{s}) - r(s)R(s)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{r(\tilde{s}) - r(s)}{h} R(\tilde{s}) + \frac{R(\tilde{s}) - R(s)}{h} r(s) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\frac{R(\tilde{s}) - R(s)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} R'_{s_j}(s) = \frac{s_j - t_j}{R(s)}. \quad (8)$$

Чтобы найти предел первого отношения в правой части (7), представим $r(s)$ и $r(\tilde{s})$ в виде

$$r(s) = \frac{d(s)}{R(s)} = \frac{|u - s| \cos \varphi}{|t - s| \cos \varphi} = \frac{(u - s, \bar{n})}{(t - s, \bar{n})} = \frac{\sum_{i=1}^{\mu} A_i (u_i - s_i)}{\sum_{i=1}^{\mu} A_i (t_i - s_i)}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} r(\tilde{s}) &= \frac{d(\tilde{s})}{R(\tilde{s})} = \frac{|\tilde{u} - \tilde{s}| \cos \tilde{\varphi}}{|\tilde{t} - \tilde{s}| \cos \tilde{\varphi}} = \frac{(\tilde{u} - \tilde{s}, \bar{n})}{(\tilde{t} - \tilde{s}, \bar{n})} = \\ &= \frac{(\tilde{u} - v, \bar{n}) + (v - u, \bar{n}) + (u - \tilde{s}, \bar{n})}{(\tilde{t} - \tilde{s}, \bar{n})} = \frac{|\tilde{u} - v| + \sum_{i=1}^{\mu} A_i (u_i - s_i) - A_j h}{\sum_{i=1}^{\mu} A_i (t_i - s_i) - A_j h}, \quad (10) \end{aligned}$$

так как вектор $\tilde{u} - v$ коллинеарен вектору $\tilde{n}$, а $v - u$ ортогонален $\tilde{n}$ и, кроме того, $\tilde{s} = s + h e_j = (s_1, \dots, s_j + h, \dots, s_\mu)$.

Заметим, что в силу предположений относительно поверхности, ограничивающей D ,

$$\frac{|\tilde{u} - v|}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0^* \quad (11)$$

Используя соотношения (9)–(11) и вводя обозначения

$$P = \sum_{i=1}^{\mu} A_i (u_i - s_i) = d(s) \cos \varphi, \quad Q = \sum_{i=1}^{\mu} A_i (t_i - s_i) = R(s) \cos \varphi,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{r(\tilde{s}) - r(s)}{h} &= \frac{|\tilde{u} - v|}{h(Q - A_j h)} + \frac{1}{h} \left[\frac{P - A_j h}{Q - A_j h} - \frac{P}{Q} \right] \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{A_j (P - Q)}{Q^2} = \\ &= \frac{A_j (d(s) - R(s))}{R^2(s) \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, на основании (7), (8) и (12) имеем

$$d'_{s_j}(s) = \frac{A_j (d(s) - R(s))}{R(s) \cos \varphi} + \frac{s_j - t_j}{R^2(s)} d(s).$$

Отсюда, поскольку $|A_j| \leq 1$ и $\frac{|s_j - t_j|}{R(s)} \leq 1$, вытекают оценки

$$|d'_{s_j}(s)| \leq \frac{d - R}{R |\cos \varphi|} + \frac{d}{R} \leq 2 \frac{d}{R |\cos \varphi|},$$

$$|\operatorname{grad}_s d| \leq 2\mu^{1/2} \frac{d}{R |\cos \varphi|}.$$

Таким образом,

$$|\operatorname{grad}_s d^\mu| \leq 2\mu^{3/2} \frac{d^\mu}{R |\cos \varphi|}.$$

*) Докажем это соотношение. Прежде всего, в силу предположений относительно поверхности

$$|\tilde{u} - v| \leq A |v - u|^2 \leq A |\tilde{u} - u|^2, \quad (*)$$

где A — константа, зависящая от свойств поверхности. Отрезок $\tilde{u}u$ находится в плоскости прямых stu и $3t\tilde{u}$. На прямой $\tilde{u}\tilde{s}$ возьмем точки w и η такие, чтобы прямая uw была параллельна $s\tilde{s}$, а прямая $u\eta$ перпендикулярна $\tilde{u}\tilde{s}$. Пусть $\psi(\tilde{s})$ — угол между прямыми $\tilde{u}u$ и $\tilde{u}\tilde{s}$. Тогда

$$|\tilde{u} - u| = \frac{|u - \eta|}{\sin \psi(\tilde{s})} \leq \frac{|u - w|}{\sin \psi(\tilde{s})} = \frac{d - R}{R \sin \psi(\tilde{s})} |\tilde{s} - s| = \frac{d - R}{R \sin \psi(\tilde{s})} h. \quad (**)$$

Сопоставляя (*) и (**), получаем

$$|\tilde{u} - v| \leq A \left(\frac{d - R}{R \sin \psi(\tilde{s})} \right)^2 h^2,$$

откуда и следует (11), так как в силу выпуклости области D имеем: $\sin \psi(\tilde{s})$ отделен от нуля при $\tilde{s} \rightarrow s$.

Поэтому

$$\frac{|\operatorname{grad}_s d^\mu|^r}{R^{(\mu-2+\beta)r}} \leq 2^r \mu^{(3/2)r} \frac{d^{\mu r}}{R^{(\mu-1+\beta)r} |\cos \varphi|^r}.$$

Для оценки интеграла от этого выражения отметим, что

$$dt = \frac{R^{\mu-1}}{d^{\mu-1}} \cos \varphi dS dR,$$

где dS — элемент поверхности S , ограничивающей область D . Отметим также, что в силу условий леммы

$$\mu r - (\mu - 1 + \beta)r + 1 > \mu r - \mu + 1 > 0.$$

Учитывая сказанное, получим

$$\begin{aligned} \int_D \frac{d^{\mu r}}{R^{(\mu-1+\beta)r} |\cos \varphi|^r} dt &= \int_S \frac{\cos \varphi}{|\cos \varphi|^r} \left(\int_0^d \frac{d^{\mu r - (\mu-1)R^{\mu-1}}}{R^{(\mu-1+\beta)r}} dR \right) dS \leq \\ &\leq \frac{\delta^{\mu r - (\mu-1+\beta)r+1}}{\mu - (\mu-1+\beta)r} \int_S \frac{dS}{|\cos \varphi|^{r-1}}. \end{aligned}$$

Далее, поскольку $r < \frac{\mu}{\mu+1} \leq 2$, а следовательно, $r-1 < 1$ и, учитывая условия, наложенные на поверхность, имеем

$$\int_D \frac{dS}{|\cos \varphi|^{r-1}} \leq K_1,$$

что вместе с предыдущим приводит к нужному результату.

Лемма доказана.

Замечание. Из сказанного в 3.5 следует, что при выполнении условий леммы ядро $\frac{B_k(s, t)}{|s-t|^{\mu-1}}$ удовлетворяет требованиям теоремы 3.4.

4.2. Опираясь на полученные в предыдущем параграфе теоремы об интегральных операторах, можно доказать следующую основную теорему.

Теорема 1 (неравенство Соболева). Пусть $x(s)$ — непрерывно дифференцируемая в выпуклой области D функция и

$$q < \frac{\mu p}{\mu - p}. \quad (13)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|x - m(x)\|_{L^q(D)} &= \left\{ \int_D |x(t) - m(x)|^q dt \right\}^{1/q} \leq \\ &\leq A \| \operatorname{grad} x \|_{L^p(D)} = A \left\{ \int_D \left[\sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial x}{\partial t_k} \right)^2 \right]^{p/2} dt \right\}^{1/p}, \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$m(x) = \frac{1}{\text{mes } D} \int_D x(s) ds \quad (15)$$

— среднее значение функции x в области D , а A — некоторая постоянная.

Доказательство. На основании леммы 1 (учитывая выражение для $B_k(s, t)$) имеем

$$|x(s) - m(x)| \leq \sum_{k=1}^{\mu} \left| \int_D \frac{B_k(s, t)}{|s - t|^{\mu-1}} \frac{\partial x}{\partial t_k} \right| \leq \int_D \frac{|B(s, t)|}{|s - t|^{\mu-1}} |\text{grad } x| dt.$$

Но при условии (13) интегральный оператор U с ядром $\frac{|B(s, t)|}{|s - t|^{\mu-1}}$ будет непрерывным из $L^p(D)$ в $L^q(D)$ (см. 3.5, условие (23)). Поэтому

$$\|x - m(x)\|_{L^q} \leq \|U\| \|\text{grad } x\|_{L^p}$$

и (14) установлено, если в качестве A взять норму указанного интегрального оператора U .

Замечание 1. Неравенство (14) иногда удобнее использовать в эквивалентной форме

$$\|x\|_{L^q} \leq M [\|\text{grad } x\|_{L^p} + |m(x)|]. \quad (16)$$

Замечание 2. Если $p=2$, $\mu \geq 2$, то неравенство (13) будет соблюдено при $q=2$. Неравенство (16) запишется в этом случае в виде

$$\left[\int_D |x(s)|^2 ds \right]^{1/2} \leq M \left\{ \left| \int_D x(t) dt \right| + \left[\int_D \sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial x}{\partial t_k} \right)^2 dt \right]^{1/2} \right\} \quad (17)$$

или, иначе,

$$\int_D |x(s)|^2 ds \leq M_1 \left\{ \left| \int_D x(t) dt \right|^2 + \int_D \sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial x}{\partial t_k} \right)^2 dt \right\}. \quad (18)$$

Это известное неравенство Пуанкаре.

Замечание 3. В приложениях может играть роль величина постоянной A в (14). Норму интегрального оператора U с ядром $\frac{|B(s, t)|}{|s - t|^{\mu-1}}$ можно оценить, пользуясь теоремой 3.1. Беря $\sigma = r$ и определяя минимально возможное r из неравенства $\left(1 - \frac{r}{q}\right) p' \leq$

$\leq r$, найдем, что в качестве A можно взять величину

$$A = C_1 = C_2 \leq \max_s |B(s, t)| \max_s \left[\int_D \frac{dt}{|s - t|^{(\mu-1)r}} \right]^{1/r} \leq \\ \leq \frac{\delta^\mu}{\mu \text{mes } D} \left\{ \int_\omega d\omega \int_0^\delta \frac{R^{\mu-1}}{R^{(\mu-1)r}} dR \right\}^{1/r} \leq \frac{\delta^{1+\mu \cdot r}}{\mu \text{mes } D} \left\{ \frac{\mu \pi^{\mu/2}}{(\mu - (\mu - 1)r) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + 1\right)} \right\}^{1/r},$$

где δ — диаметр области D .

Замечание 4. Условие выпуклости области D существенно в приведенном доказательстве неравенства Соболева. Однако это неравенство может быть доказано и для областей значительно более общего вида. Прежде всего, если некоторая область допускает однозначное и непрерывно дифференцируемое преобразование в другую, с якобианом, равным единице, для которой неравенство имеет место, то оно будет выполнено и для данной области. Кроме того, возможность распространения неравенства Соболева на области более общего вида получается на основании следующего предложения.

Теорема 2. Если область D есть объединение двух областей D_1 и D_2 , имеющих пересечение положительной меры, и для каждой из которых имеет место неравенство (14), то оно выполнено и для всей области D .

Доказательство. Пусть $D = D_1 \cup D_2$. Положим

$$D_3 = D_1 \cap D_2, \quad D_4 = D_2 \setminus D_3.$$

Обозначим через $m(x)$, $m_1(x)$, $m_2(x)$, $m_3(x)$, $m_4(x)$ средние значения x по каждой из областей D , D_1 , D_2 , D_3 , D_4 . Согласно (14) применительно к областям D_1 и D_2 имеем

$$\|x - m_1(x)\|_{L^q(D_1)} \leq B_1 J, \quad \|x - m_2(x)\|_{L^q(D_2)} \leq B_2 J, \quad (19)$$

где через J обозначена $\|\text{grad } x\|_{L^p(D)}$, а B_1 и B_2 — некоторые постоянные. Далее,

$$|m_1(x) - m_2(x)| \leq \frac{1}{(\text{mes } D_3)^{1/q}} \left[\|x - m_1(x)\|_{L^q(D_3)} + \|x - m_2(x)\|_{L^q(D_3)} \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\text{mes } D_3)^{1/q}} \left[\|x - m_1(x)\|_{L^q(D_1)} + \|x - m_2(x)\|_{L^q(D_2)} \right] \leq B_3 J,$$

$$|m_4(x) - m_2(x)| = \frac{1}{\text{mes } D_4} \left| \int_{D_4} [x(s) - m_2(x)] ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{A}{\text{mes } D_4} \|x - m_2(x)\|_{L^q(D_2)} \leq B_4 J.$$

Но по смыслу средних значений

$$\min [m_1(x), m_4(x)] \leq m(x) \leq \max [m_1(x), m_4(x)].$$

Поэтому

$$|m(x) - m_1(x)| \leq |m_4(x) - m_1(x)| \leq \\ \leq |m_4(x) - m_2(x)| + |m_2(x) - m_1(x)| \leq B_5 J$$

откуда

$$|m(x) - m_2(x)| \leq |m(x) - m_1(x)| + |m_2(x) - m_1(x)| \leq B_6 J.$$

Наконец,

$$\|x - m(x)\|_{L^q(D)} \leq \|x - m(x)\|_{L^q(D_1)} + \|x - m(x)\|_{L^q(D_2)} \leq \\ \leq \|x - m_1(x)\|_{L^q(D_1)} + \|x - m_2(x)\|_{L^q(D_2)} + \\ + |m(x) - m_1(x)| (\text{mes } D_1)^{1/q} + |m(x) - m_2(x)| (\text{mes } D_2)^{1/q} \leq B_7 J,$$

что и устанавливает справедливость неравенства типа (14) для области D .

Другое расширение класса областей, для которых справедливо неравенство Соболева, можно получить, используя следствие 1 из леммы 1' и замечания к нему. Именно, пусть область D звездна по отношению к некоторой выпуклой области $D_1 \subset D$; обозначим через $m_1(x)$ среднее значение функции x по области D_1 . Применяя представление (3), получим соотношение

$$\|x - m_1(x)\|_{L^q(D)} \leq A_1 J, \quad J = \|\text{grad } x\|_{L^p(D)}.$$

Но согласно замечанию к следствию 1 из леммы 1' представление (1) имеет место для всех $s \in D_1$, т. е.

$$x(s) = m(x) + \sum_{h=1}^{\mu} \int_D \frac{B_h(s, t)}{|s - t|^{\mu-1}} \frac{\partial x}{\partial t_h} dt, \quad s \in D_1.$$

Так как правая часть последней формулы задает, очевидно, непрерывный оператор из $L^p(D)$ в $L^q(D_1)$, то

$$\|x - m(x)\|_{L^q(D_1)} \leq A_2 J.$$

Отсюда

$$|m_1(x) - m(x)| = \left| \frac{1}{\text{mes } D_1} \int_{D_1} [x(s) - m(x)] ds \right| \leq \\ \leq \frac{1}{(\text{mes } D_1)^{1/q}} \|x - m(x)\|_{L^q(D_1)} \leq \frac{1}{(\text{mes } D_1)^{1/q}} A_2 J.$$

Сопоставляя это неравенство с полученным ранее, находим окончательно

$$\|x - m(x)\| \leq A_3 J,$$

что и требовалось доказать.

4.3. Введем теперь в рассмотрение некоторые функциональные пространства, элементами которых являются всевозможные непрерывно дифференцируемые в области D функции. Таким образом, различные пространства отличаются лишь нормой, которую мы в них вводим.

Прежде всего рассмотрим пространство $\widetilde{W}_p^{(1)} = \widetilde{W}_p^{(1)}(D)$. Полагая

$$\|x\| = \frac{1}{\text{mes } D} \left| \int_D x(s) ds \right| + \left[\int_D |\text{grad } x|^p dt \right]^{1/p} = \\ = |m(x)| + \|\text{grad } x\|_{L^p(D)}. \quad (20)$$

Легко видеть, что так введенная норма удовлетворяет всем аксиомам нормированного пространства (при естественной линейаризации).

Если рассматривать элемент $x \in \widetilde{W}_p^{(1)}$ как функцию из $L^p(D)$, то неравенство Соболева (в форме (16)) можно записать в форме

$$\|x\|_{L^q(D)} \leq M \|x\|_{\widetilde{W}_p^{(1)}}. \quad (21)$$

Таким образом, оператор вложения, т. е. оператор, сопоставляющий элементу $x \in \widetilde{W}_p^{(1)}$ ту же функцию, но рассматриваемую как элемент из $L^q(D)$, является непрерывным линейным оператором. Покажем, что оператор вложения компактен.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена в пространстве $\widetilde{W}_p^{(1)}$. По лемме 1 имеем

$$x_n(s) = m(x_n) + \sum_{k=1}^{\mu} \int_D \frac{B_k(s, t)}{|s-t|^{\mu-1}} \frac{\partial x_n}{\partial t_k} dt.$$

Но при условии (13) оператор с ядром $\frac{B_k(s, t)}{|s-t|^{\mu-1}}$ компактен (теорема 3.6). Так как последовательность $\left\{ \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \right\}$ ($k = 1, 2, \dots, \mu$) ограничена в пространстве $L^p(D)$, то можно выбрать последовательность индексов $\{n_i\}$ так, что последовательность $\{y_{n_i}^{(k)}\}$:

$$y_{n_i}^{(k)}(s) = \int_D \frac{B_k(s, t)}{|s-t|^{\mu-1}} \frac{\partial x_{n_i}}{\partial t_k} dt, \quad k = 1, 2, \dots, \mu; \quad i = 1, 2, \dots,$$

сходится в $L^p(D)$. Можно также считать, что сходится и числовая последовательность $\{m(x_{n_i})\}$. В таком случае последовательность $\{x_{n_i}\}$ сходится в $L^p(D)$ и компактность оператора вложения установлена. Таким образом, справедлива

Теорема 3 (Соболев — Кондрашев)*. При условии (13) оператор вложения, относящий функции из $\bar{W}_p^{(1)}$ ее же, рассматриваемую как элемент из $L^q(D)$, компактен.

Класс областей D , для которых справедлива теорема 3, совпадает с классом областей, для которых верно неравенство Соболева. В частности, для областей, звездных относительно некоторой выпуклой подобласти, или конечного объединения областей указанного типа (теорема 2).

Аналогично теореме 3, снова используя теорему 3.6, можно установить и более общий результат.

Теорема 4. Оператор вложения, сопоставляющий функции из $\bar{W}_p^{(1)}$ ее же, рассматриваемую как элемент пространства $L^q(D')$ (D' означает ν -мерную поверхность, лежащую в D), компактен при условиях

$$q < \frac{\nu p}{\mu - p}, \quad \nu > \mu - p. \quad (22)$$

При этом при сдвиге поверхности D' элемент x непрерывно зависит от величины сдвига, т. е.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\{ \int_{D'} |x(s + \Delta s) - x(s)|^q ds \right\}^{1/q} = 0. \quad (23)$$

Рассматривая специально случай, когда $\mu < p$, и используя теорему 3.7, имеем

Теорема 5. При условии $\mu < p$ оператор вложения, рассматриваемый как оператор из $\bar{W}_p^{(1)}(D)$ в $C(D)$, является непрерывным и компактным.

Замечание. Используя теорему 3.4 и замечания к лемме 2, теорему 5 можно усилить. Именно, если $\beta < \frac{p - \mu}{p}$, то оператор вложения из $\bar{W}_p^{(1)}$ в $Lip \beta$ будет непрерывным (см. также Соболев — I, § 11).

4.4. Подобно тому, как были введены пространства $\bar{W}_p^{(1)}(D)$, могут быть определены и пространства, норма в которых определяется с помощью высших производных. Именно, обозначим через $\bar{W}_p^{(l)} = \bar{W}_p^{(l)}(D)$ пространство всех l раз непрерывно дифференцируемых функций в области D , норма в котором определяется равенством

$$\|x\|_{\bar{W}_p^{(l)}(D)} = \|x\|_{L^p(D)} + \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^{\mu} \left[\int_D \left| \frac{\partial^l x(t)}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_l}} \right|^p dt \right]^{1/p}. \quad (24)$$

Теорема 4 (следовательно, и теорема 3, как частный случай теоремы 4) переносится на случай производных высших порядков, т. е. справедлива следующая теорема.

*) С. Л. Соболев доказал непрерывность оператора вложения. В. И. Кондрашевым установлена компактность.

Теорема 6. *Оператор вложения пространства $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ (D — выпуклая область) в пространство $L^q(D')$ (D' — ν -мерная поверхность в D) при условиях*

$$q < \frac{\nu p}{\mu - lp}, \quad \nu > \mu - lp \quad (25)$$

компактен. При этом при непрерывной деформации поверхности D' в зависимости от параметра этот оператор непрерывно зависит от параметра.

Доказательство. В силу интегрального представления (4) для любой функции $x \in \widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ и любой точки $s \in D'$ справедливо равенство

$$x(s) = \int_{D_1} x(t) L(s, t) dt + \sum_{|\alpha|=l} \int_{V_s} D^\alpha x(t) \frac{L_\alpha(s, t)}{|s-t|^{\mu-l}} dt,$$

где функции $L(s, t)$ и $L_\alpha(s, t)$ определены формулами (5) и (5').

Интегральный оператор с ядром $\frac{L_\alpha(s, t)}{|s-t|^{\mu-l}}$ при условиях (25) является компактным оператором из $L^p(D)$ в $L^q(D')$ на основании теоремы 3.6 (условия (28) этой теоремы совпадают с условиями (25) при $m = \mu - l$); на основании этой же теоремы рассматриваемый оператор непрерывно зависит от параметра сдвига поверхности D' .

Аналогичными свойствами, очевидно, обладает также интегральный оператор, определяемый первым слагаемым в приведенном представлении. Из сказанного вытекает заключение теоремы.

Наконец, обобщением теоремы 5 на случай высших производных является следующий результат: при условии $\mu < lp$ оператор вложения будет компактным оператором из $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ в $C(D)$.

4.5. Пространства $\widetilde{W}_p^{(l)}$, очевидно, неполные. Однако, если присоединить к ним функции, дифференцируемые в некотором обобщенном смысле, то они обращаются в B -пространства.

Будем говорить, что суммируемая в D функция $x^{(i)}(s)$ есть *обобщенная производная* функция x в области D , если имеется последовательность $\{x_h\}$ непрерывно дифференцируемых в области D функций такая, что для всякой области D_1 , замыкание которой содержится в D , имеет место

$$\int_{D_1} |x_h(t) - x(t)| dt \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0, \quad \int_{D_1} \left| \frac{\partial x_h}{\partial t_i} - x^{(i)}(t) \right| dt \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0. \quad (26)$$

Пусть φ — непрерывно дифференцируемая в области D функция, равная нулю на границе области D и вблизи нее, т. е. отличная от нуля лишь в некоторой области D_1 , замыкание

которой содержится в D . Тогда имеет место равенство

$$\int_D x(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} dt = - \int_D \varphi(t) x^{(i)}(t) dt. \quad (27)$$

Действительно, если функция x заменена здесь на x_h , а $x^{(i)}$ на $\partial x_h / \partial t_i$, то соотношение (27) представляет собой известную формулу Грина. Переход к пределу приводит к требуемому результату.

Из равенства (27) вытекает, в частности, единственность обобщенной производной. В самом деле, если бы существовали две такие производные $x^{(i)}$ и $\tilde{x}^{(i)}$, то для разности $\tilde{x}^{(i)} - x^{(i)}$ мы получили бы

$$\int_D \varphi(t) [\tilde{x}^{(i)}(t) - x^{(i)}(t)] dt = 0, \quad (28)$$

где φ — произвольная функция указанного выше вида. Отсюда с помощью теоремы Лузина уже легко получить, что $\tilde{x}^{(i)}(t) = x^{(i)}(t)$ почти везде.

В дальнейшем мы будем выбирать приближающие функции не произвольно, а некоторым специальным образом — усреднением по Стеклову.

Кроме требований, наложенных на ядро усреднения в IX.1.1, будем предполагать еще, что при любом $h > 0$ функция ω_h непрерывно дифференцируема в $[0, \infty)$.

В IX.1.1 были установлены следующие свойства средних функций:

$$a) \quad \|x_h\|_{L^p(D)} \leq M \|x\|_{L^p(D)} \quad (h > 0); \quad (29)$$

b) если $x \in L^p(D)$ ($p \geq 1$), то $\|x - x_h\|_{L^p(D)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$;

c) если $\|x_m - x\|_{L^p(D)} \rightarrow 0$, то $\|(x_m)_h - x_h\|_{L^p(D)} \rightarrow 0$.

Кроме того, вследствие специального выбора функции ω_h имеет место

d) если x имеет в D обобщенную производную $x^{(i)}$, то, какова бы ни была D_1 — внутренняя подобласть области D ($D_1 \subset D$), — при достаточно малых $h > 0$ в D_1 выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial t_i} x_h = [x^{(i)}]_h. \quad (30)$$

Докажем предложение d). Возьмем $\{x_h\}$ так, чтобы выполнялось (26). Для x_h равенство (30), очевидно, выполнено, так как в этом случае можно дифференцировать под знаком интеграла. Но по пункту c)

$$\left(\frac{\partial x_h}{\partial t_i} \right)_h \rightarrow (x^{(i)})_h \quad \text{в } L^p(D)_i$$

$$\frac{\partial}{\partial s_i} [(x_h)_h] = \int \frac{\partial}{\partial s_i} \omega_h(|s-t|) x_h(t) dt \rightarrow \int \frac{\partial}{\partial s_i} \omega_h(|s-t|) x(t) dt = \frac{\partial}{\partial s_i} x_h.$$

Предельный переход допустим, так как $s \in D_1$ и область интегрирования — шар $K_h(s)$ радиуса h с центром в s — при достаточно малом h есть внутренняя подобласть области D .

Отметим, что из (30) и б) вытекает, что средние функции x_h могут играть роль функций x_h в определении обобщенных производных.

Указанные обстоятельства позволяют распространить неравенство Соболева (16) на функции, которые имеют лишь обобщенные производные. Действительно, пусть обобщенный градиент суммируем со степенью p . Тогда по б)

$$\int_{D_1} \left| \frac{\partial x_h}{\partial t_i} - x^{(i)} \right|^p dt = \int_{D_1} | [x^{(i)}]_h - x^{(i)} |^p dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

аналогичное соотношение имеет место и для градиента; поэтому, применив неравенство Соболева к непрерывно дифференцируемой функции x_h , получим

$$\left[\int_{D_1} |x_h|^q dt \right]^{1/q} \leq M_1 \left\{ \frac{1}{\text{mes } D_1} \left| \int_{D_1} x_h(t) dt \right| + \left[\int_{D_1} |\text{grad } x_h|^p dt \right]^{1/p} \right\}$$

и, устремляя здесь $h \rightarrow 0$, будем иметь неравенство Соболева для x :

$$\left[\int_{D_1} |x|^q dt \right]^{1/q} \leq M_1 \left\{ \frac{1}{\text{mes } D_1} \left| \int_{D_1} x(t) dt \right| + \left[\int_{D_1} |\text{grad } x|^p dt \right]^{1/p} \right\}.$$

При этом постоянную M_1 можно считать не зависящей от D_1 (замечание 3 к теореме 1). Беря расширяющуюся последовательность областей D_1 , объединение которых есть D , получим в пределе то же самое неравенство, но уже для области D . Попутно будет установлена и суммируемость функции $|x|^q$, т. е. что $x \in L^q(D)$. Итак, окончательно

$$\left[\int_D |x|^q dt \right]^{1/q} \leq M_1 \left\{ \frac{1}{\text{mes } D} \left| \int_D x(t) dt \right| + \left[\int_D |\text{grad } x|^p dt \right]^{1/p} \right\}.$$

Если присоединить к пространству $\widetilde{W}_p^{(1)}$ функции, имеющие обобщенные производные, суммируемые со степенью p , то полученное пространство, которое мы будем обозначать $W_p^{(1)*}$, будет уже полным. Действительно, пусть $\|x_k - x_m\|_{W_p^{(1)}} \rightarrow 0$. Тогда по-

следовательность $\left\{ \frac{\partial x_k}{\partial t_i} \right\}$ сходится в пространстве $L^p(D)$ к некоторым функциям $x^{(i)}$, в силу неравенства Соболева последовательность $\{x_k\}$ сходится к некоторой функции x в пространстве $L^p(D)$.

*) Норма в пространстве $W_p^{(1)}$ определяется по формуле (20), только вместо обычных производных следует иметь в виду обобщенные.

Остается показать, что $x^{(i)}$ суть обобщенные производные функции x , ибо если это так, то, очевидно, $x_h \rightarrow x$ в $W_p^{(1)}$. Пусть $\{D^{(n)}\}$ — последовательность внутренних подобластей области D , которые, расширяясь, исчерпывают область D . Согласно (26) для каждого $n = 1, 2, \dots$ найдутся непрерывно дифференцируемые функции $\tilde{x}_n$, так что

$$\int_{D^{(n)}} |x_n - \tilde{x}_n| dt < \frac{1}{n}, \quad \int_{D^{(n)}} \left| x_n^{(i)} - \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial t_i} \right| dt < \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, \mu.$$

Отсюда ясно, что последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ и $\left\{ \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial t_i} \right\}$ сходятся к x и $x^{(i)}$ соответственно в любой внутренней подобласти области D , что и требовалось доказать.

Пространство $W_p^{(1)}$ сепарабельно. В самом деле, на основании пунктов b) и d) легко усмотреть возможность аппроксимации (в $W_p^{(1)}$) любой функции из $W_p^{(1)}$ непрерывно дифференцируемыми функциями, которые в свою очередь могут быть приближены полиномами с рациональными коэффициентами.

В основу определения обобщенной производной может быть положено равенство (27). Именно, если существует функция $x^{(i)}$ такая, что (27) имеет место для любой функции φ соответствующего вида, то $x^{(i)}$ является обобщенной производной функции x . Действительно, для любой внутренней подобласти D_1 области D при достаточно малом h имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_h}{\partial s_i} &= \int \frac{\partial}{\partial s_i} \omega_h(|s-t|) x(t) dt = - \int \frac{\partial}{\partial t_i} [\omega_h(|s-t|)] x(t) dt = \\ &= \int \omega_h(|s-t|) x^{(i)}(t) dt = (x^{(i)})_h \rightarrow x^{(i)}, \end{aligned}$$

откуда и видно, что $x^{(i)}$ есть обобщенная производная для x .

Аналогичным образом вводятся обобщенные производные высших порядков. Также индуктивно устанавливается полнота и сепарабельность пространств $W_p^{(l)}$, получаемых из $\tilde{W}_p^{(l)}$ присоединением к ним функций, имеющих обобщенные производные l -го порядка, суммируемые со степенью p . Эти пространства называются пространствами Соболева.

В случае пространств $W_p^{(l)}$ вложение одного такого пространства в другое ($W_p^{(l)} \subset W_q^{(m)}$) говорит уже не только о некотором интегральном неравенстве, но и о том, что функция, являющаяся элементом пространства $W_p^{(l)}$, является также и элементом пространства $W_q^{(m)}$ (это будет, если $q < \frac{\mu p}{\mu - (l-m)p}$)*. Последнее

* При указанном условии вложение $W_p^{(l)}$ в $W_q^{(m)}$ будет компактным.

обстоятельство далеко не тривиально, как это было в случае пространств $\widetilde{W}_p^{(l)}$.

Отметим, наконец, то важное обстоятельство, что норму в пространстве $W_p^{(l)}$ можно вводить и другими способами, эквивалентными прежнему.

Пусть $f_1, f_2, \dots, f_k$ — некоторая система непрерывных линейных функционалов в $W_p^{(l)}$, обладающая тем свойством, что из равенств

$$f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_k(x) = 0, \\ \int_D \left[\sum_{i_1, i_2, \dots, i_l=1}^n \left[\frac{\partial^l x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_l}} \right]^2 \right]^{p/2} dt = 0 \quad (31)$$

следует $x=0$. Такую систему функционалов будем называть *определяющей*.

Установим неравенство

$$\|x\|_{W_p^{(l)}} \leq B \{ |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_k(x)| + \\ + \left[\int_D \left[\sum_{i_1, \dots, i_l} \left(\frac{\partial^l x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_l}} \right)^2 \right]^{p/2} dt \right]^{1/p} \}, \quad (32)$$

где B — постоянная. Действительно, если бы такой постоянной не существовало, то нашлась бы последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и

$$|f_1(x_n)| + \dots + |f_k(x_n)| + \\ + \left\{ \int_D \left[\sum_{i_1, \dots, i_l} \left(\frac{\partial^l x_n}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_l}} \right)^2 \right]^{p/2} dt \right\}^{1/p} = \varepsilon_n \rightarrow 0. \quad (33)$$

Поскольку средние значения функции x_n и ее обобщенных производных до $(l-1)$ -го порядка не превосходят $\|x_n\| = 1$, то из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что средние значения функций x_{n_k} и их производных будут образовывать сходящиеся последовательности. Учитывая (33), получим $\|x_{n_k} - x_{n_j}\| \rightarrow 0$. Ввиду полноты пространства $W_p^{(l)}$ существует $x = \lim x_{n_k} \in W_p^{(l)}$. Снова применяя (33), находим, что x удовлетворяет условиям (31); отсюда $x=0$, что, однако, невозможно.

Неравенство (32) установлено. Справедливость неравенства противоположного смысла вытекает из непрерывности функционалов $f_1, f_2, \dots, f_k$. Таким образом, в качестве нормы в $W_p^{(l)}$

может быть принято выражение

$$\|x\| = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_k(x)| + \\ + \left\{ \int_D \left[\sum_{i_1, i_2, \dots, i_l} \left| \frac{\partial^l x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_l}} \right|^2 \right]^{p/2} dt \right\}^{1/p}.$$

В качестве нормы в $W_p^{(l)}$ могут быть приняты и другие выражения. Так, например, можно положить

$$\|x\| = \left\{ \int_D \left[\sum_{k=0}^l \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \right|^2 \right]^{p/2} dt \right\}^{1/p}.$$

Отметим, что пространство $W_2^{(l)}$ при таком определении нормы является гильбертовым, скалярное произведение в нем определяется как

$$(x, y) = \int_D \sum_{k=1}^l \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^k x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \frac{\partial^k y}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} dt.$$

Укажем еще на такое важное обстоятельство. Пусть имеет место вложение пространств $W_q^{(m)}(S) \supset W_p^{(l)}(D)$, где S — v -мерное многообразие, лежащее в области D . Тогда для функции из $W_p^{(l)}(D)$ можно говорить о значениях ее m -х производных на поверхности S , которые определены как функции, суммируемые с q -й степенью на S . В случае, если теоремы вложения гарантируют непрерывность обобщенных производных некоторого порядка, то легко убедиться, что эти производные существуют в обычном смысле *).

Наконец, полезно иметь в виду, что если на функции из $W_p^{(l)}(D)$ наложены некоторые линейные условия, относящиеся к значению m -х производных на поверхности S , причем $W_p^{(l)}(D) \subset W_q^{(m)}(S)$, то такие условия определяют в пространстве $W_p^{(l)}(D)$ замкнутое (и линейное) множество.

4.6. В заключение приведем в качестве применения доказательства существования решения задачи Дирихле вариационным методом.

Рассмотрим граничную задачу

$$\Delta x = 0, \quad x|_S = \varphi. \quad (34)$$

Решение будем искать среди функций, имеющих конечный интеграл Дирихле

$$H(x) = \int_D \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x}{\partial t_k} \right)^2 dt < \infty, \quad (35)$$

*) Точнее говоря, одна из эквивалентных функций, отвечающих элементу x , будет обладать этим свойством.

т. е. будем считать $x \in W_2^{(1)}(D)$. Отсюда по теореме 4 следует, что $x \in L^2(S)$. Действительно, размерность ν многообразия S равна $\mu - 1$, а

$$q = 2 < \frac{(\mu - 1)2}{\mu - 2} = 2 + \frac{2}{\mu - 2}, \quad \nu = \mu - 1 > \mu - 2 = \mu - p.$$

При этом

$$\int_S |x(s + \Delta s) - x(s)|^2 ds \xrightarrow{\Delta s \rightarrow 0} 0,$$

т. е. значения функции x на граничной поверхности представляют предел (в среднем) ее значений, изнутри (на сдвинутой поверхности).

Итак, функция с конечным интегралом Дирихле должна иметь граничные значения, суммируемые с квадратом на поверхности.

Однако не всякая функция φ , определенная на S и суммируемая с квадратом, может быть взята в качестве граничных значений. Мы назовем φ *допустимой*, если имеется некоторая $x \in W_2^{(1)}(D)$ такая, что $\varphi = x|_S$.

В граничной задаче (34) будем считать φ допустимой. Обозначим через $W_2^{(1)}(\varphi)$ множество функций из $W_2^{(1)}(D)$, граничные значения которых на S равны φ . Для $x \in W_2^{(1)}(\varphi)$ имеем $0 \leq H(x) < \infty$, поэтому существует конечный

$$\inf \{H(x) : x \in W_2^{(1)}(\varphi)\} = d.$$

Построим последовательность $\{x_n\} \subset W_2^{(1)}(\varphi)$, минимизирующую функционал H , т. е. такую, что

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} H(x_n).$$

Теорема 7. Минимизирующая последовательность $\{x_n\}$ сходится в пространстве $W_2^{(1)}$; предельная функция принадлежит множеству $W_2^{(1)}(\varphi)$ и дает функционалу H минимальное значение среди функций из $W_2^{(1)}(\varphi)$.

Доказательство. Если ввести в $W_2^{(1)}$ скалярное произведение, полагая

$$(x, y) = \int_S x(s) y(s) ds + \int_D \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\partial x}{\partial t_k} \frac{\partial y}{\partial t_k} dt, \quad x, y \in W_2^{(1)},$$

то $W_2^{(1)}$ обращается в гильбертово пространство. При этом норма произвольного элемента $x \in W_2^{(1)}(\varphi)$ и значение функционала H на этом элементе связаны соотношением

$$\|x\|^2 = \int_S |\varphi(s)|^2 ds + H(x). \quad (36)$$

Обозначим через $\dot{W}_2^{(1)}$ множество всех $x \in W_2^{(1)}$, обращающихся на S в нуль. Как было отмечено в конце 4.5, $\dot{W}_2^{(1)}$ является замкнутым подпространством пространства $W_2^{(1)}$.

Рассмотрим некоторый элемент $x_0 \in W_2^{(1)}(\varphi)$. Можно считать, что x_0 ортогонален подпространству $\dot{W}_2^{(1)}$. В самом деле, в противном случае x_0 можно представить в виде $x_0 = x'_0 + x''_0$, где x'_0 ортогонален $\dot{W}_2^{(1)}$, а $x''_0 \in \dot{W}_2^{(1)}$. Так как

$$x'_0|_S = x_0|_S - x''_0|_S = \varphi,$$

то $x'_0 \in W_2^{(1)}(\varphi)$ и вместо x_0 можно рассмотреть элемент x'_0 .

Докажем, что $H(x_0) = d$. Пусть x — произвольный элемент из $W_2^{(1)}(\varphi)$. Так как $x - x_0 \in \dot{W}_2^{(1)}$, то эта разность ортогональна элементу x_0 , следовательно, в силу (36)

$$H(x) - H(x_0) = \|x\|^2 - \|x_0\|^2 = \|x - x_0\|^2 \geq 0, \quad (37)$$

т. е.

$$d \leq H(x_0) \leq \inf H(x) = d$$

или, иначе, $d = H(x_0)$. Полагая в (37) $x = x_n$, получим

$$H(x_n) - H(x_0) = \|x_n - x_0\|^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Но $H(x_0) = d$, поэтому $H(x_n) - H(x_0) \rightarrow 0$. Таким образом, $x_n \rightarrow x_0$. Теорема доказана.

Замечание. Соотношение (37) показывает, что элемент $x_0 \in W_2^{(1)}(\varphi)$, доставляющий минимум функционалу H , единствен.

Мы не будем останавливаться на доказательстве того, что функция x_0 , минимизирующая функционал H , дает решение граничной задачи (34), и притом единственное, отсылая за этим, а также по поводу других приложений теорем вложения в математической физике к монографии С. Л. Соболева (см. Соболев — I), в которой эти вопросы изложены со всей подробностью.

Дальнейшее знакомство с теоремами вложения читатель может продолжить по монографиям: Соболев — I, II; Бесов, Ильин, Никольский.

ЧАСТЬ II

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Г л а в а XII

СОПРЯЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ

§ 1. Теоремы об обратном операторе *)

В этом параграфе мы пополним те сведения об обратном операторе, которые были даны в первой части (см. § 4 гл. V).

1.1. Напомним данные в первой части определения. Пусть U — непрерывный линейный оператор, отображающий нормированное пространство X в нормированное пространство Y . Если существует оператор V , переводящий Y в X , такой, что

$$VU = I_X, \quad I_X x = x, \quad x \in X, \quad (1)$$

$$UV = I_Y, \quad I_Y y = y, \quad y \in Y, \quad (2)$$

то V называется *обратным* по отношению к U ($V = U^{-1}$).

Существование (хотя бы и не непрерывного) обратного оператора U^{-1} равносильно тому, что U осуществляет взаимно однозначное отображение пространства X на Y . Если, кроме того, U^{-1} непрерывен, то указанное отображение будет изоморфизмом.

Если выполнено лишь одно из соотношений (1) или (2), то оператор V называется *левым*, соответственно *правым обратным* (в обозначениях: $V = U_l^{-1}$, соответственно $V = U_r^{-1}$ **)). В V.4.4 было доказано, что для существования непрерывного левого обратного оператора необходимо и достаточно, чтобы

$$\|U(x)\| \geq m\|x\|, \quad x \in X, \quad (3)$$

где $m > 0$ не зависит от x . Если при этом оператор U отображает X на все Y , то левый обратный оператор будет также и правым обратным, т. е. в этом случае существует непрерывный обратный (двусторонний) оператор U^{-1} .

1.2. Докажем теорему.

Теорема 1. Если непрерывный линейный оператор U , переводящий B -пространство X в нормированное пространство Y ,

*) По поводу содержания этого параграфа см. Нейман [1], Шаудер [2].

**) Иногда значки l и r в индексах будут опускаться.

имеет непрерывный левый обратный, то множество $Y' = U(X)$ представляет собой B -пространство.

Доказательство. В нем нуждается только полнота пространства Y' . Пусть $\{y_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов пространства Y' . Обозначим $x_n = U^{-1}(y_n)$ ($y_n = U(x_n)$; $n = 1, 2, \dots$). Согласно отмеченному в 1.1

$$\|y_n - y_k\| = \|U(x_n) - U(x_k)\| \geq m\|x_n - x_k\|,$$

где m — положительная постоянная. Таким образом,

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} \|x_n - x_k\| = 0.$$

Следовательно, в X существует элемент $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Так как $\lim y_n = \lim U(x_n) = U(x_0)$, то, обозначая $y_0 = U(x_0)$, получим $y_0 \in Y'$ и $y_n \rightarrow y_0$. Полнота пространства Y' доказана.

Следствие. В условиях теоремы множество Y' замкнуто в Y .

1.3. Пусть имеются два нормированных пространства X и Y и непрерывный линейный оператор U , отображающий X в Y . Множество $X_0 = U^{-1}(0)$ является, очевидно, замкнутым подпространством пространства X . Образует фактор-пространство $\bar{X} = X/X_0$ (см. IV.1.8). Пусть $\bar{x} \in \bar{X}$; рассмотрим произвольный элемент $x \in \bar{x}$ и положим

$$\bar{U}(\bar{x}) = U(x). \quad (4)$$

Определение элемента $\bar{U}(\bar{x})$ не зависит от выбора элемента $x \in \bar{x}$, так как если $x', x'' \in \bar{x}$, то $x' - x'' \in X_0$ и, следовательно, $U(x') = U(x'')$. Таким образом, формула (4) определяет оператор $\bar{U}$, отображающий пространство $\bar{X}$ в Y . Этот оператор однороден и аддитивен. Он и непрерывен, так как, переходя к точной нижней границе в правой части неравенства

$$\|\bar{U}(\bar{x})\| = \|U(x)\| \leq \|U\|\|x\|, \quad x \in \bar{x},$$

можем написать

$$\|\bar{U}(\bar{x})\| \leq \|U\|\|\bar{x}\|, \quad \bar{x} \in \bar{X}.$$

Из определения оператора $\bar{U}$ следует, что $U = \bar{U}\phi$, где ϕ — естественный гомоморфизм X на $\bar{X}/X_0$ (см. IV.1.8) и $\|U\| = \|\bar{U}\|$.

В отличие от исходного оператора U , оператор $\bar{U}$ осуществляет взаимно однозначное отображение (пространства $\bar{X}$ в Y). Действительно, если $\bar{U}(\bar{x}) = 0$, то для любого $x \in \bar{x}$ будет $U(x) = 0$, т. е. $x \in U^{-1}(0) = X_0$, и, следовательно, $\bar{x}$ совпадает с классом X_0 — нулевым элементом пространства $\bar{X}$.

В случае, когда U отображает X на Y , оператор $\bar{U}$ отображает $\bar{X}$ также на Y . Если при этом существует непрерывный обратный оператор $\bar{U}^{-1}$, то пространства X и Y называются гомоморфными, а оператор $\bar{U}$ — гомоморфизмом пространства X на Y .

В терминах исходных пространств X и Y то, что U является гомоморфизмом пространства X на Y , может быть охарактеризовано следующими двумя условиями:

- 1) $U(X) = Y$;
- 2) существует $m > 0$ такое, что для каждого $y \in Y$ найдется $x \in X$, так что

$$y = U(x), \quad \|y\| \geq m\|x\|.$$

В самом деле, если U — гомоморфизм, то первое условие, очевидно, выполнено. Беря, далее, $x \in \bar{x} = U^{-1}(y)$, в соответствии с (4) из IV.1.8 получим

$$\|x\| \leq 2\|\bar{x}\| \leq 2\|U^{-1}\|\|y\|$$

и можно принять $m = \frac{1}{2\|U^{-1}\|}$.

Наоборот, если оба условия выполнены, то из первого получаем $\bar{U}(X) = Y$. Пусть $\bar{x} \in \bar{X}$; по элементу $y = \bar{U}(\bar{x})$ найдем элемент $x \in X$ в соответствии со вторым условием. Поскольку

$$\bar{U}(\varphi(x)) = U(x) = y = \bar{U}(\bar{x}),$$

вследствие взаимной однозначности оператора $\bar{U}$ будет $\varphi(x) = \bar{x}$ и, следовательно,

$$\|\bar{U}(\bar{x})\| = \|y\| \geq m\|x\| \geq m\|\bar{x}\|.$$

Как отмечалось в 1.1, это вместе с соотношением $\bar{U}(X) = Y$ обеспечивает существование непрерывного обратного (двустороннего) оператора U^{-1} .

1.4. Фундаментальную роль в теории функциональных уравнений играет утверждение, обратное к теореме 1. Оно является частью следующего предложения.

Лемма 1. Пусть U — непрерывный линейный оператор, отображающий B -пространство X в нормированное пространство Y . Тогда, если образ $U(B)$ единичного шара B (с центром в нуле) пространства X плотен в шаре S_r радиуса r (также с центром в нуле) пространства Y , то U является гомоморфизмом пространства X на пространство Y . В частности, если отображение, осуществляемое оператором U , взаимно однозначно, то существует непрерывный двусторонний обратный оператор U^{-1} .

Доказательство. Проверим выполнение двух условий предыдущего пункта. Очевидно, можно считать шары B и S_r замкнутыми; докажем, что

$$U(B) \supset S_{r/2}. \quad (5)$$

Возьмем последовательность $\{e_n\}$ положительных чисел такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} e_k \leq 1$, рассмотрим $y \in S_r$. Так как $\overline{U(B)} \supset S_r$, то найдется

$y_1 \in U(B)$ такой, что

$$\|y - y_1\| \leq \varepsilon_1 r.$$

Обозначим через x_1 элемент из B такой, что $y_1 = U(x_1)$. Пусть B_h — замкнутый шар пространства X радиуса h (с центром в нуле). Из условия леммы вытекает, что $\overline{U(B_h)} \supset S_{hr}$. Следовательно, поскольку $y - y_1 \in S_{\varepsilon_1 r}$, то найдется элемент $x_2 \in B_{\varepsilon_1}$ такой, что

$$\|y - (y_1 + y_2)\| \leq \varepsilon_2 r, \quad y_2 = U(x_2).$$

Продолжая рассуждать подобным образом, найдем две последовательности, $\{y_n\} \subset Y$ и $\{x_n\} \subset X$, такие, что

$$y_n = U(x_n), \quad x_n \in B_{\varepsilon_{n-1}}, \quad \left\| y - \sum_{k=1}^n y_k \right\| \leq \varepsilon_n r, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_0 = 1. \quad (6)$$

Ввиду того, что $\|x_n\| \leq \varepsilon_{n-1}$, а пространство X полное, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится. Если x означает сумму этого ряда, то

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{k-1} \leq 2,$$

т. е. $x \in B_2$. Далее,

$$U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Но из (6) ясно, что $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = y$. Поэтому $y = U(x)$. Таким образом, доказано, что $U(B_2) \supset S_r$, что равносильно соотношению (5).

Так как из (5) следует $U(B_n) \supset S_{nr/2}$, то

$$U(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(B_n) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{nr/2} = Y$$

и первое условие проверено.

Далее, если $y \neq 0$ — произвольный элемент из Y , то

$$y' = \frac{r}{2\|y\|} y \in S_{r/2}$$

и в силу (5) можно указать элемент $x' \in B$ такой, что $y' = U(x')$. Полагая $x = \frac{2\|y\|}{r} x'$, будем иметь

$$U(x) = y, \quad \|x\| = \frac{2}{r} \|y\| \|x'\| \leq \frac{2}{r} \|y\|.$$

Следовательно, выполнено и второе условие. Лемма доказана.

Следствие. Если выполнены условия леммы, то пространство Y полное.

В самом деле, поскольку U — гомоморфизм, оператор $\bar{U}$, отображающий фактор-пространство $\bar{X} = \bar{X}/\bar{X}_0$ ($X_0 = U^{-1}(0)$) на Y , имеет непрерывный обратный. Так как $Y = \bar{U}(\bar{X})$, то применима теорема 1.

Условие леммы затруднительно для проверки. Более удобным является условие следующей теоремы.

Теорема 2 (Банах). Если множество $U(X)$ второй категории в пространстве Y , то выполнено условие леммы и, следовательно, оператор U есть гомоморфизм пространства X на Y .

Доказательство. Сохраняя обозначения леммы, докажем, что если условие леммы не выполнено, то множество $U(B)$ нигде не плотно. Действительно, предполагая противное, найдем шар $S(y_0, r)$ в пространстве Y (с центром в точке y_0 , радиуса r) такой, что

$$\overline{U(B)} \supset S(y_0, r). \quad (7)$$

Множество $U(B)$ симметрично, т. е. вместе с элементом y содержит и элемент $-y$. Замыкание $\overline{U(B)}$ также, очевидно, симметрично. Это дает возможность написать на основании (7)

$$\overline{U(B)} \supset S(-y_0, r).$$

Возьмем $y \in S_r$; $y_0 + y \in S(y_0, r)$, $-y_0 + y \in S(-y_0, r)$, так что эти элементы входят в $\overline{U(B)}$. Но множество $U(B)$, а следовательно, и его замыкание $\overline{U(B)}$ выпукло, поэтому вместе с двумя элементами оно должно содержать и их полусумму. В частности,

$$y = \frac{(y_0 + y) + (-y_0 + y)}{2} \in \overline{U(B)}.$$

Таким образом, $\overline{U(B)} \supset S_r$.

Итак, если условие леммы 1 не выполнено, множество $U(B)$ нигде не плотно. Таким же будет и любое из множеств $U(B_n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Но

$$U(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(B_n),$$

и мы получаем, что множество $U(X)$ первой категории. Теорема доказана.

Укажем на следствие из доказанной теоремы, являющееся обращением теоремы 1.

Следствие. Если непрерывный линейный оператор U осуществляет взаимно однозначное отображение B -пространства X на замкнутое подпространство B -пространства Y , то обратный оператор U^{-1} непрерывен.

Действительно, замкнутое подпространство B -пространства само является B -пространством и, следовательно, будет множеством второй категории в себе (см. I.4.7).

1.5. Укажем на некоторые непосредственные приложения теоремы 2.

Допустим, что в векторном пространстве X двумя различными способами введены нормы. Норму элемента $x \in X$ при первом способе определения нормы будем обозначать через $\|x\|_1$, а при втором — через $\|x\|_2$. Множество X обращается при этом в различные нормированные пространства, которые мы будем обозначать X_1 и соответственно X_2 . Хотя X_1 и X_2 следует рассматривать как различные нормированные пространства, качественных различий между ними может и не быть. Последнее обстоятельство имеет место, когда всякая последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся в одном пространстве, сходится и в другом к тому же самому элементу. В этом случае говорят, что нормы в пространствах X_1 и X_2 эквивалентны; это означает, что пространства X_1 и X_2 изоморфны (см. IV.1.3).

Теорема 3. Пусть X_1 и X_2 — два B -пространства, причем $X_1 \subset X_2^*$). Если из сходимости $x_n \rightarrow x$ в пространстве X_1 вытекает сходимость $x_n \rightarrow x$ в пространстве X_2 , то либо $X_1 = X_2$ и при этом нормы в пространствах X_1 и X_2 эквивалентны, либо X_1 есть множество первой категории в пространстве X_2 .

Доказательство. Обозначим через U оператор вложения пространства X_1 в пространство X_2 , т. е. оператор, сопоставляющий элементу $x \in X_1$ этот же элемент x , но рассматриваемый в пространстве X_2 . По условию теоремы U — непрерывный линейный оператор. Если множество $X_1 = U(X_1)$ второй категории в пространстве X_2 , то на основании теоремы 2 $X_1 = X_2$ и U имеет непрерывный обратный. Поэтому, если $x_n \rightarrow x$ в пространстве X_2 , то $x_n = U^{-1}(x_n) \rightarrow U^{-1}(x) = x$ в пространстве X_1 , т. е. нормы в указанных пространствах эквивалентны.

Принимая в теореме $X_1 = C^{(1)}(D)$, $X_2 = C(D)$, получаем, что множество всех непрерывно дифференцируемых функций — множество первой категории в пространстве C непрерывных функций. Точно так же убеждаемся, что множество измеримых почти везде ограниченных функций — первой категории в пространстве L^1 и т. д.

1.6. Отображение T (не обязательно линейное), переводящее множество Ω нормированного пространства X в нормированное пространство Y , называется *замкнутым*, если из

$$x_n \in \Omega, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x_n \rightarrow x_0, \quad T(x_n) \rightarrow y_0,$$

вытекает $x_0 \in \Omega$ и $T(x_0) = y_0$.

Непрерывный линейный оператор, определенный на замкнутом множестве, очевидно, замкнут. Справедливо и обратное предложение. Именно, имеет место

*) При этом предполагается, что вложение $X_1 \subset X_2$ сохраняет алгебраические операции, т. е. что X_1 можно рассматривать как линейное множество в X_2 .

Теорема 4. Пусть T — линейный замкнутый оператор, отображающий замкнутое линейное множество Ω B -пространства X в B -пространство Y . Тогда T — непрерывный оператор.

Доказательство. Можно считать, что $\Omega = X$ (так как Ω само есть B -пространство). Введем в пространстве X новую норму, полагая

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\|, \quad x \in X. \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что так определенная норма удовлетворяет аксиомам нормированного пространства. Проверим, кроме того, полноту пространства X по новой норме. Пусть

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} \|x_n - x_k\|_1 = 0.$$

Это значит, что

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} \|x_n - x_k\| = 0, \quad \lim_{k, n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - T(x_k)\| = 0.$$

А так как пространства X (по данной норме) и Y полные, то отсюда можно заключить о существовании пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = y_0.$$

По замкнутости оператора T : $y_0 = T(x_0)$. Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - T(x_0)\| = 0$$

и полнота пространства X по новой норме доказана.

Так как

$$\|x\| \leq \|x\|_1,$$

то из $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$ вытекает $\|x_n\| \rightarrow 0$. Применяя предыдущую теорему, получим

$$\|x\|_1 \leq M \|x\|.$$

Тем более,

$$\|Tx\| \leq M \|x\|,$$

что и означает непрерывность оператора T .

Замечание. Класс замкнутых линейных операторов, определенных на всем пространстве (или на замкнутом линейном множестве), совпадает с классом непрерывных линейных операторов. Однако если рассматривать замкнутые линейные операторы на линейном (незамкнутом) множестве, то они образуют существенно более широкий класс, чем непрерывные операторы. Так, например, в пространстве $L^2(a, b)$ оператор T :

$$y = T(x), \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

определенный на множестве Ω всех абсолютно непрерывных функций, производная которых входит в $L^2(a, b)$, будет, как нетрудно проверить, замкнутым, но не непрерывным.

Замкнутые, но не непрерывные операторы изучаются главным образом в случае, когда $X=Y$ есть гильбертово пространство. Рассмотрение общего случая сильно затрудняется сложностью структуры произвольного B -пространства.

§ 2. Связь между данным и сопряженным уравнением

В этом параграфе мы наряду с уравнением

$$U(x) = y \quad (1)$$

рассмотрим уравнение

$$U^*(g) = f, \quad (2)$$

которое будем называть *сопряженным* по отношению к уравнению (1). При этом, как обычно, предполагается, что U является непрерывным линейным оператором, отображающим пространство X в пространство Y . Эти пространства, не оговаривая этого в дальнейшем, мы будем считать полными, хотя некоторые из теорем настоящего параграфа верны и без предположения полноты указанных пространств.

Для пространства $L^2(a, b)$ теоремы этого параграфа были доказаны Хеллингсом и Теплицем [1, 2], для пространств l^p и $L^p(a, b)$ — Риссом [3]; в общем случае см. Банах; Зaanen — I.

2.1. Большую роль в дальнейшем изложении будут играть так называемые нулевые множества. Пусть Γ — некоторое множество линейных функционалов в пространстве X . Через $N(\Gamma)$ обозначим совокупность всех таких $x \in X$, для которых $f(x) = 0$ для любого $f \in \Gamma$. Если $E \subset X$, то через $N^*(E)$ будем обозначать множество всех функционалов $f \in X^*$, обращающихся в нуль на каждом из элементов множества E . Множества $N(\Gamma)$ и $N^*(E)$ называются *нулевыми множествами* множества Γ , соответственно множества E .

Если мы рассмотрим дуальную пару $\langle X, X^* \rangle$, то очевидно, что $N(\Gamma)$ — аннулятор $\Gamma^\perp$ множества Γ , а $N^*(E)$ — аннулятор $E^\perp$ множества E , введенные в общей ситуации в III.3.2. Учитывая свойства аннуляторов и поляр, изложенные в III.3.2, а также то, что замкнутость по норме и слабая замкнутость в X совпадают, получаем, что: 1) $N(\Gamma)$ — замкнутое линейное множество в X ; 2) $N(N^*(E))$ является замкнутой линейной оболочкой E ; 3) если X_0 — замкнутое подпространство в X , то

$$X_0 = N(N^*(X_0)).$$

Аналогично получаем, что: 1) $N^*(E)$ — $(*)$ -слабо замкнутое линейное подмножество в X^* ; 2) $N^*(N(\Gamma))$ есть $(*)$ -слабо замкнутая линейная оболочка Γ ; 3) если Z — $(*)$ -слабо замкнутое подпространство в X^* , то

$$Z = N^*(N(Z)).$$

Так как (если X нерефлексивно) не всякое замкнутое по норме подпространство в X^* является (*)-слабо замкнутым, то не всякое замкнутое подпространство имеет вид $N^*(E)$ ($E \subset X$).

Пусть $\pi: X \rightarrow X^{**}$ — каноническое вложение. Если E — некоторое множество в пространстве X , то обозначим $\pi(E)$ через E_0^{**} , т. е. E_0^{**} есть множество всех функционалов в X^* , имеющих вид F_x ($x \in E$), где, как обычно,

$$F_x(f) = \overline{f(x)}, \quad f \in X^*.$$

Аналогично для пространства Y употребляем обозначение G_y ($y \in Y$).

Очевидно соотношение

$$N^*(E) = N(E_0^{**}).$$

Для множества $\Gamma \subset X^*$ можно рассматривать два нулевых множества, — $N(\Gamma) \subset X$ и $N^*(\Gamma) \subset X^{**}$. Легко видеть, что

$$[N(\Gamma)]_0^{**} = N^*(\Gamma) \cap X_0^{**},$$

где X_0^{**} означает в соответствии с принятым обозначением множество $\pi(X)$.

Введем, наконец, множество $N(U)$ — нулевое множество оператора U , понимая под этим совокупность всех $x \in X$, которые оператор U переводит в нуль. Иначе говоря, $N(U) = U^{-1}(0)$.

2.2. Следующая теорема дает некоторые сведения о том, из каких элементов состоит образ $U(X)$ пространства X .

Теорема 1. Обозначим $Y' = U(X)$, и пусть Y_1 — замыкание множества Y' . Тогда

$$Y_1 = N(N(U^*)),$$

т. е. Y_1 представляет собой множество общих нулей тех функционалов $g \in Y^*$, на которых обращается в нуль оператор U^* .

Доказательство. Докажем сначала соотношение

$$N^*(Y') = N(U^*). \quad (3)$$

Пусть $g \in N^*(Y')$. Тогда, так как $U(x) \in Y'$ при любом $x \in X$, имеем

$$U^*(g)(x) = g(U(x)) = 0, \quad x \in X, \quad (4)$$

т. е. $U^*(g) = 0$ и $g \in N(U^*)$. То же равенство (4) показывает, что если $U^*(g) = 0$, то $g \in N^*(Y')$. Таким образом, соотношение (3) установлено. Переходя в обеих частях этого соотношения к нулевым множествам, получим

$$N(N^*(Y')) = N(N(U^*)).$$

Но ввиду того, что Y' есть линейное множество, его замыкание, как указано в 2.1, совпадает с $N(N^*(Y'))$. Теорема доказана.

Имеет место и двойственная теорема

Теорема 1*. Обозначим через X^* $(*)$ -слабое замыкание множества $U^*(Y^*)$. Тогда

$$X^* = N^*(N(U)).$$

Доказательство. Напишем соотношение (3), заменив в нем оператор U оператором U^* :

$$N^*(U^*(Y^*)) = N(U^{**}),$$

и рассмотрим пересечение обеих частей с множеством X_0^{**} . Так как

$$U^{**}(F_x)(g) = F_x(U^*(g)) = g(U(x)) = G_{U(x)}(g), \quad g \in Y^*, \quad x \in X,$$

т. е.

$$U^{**}(F_x) = G_{U(x)}, \quad x \in X,$$

то пересечение $N(U^{**}) \cap X_0^{**}$ состоит из тех функционалов $F_x \in X_0^{**}$, для которых $x \in N(U)$. Иными словами,

$$N(U^{**}) \cap X_0^{**} = [N(U(Y^*))]_0^{**}.$$

С другой стороны, имеем

$$N^*(U^*(Y^*)) \cap X_0^{**} = [N(U^*(Y^*))]_0^{**}.$$

Сопоставляя полученные соотношения, пайдём

$$N(U^*(Y^*)) = N(U),$$

и, следовательно,

$$N^*(N(U^*(Y^*))) = N^*(N(U)).$$

Но $X^* = N^*(N(U^*(Y^*)))$, что и доказывает теорему.

2.3. Следующие две теоремы дают зависимость между разрешимостью одного из уравнений, (1) или (2), при любой правой части и однозначной разрешимостью другого уравнения.

Теорема 2. Для того чтобы уравнение (2) имело решение при любом $f \in X^*$, необходимо и достаточно, чтобы оператор U имел непрерывный левый обратный U^{-1} .

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (2) имеет решение при любом $f \in X^*$. Иными словами, пусть $U^*(Y^*) = X^*$. Рассмотрим в пространстве X произвольный элемент $x \neq 0$. На основании теоремы V.7.2 существует функционал $f \in X^*$ такой, что

$$\|f\| = 1, \quad f(x) = \|x\|.$$

Далее, согласно теореме 1.2 оператор U^* является гомоморфизмом, поэтому найдется $g \in Y^*$ такой, что

$$U^*(g) = f, \quad \|g\| \leq m\|f\|,$$

где m не зависит от f и, следовательно, от x . Учитывая сказанное, можем написать

$$\|x\| = f(x) = g(U(x)) \leq \|g\| \|U(x)\| \leq m \|U(x)\|.$$

Таким образом,

$$\|U(x)\| \geq \frac{1}{m} \|x\|, \quad x \in X,$$

откуда и вытекает существование непрерывного левого обратного оператора U^{-1} .

Достаточность. Пусть $f_0 \in X^*$. Предполагая существование непрерывного оператора $U^{-1} = U^{-1}$, обозначим

$$g'(y) = f_0(U^{-1}(y)); \quad y \in U(X).$$

Определенный на множестве $Y' = U(X)$ функционал g' линеен и непрерывен. Распространяя его на все Y , получим функционал $g_0 \in Y^*$. Так как $U(x) \in Y'$ при любом $x \in X$, то

$$U^*(g_0)(x) = g_0(U(x)) = g'(U(x)) = f_0(U^{-1}U(x)) = f_0(x).$$

Следовательно, $U^*g = f_0$, т. е. уравнение (2) разрешимо при любой правой части.

Теорема 2*. Для того чтобы уравнение (1) имело решение при любом $y \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы оператор U^* имел непрерывный левый обратный U^{*-1} .

Доказательство. Необходимость условия данной теоремы проверяется аналогично необходимости условия теоремы 2. Пусть $y \in Y$ — произвольный элемент с $\|y\| \leq 1$. Согласно теореме 1.2 в X найдется такой элемент x , что

$$U(x) = y, \quad \|x\| \leq m \|y\| \leq m.$$

Если, далее, $g \in Y^*$ и $f \in U^*(g)$, то

$$|g(y)| = |g(U(x))| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq m \|f\|.$$

Переходя в левой части к точной верхней границе по y (с $\|y\| \leq 1$) и учитывая при этом, что m не зависит от y , получим

$$\|g\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |g(y)| \leq m \|f\| = m \|U^*(g)\|,$$

и мы приходим к условию, обеспечивающему существование непрерывного левого обратного оператора U^{*-1} .

Достаточность. Докажем, что оператор U удовлетворяет условию леммы 1 предыдущего параграфа и, следовательно, на основании леммы, $U(X) = Y$.

Итак, пусть B — единичный шар пространства X (с центром в нуле). Множество $U(B)$ абсолютно выпукло, поэтому его замыкание в пространстве Y есть $U(B)^{\circ\circ}$ (см. III.3.2). Поляр $U(B)^{\circ}$ есть множество всех таких функционалов $g \in Y^*$, что

$|g(y)| \leq 1$ для всех $y \in U(B)$. Или, иначе,

$$|g(U(x))| \leq 1 \text{ для всех } x \in B.$$

Обозначая $f = U^*g$, мы можем записать последнее соотношение так:

$$|f(x)| \leq 1, \quad x \in B.$$

Таким образом, когда g пробегает множество $U(B)^\circ$, функционал $f = U^*(g)$ не выходит за пределы единичного шара B° пространства X^* , т. е.

$$U^*(U(B)^\circ) \subset B^\circ \cap U^*(Y^*).$$

Перепишем это соотношение следующим образом:

$$U(B)^\circ \subset U^{*-1}(B^\circ \cap U^*(Y^*)).$$

Вследствие непрерывности оператора U^{*-1} множество $S = U^{*-1}(B^\circ \cap U^*(Y^*))$ ограничено в пространстве Y^* . Поэтому полляра S° является окрестностью нуля в пространстве Y . Но

$$\overline{U(B)} = (U(B))^\circ \supset S^\circ,$$

что и требовалось доказать.

Из теорем 2 и 2* вытекает

Следствие. Для того чтобы существовал непрерывный двусторонний обратный оператор U^{-1} , необходимо и достаточно, чтобы существовал непрерывный двусторонний обратный оператор U^{*-1} . При этом

$$U^{*-1} = (U^{-1})^*.$$

Докажем последнее соотношение. Пусть $f \in X^*$ и $g = (U^{-1})^*(f)$. Имеем

$$g(y) = f(U^{-1}(y)) = f(x), \quad y = U(x) \in Y.$$

С другой стороны, если обозначить $g' = U^{*-1}(f)$, т. е. $f = U^*(g')$, то

$$f(x) = g'(U(x)) = g'(y), \quad x = U^{-1}(y) \in X.$$

Таким образом, при любом $y \in Y$ будет $g(y) = g'(y)$, иначе говоря, $(U^{-1})^*(f) = U^{*-1}(f)$, что и требовалось доказать.

2.4. Обобщением теорем 2 и 2* являются следующие две теоремы, в которых устанавливаются условия разрешимости уравнений (1) и (2).

Теорема 3. Если множество $U^*(Y^*)$ замкнуто, то

$$U(X) = N(N(U^*)),$$

т. е. уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда из $U^*(g) = 0$ следует $g(y) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $Y_1 = \overline{U(X)}$ пространства Y и оператор U_1 , отображающий пространство X

в Y_1 :

$$U_1(x) = U(x), \quad x \in X^*.$$

Докажем, что

$$U_1^*(Y_1^*) = U^*(Y^*). \quad (5)$$

Для этого обозначим через ω оператор вложения пространства Y_1 в Y . Поскольку, очевидно, существует непрерывный левый обратный ω^{-1} , на основании теоремы 2 заключаем, что $\omega^*(Y^*) = Y_1^*$. Но $U = \omega U_1$, поэтому $U^* = U_1^* \omega^*$ (см. IX.3.1) и, следовательно,

$$U^*(Y^*) = U_1^*(\omega^*(Y^*)) = U_1^*(Y_1^*).$$

Так как $\overline{U_1(X)} = Y_1$, то на основании теоремы 1 будем иметь $Y_1 = N(N(U_1^*))$, что возможно лишь в случае, когда $N(U_1^*) = \{0\}$, следовательно, оператор U_1^* осуществляет взаимно однозначное отображение B -пространства Y_1^* на пространство $U_1^*(Y^*)$, которое в силу (5) также является B -пространством. На основании следствия к теореме 1.2 заключаем, что существует непрерывный левый обратный U_1^{*-1} , а тогда по теореме 2

$$U(X) = U_1(X) = Y_1,$$

после чего применение теоремы 1 приводит к требуемому результату.

Теорема 3*. Если множество $U(X)$ замкнуто, то

$$U^*(Y^*) = N^*(N(U)), \quad (6)$$

т. е. уравнение (2) имеет решение тогда и только тогда, когда функционал f обращается в нуль на множестве нулей оператора U .

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $U(X) = Y$. Обозначим $X_0 = N(U) = U^{-1}(0)$ и введем фактор-пространство $\bar{X} = X/X_0$. Построим, как указано в 1.3, оператор $\bar{U}$, отображающий пространство $\bar{X}$ на Y . При этом $U = \bar{U}\varphi$, где φ — естественный гомоморфизм пространства X на $\bar{X}$. Так как пространство $\bar{X}$ полное, а оператор $\bar{U}$ взаимно однозначен, то по следствию к теореме 1.2 существует непрерывный $\bar{U}^{-1}$ и, следовательно, согласно теореме 2 $\bar{U}^*(Y^*) = \bar{X}^*$. Но $U^* = \varphi^* \bar{U}^*$, и поэтому

$$U^*(Y^*) = \varphi^*(\bar{U}^*(Y^*)) = \varphi^*(\bar{X}^*).$$

Таким образом, осталось доказать, что $\varphi^*(\bar{X}^*) = N^*(X_0)$. Возьмем произвольный функционал $f \in \varphi^*(\bar{X}^*)$. Пусть $f \in \bar{X}^*$

) Различие между операторами U и U_1 состоит в том, что пространства, в которых лежат образы $U(X)$ и $U_1(X)$, различны, так что сопряженные операторы U^ и U_1^* действуют в разных пространствах.

таков, что $f = \varphi^*(\bar{f})$. Так как

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(\varphi(x)), \quad x \in X,$$

а при $x \in X_0$ будет $\varphi(x) = 0$, то $\bar{f} \in N^*(X_0)$.

Будем теперь считать, что $\bar{f}$ — произвольный функционал из $N^*(X_0)$. Проводя буквально те же рассуждения, которые были использованы в 1.3 при построении оператора $\bar{U}$, мы убедимся, что функционал

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(x), \quad x \in \bar{x} = \varphi(x),$$

определен корректно и является непрерывным линейным функционалом в $\bar{X}$. Но тогда $\bar{f} = \varphi^*(\bar{f}) \in \varphi^*(\bar{X}^*)$.

В общем случае, когда $U(X) = Y_1 \neq Y$, введем, как и при доказательстве теоремы 3, оператор U_1 , отображающий X на Y_1 . Оператор U_1 подходит под рассматриваемый частный случай, вследствие чего, учитывая соотношение (5), можем записать

$$U^*(Y^*) = U_1^*(Y^*) = N^*(N(U_1)) = N^*(N(U)).$$

Теорема полностью доказана.

Следствие. Если множество $U^*(Y^*)$ замкнуто, то оно и $(*)$ -слабо замкнуто.

Действительно, по теореме 3 будет замкнутым множество $U(X)$, а тогда применима теорема 3, на основании которой и заключаем о $(*)$ -слабой замкнутости множества $U^*(Y^*)$.

Отметим частный случай следствия — когда U^* имеет непрерывный левый обратный. Множество $U^*(Y^*)$ замкнуто в этом случае на основании следствия к теореме 1.1.

2.5. Укажем некоторые следствия доказанных теорем.

Теорема 4. Для того чтобы уравнение (1) имело единственное решение при любом $y \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2) имело единственное решение при любом $f \in X^*$.

Теорема 5. Пусть уравнения (1) и (2) разрешимы, каковы бы ни были $y \in Y$ и $f \in X^*$. Тогда существуют непрерывные обратные (двусторонние) операторы U^{-1} и U^{*-1} . Таким образом, решения уравнений (1) и (2) единственны.

Теорема 6. Пусть уравнения (1) и (2) при $y = 0$ и $f = 0$ имеют только нулевые решения. Тогда, если одно из множеств $U(X)$ или $U^*(Y^*)$ замкнуто, то уравнения (1) и (2) разрешимы при любом $y \in Y$ и $f \in X^*$, причем решения единственны.

Замечание. Замкнутость множества $U(X)$ или $U^*(Y^*)$ равносильна (в условиях теоремы) существованию непрерывного левого обратного оператора U^{-1} или U^{*-1} .

2.6. Если $X = H$ есть гильбертово пространство, а $Y = X$, то теорема 6 приводит к результату, который был получен в главе IX из иных соображений и даже в несколько более общем виде (ср. теорему IX.5.3): для того чтобы самосопряженный оператор U имел непрерывный обратный (двусторонний), необхо-

Но $N(U^*)$ состоит из тех функционалов $g = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \in Y_n^*$ для которых $U^*(g) = 0$, т. е.

$$\sum_{j=1}^n a_{jk} \psi_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Следовательно, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in U(X_m)$ в том и только том случае, когда из (8) вытекает

$$g(y) = \sum_{j=1}^n \psi_j \eta_j = 0.$$

Иными словами, для того чтобы система (7) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы правые части системы образовывали вектор, ортогональный любому решению однородной системы с сопряженной матрицей.

Допустим теперь, что $m = n$. Если система (17) разрешима при любых правых частях, то оператор U^* имеет левый обратный (теорема 2*). Нетрудно видеть, что в таком случае $U^*(Y_n^*) = X_n^*$, так как иначе U^* отображал бы n -мерное пространство в пространство меньшей размерности, что противоречило бы существованию левого обратного U^{*-1} . Применяя теорему 4, находим, что решение системы (7) единственно.

Используя теорему 5 и применяя аналогичные рассуждения, можно установить обратный результат: если система (7) имеет не более одного решения, то решение существует при любых правых частях.

Для систем с симметричными матрицами оба эти результата непосредственно следуют из теоремы 7.

) Действительно, пусть множество $U^(Y_n^*)$ имеет размерность $n_0 < n$, т. е. существуют элементы $f_1, f_2, \dots, f_{n_0} \in U^*(Y_n^*)$ такие, что для любого $f \in U^*(Y_n^*)$

$$f = \sum_{k=1}^{n_0} c_k f_k.$$

Для любого $g \in Y_n^*$ имеем тогда $g = \sum_{k=1}^{n_0} c_k g_k$, где $g_k = U^{*-1}(f_k)$, т. е. размерность Y_n^* меньше n .

Г л а в а XIII

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

В этой главе будет изучаться уравнение вида

$$x - \lambda U(x) = y, \quad (*)$$

где U — непрерывный линейный оператор, отображающий B -пространство X в себя. Такое уравнение мы будем называть *уравнением второго рода*, а оператор U — *ядром уравнения*. Терминология эта заимствована из теории интегральных уравнений, где уравнением второго рода называется уравнение

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t) dt = y(s), \quad s \in [a, b],$$

в отличие от уравнения первого рода

$$\int_a^b K(s, t) x(t) dt = y(s), \quad s \in [a, b].$$

Хотя формально функциональное уравнение $(*)$ может быть записано и в виде уравнения «первого рода»

$$T(x) = y, \quad T = I - \lambda U,$$

однако выделение тождественного оператора оказывается целесообразным, поскольку оператор U может обладать лучшими свойствами, нежели оператор T , что позволяет полнее исследовать уравнение $(*)$.

§ 1. Уравнения с компактным ядром

В этом параграфе мы рассмотрим уравнение

$$x - U(x) = y, \quad x, y \in X, \quad (1)$$

и сопряженное к нему

$$g - U^*(g) = f, \quad f, g \in X^*, \quad (2)$$

предполагая, что U (а следовательно, и U^* — теорема IX.3.3) — компактные операторы в B -пространстве X . Введем обозначение

$T = I - U$, где, как всегда, через I обозначен тождественный оператор в пространстве X . Уравнение (1) можно записать при этом более коротко:

$$T(x) = y, \quad (1')$$

а уравнение (2):

$$T^*(g) = f, \quad (2')$$

поскольку $T^* = I^* - U^*$ (IX.3.1) и I^* — тождественный оператор в X^* .

1.1. Докажем предварительно три леммы.

Лемма 1. *Множество $T(X)$ замкнуто.*

Доказательство. Обозначим $X_0 = N(T) = T^{-1}(0)$ и рассмотрим фактор-пространство $\bar{X} = X/X_0$ и оператор $\bar{T}$, отображающий $\bar{X}$ в X (см. XII.1.3). Через φ , как и в XII.1.3, обозначим естественный гомоморфизм пространства X на $\bar{X}$. Пусть $\{y_n\} \subset T(X)$ — последовательность, сходящаяся к элементу $y_0 \in X$. Так как $\bar{T}(\bar{X}) = T(X)$, то существуют элементы $\bar{x}_n \in \bar{X}$ такие, что $y_n = T(\bar{x}_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). Найдем, далее, $x_n \in X$ в соответствии с соотношением (1) из IV.1.8, т. е. так, что

$$\bar{x}_n = \varphi(x_n), \quad \|\bar{x}_n\| \geq \frac{1}{2} \|x_n\|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Докажем, что последовательность $\{\bar{x}_n\}$ ограничена. В противном случае, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно было бы добиться того, что $c_n = \|\bar{x}_n\| \rightarrow \infty$. В силу (3)

последовательность $\left\{ \frac{x_n}{c_n} \right\}$ ограничена, поэтому, переходя еще раз

к подпоследовательности, можно было бы считать, что $\left\{ U\left(\frac{x_n}{c_n}\right) \right\}$

сходится. Пусть, например, $U\left(\frac{x_n}{c_n}\right) \rightarrow z$. Ввиду того, что $T(x_n) = \bar{T}(\bar{x}_n) = y_n$, можно написать

$$\frac{x_n}{c_n} = U\left(\frac{x_n}{c_n}\right) + T\left(\frac{x_n}{c_n}\right) = U\left(\frac{x_n}{c_n}\right) + \frac{y_n}{c_n} \rightarrow z,$$

и, следовательно,

$$T(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} T\left(\frac{x_n}{c_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_n}{c_n}\right) = 0_x$$

т. е. $z \in X_0$. Но тогда

$$\frac{\bar{x}_n}{c_n} = \varphi\left(\frac{x_n}{c_n}\right) \rightarrow \varphi(z) = 0_{\bar{X}}$$

что невозможно, поскольку $\left\| \frac{\bar{x}_n}{c_n} \right\| = 1$ при любом $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, последовательность $\{\tilde{x}_n\}$, а на основании (3) и последовательность $\{x_n\}$, ограничена. Можно поэтому считать, что $\{U(x_n)\}$ — сходящаяся последовательность. Если, например, $U(x_n) \rightarrow x$, то

$$x_n = T(x_n) + U(x_n) = y_n + U(x_n) \rightarrow y_0 + x = x_0.$$

Отсюда получаем

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(x_0) \in T(X),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. Последовательность множеств

$$N(T), N(T^2), \dots, N(T^n), \dots$$

возрастающая и содержит лишь конечное число различных множеств.

Доказательство. Первая часть утверждения леммы почти очевидна, так как если $x \in N(T^n)$, то $T^n(x) = 0$ и тем более $T^{n+1}(x) = 0$, т. е. $x \in N(T^{n+1})$, $N(T^n) \subset N(T^{n+1})$.

Для доказательства второй части обозначим $X_n = N(T^n)$ и установим, что если при некотором $n = 1, 2, \dots$ будет $X_n = X_{n+1}$, то и $X_{n+1} = X_{n+2}$. Возьмем $x \in X_{n+2}$. Это значит, что $T^{n+2}(x) = T^{n+1}(T(x)) = 0$ и, следовательно, $T(x) \in X_{n+1} = X_n$. Стало быть, $T^{n+1}(x) = T^n(T(x)) = 0$, т. е. $x \in X_{n+1}$. Таким образом, $X_{n+2} \subset X_{n+1}$. Обратное включение имеет место всегда, поэтому окончательно $X_n = X_{n+1} = X_{n+2} = \dots$.

Предположим теперь, что при каждом $n = 1, 2, \dots$

$$X_n \neq X_{n+1}.$$

Каждое X_n является подпространством пространства X_{n+1} , поэтому по лемме о почти перпендикуляре (IV.1.7) в X_{n+1} можно указать такой нормированный элемент x_{n+1} , что

$$\rho(x_{n+1}, X_n) > \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Пусть $m > n$. Рассмотрим элемент

$$U(x_m) - U(x_n) = x_m - T(x_m) - [x_n - T(x_n)] = x_m - \tilde{x},$$

где обозначено $\tilde{x} = T(x_m) + x_n - T(x_n)$. Докажем, что $\tilde{x} \in X_{m-1}$. В самом деле,

$$T^{m-1}(\tilde{x}) = T^{m-1}(x_m) + T^{m-1}(x_n) - T^m(x_n) = 0,$$

так как $x_n \in X_n \subset X_{m-1}$, а $x_m \in X_m$.

Принимая во внимание (4), имеем

$$\|U(x_m) - U(x_n)\| = \|x_m - \tilde{x}\| > \frac{1}{2}, \quad m > n; \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Но $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, и вследствие компактности оператора U из последовательности $\{U(x_n)\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность; что, однако, противоречит (5).

Лемма 3. Среди множеств

$$T(X), T^2(X), \dots, T^n(X), \dots \quad (6)$$

имеется лишь конечное число различных.

Доказательство в общих чертах сходно с доказательством предыдущей леммы, вследствие чего мы проведем его, не входя в подробности.

Отметим, что множества (6), согласно лемме 1, замкнуты и, кроме того, они образуют убывающую последовательность. Ясно, что из равенства $T^n(X) = T^{n+1}(X)$ при некотором n вытекает, что

$$T^n(X) = T^{n+1}(X) = T^{n+2}(X) = \dots,$$

и лемма в этом случае доказана.

Допуская, что $T^n(X) \neq T^{n+1}(X)$ ($n = 0, 1, \dots$), с помощью леммы о почти перпендикуляре (IV.1.7) построим последовательность $\{x_n\}$ такую, что

$$\|x_n\| = 1, \quad x_n \in T^n(X), \quad \rho(x_n, T^{n+1}(X)) > \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Пусть $m > n$. Как и в лемме 2, имеем

$$U(x_n) - U(x_m) = x_n - T(x_n) - [x_m - T(x_m)] = x_n - \tilde{x}.$$

Но

$$T(x_n) \in T^{n+1}(X), \quad x_m \in T^m(X) \subset T^{n+1}(X),$$

$$T(x_m) \in T^{m+1}(X) \subset T^{n+1}(X),$$

и, таким образом, $\tilde{x} = T(x_n) + x_m - T(x_m) \in T^{n+1}(X)$. Из (7) вытекает поэтому

$$\|U(x_n) - U(x_m)\| = \|x_n - \tilde{x}\| > \frac{1}{2}, \quad m > n; \quad m, n = 1, 2, \dots$$

что противоречит компактности оператора U .

1.2. Обозначим через r наименьшее из неотрицательных целых чисел n такого рода, что $T^n(X) = T^{n+1}(X)$. Если, в частности, $T(X) = X = T^0(X)$, то полагаем $r = 0$.

Пусть, далее, $X' = T^r(X)$, $X'' = N(T^r)$.

Характеристика оператора T и, следовательно, уравнения (1) содержится в следующей теореме.

Теорема 1. а) Оператор T взаимно однозначно отображает подпространство X' на себя.

б) Подпространство X'' конечномерное. Оператор T отображает X'' в себя.

с) Каждый элемент $x \in X$ может быть единственным образом представлен в форме

$$x = x' + x'', \quad x' \in X', \quad x'' \in X''; \quad (8)$$

при этом существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\|x'\| \leq M\|x\|, \quad \|x''\| \leq M\|x\|. \quad (9)$$

d) Оператор U допускает представление в форме

$$U = U' + U'', \quad (10)$$

где U' , U'' — компактные операторы, отображающие пространство X в X' (оператор U') и в X'' (оператор U''). При этом оператор $T' = I - U'$ имеет двусторонний непрерывный обратный и справедливо соотношение

$$U'U'' = U''U' = 0. \quad (11)$$

Доказательство. а) Так как $X' = T^r(X)$, то

$$T(X') = T^{r+1}(X) = T^r(X) = X'.$$

Если $T(x) = 0$, где $x \in X'$, то, взяв $n \geq r$ так, чтобы в соответствии с леммой 2 было $N(T^n) = N(T^{n+1})$, будем иметь $x \in T^n(X')$ и, следовательно, существует $\tilde{x} \in X$ такой, что $x = T^n(\tilde{x})$. Но тогда $0 = T(x) = T^{n+1}(\tilde{x})$, и поэтому $\tilde{x} \in N(T^{n+1}) = N(T^n)$, т. е. $x = T^n(\tilde{x}) = 0$.

б) Имеем

$$T^r = (I - U)^r = I - U_1,$$

где оператор U_1 есть линейная комбинация положительных степеней оператора U . Таким образом, на основании теоремы IX.2.2 оператор U_1 компактен. Так как для $x \in X''$ будет $U_1(x) = x$, то каждое ограниченное множество в X'' компактно. В силу теоремы IV.1.3 X'' конечномерно.

Множество $T(X'')$ в случае $r > 0$ есть, очевидно, $N(T^{r-1}) \subset N(T^r) = X''$. Если же $r = 0$, то $X'' = \{0\}$ и включение $T(X'') \subset X''$ тривиально.

с) Обозначим через T_0 оператор T , рассматриваемый лишь на множестве X' . На основании леммы 1, примененной к оператору $T^r = I - U_1$, заключаем, что множество X' замкнуто и, следовательно, является B -пространством. Поэтому в силу теоремы XII.1.2 оператор T_0 , взаимно однозначный отображающий X' на себя, имеет непрерывный обратный T_0^{-1} .

Пусть x — произвольный элемент из X ; положим

$$x' = T_0^{-r} T^r(x), \quad x'' = x - x' = x - T_0^{-r} T^r(x). \quad (12)$$

Ясно, что $x' \in X'$, а так как

$$T^r(x'') = T^r(x) - T^r T_0^{-r} T^r(x) = T^r(x) - T^r(x) = 0,$$

то $x'' \in X''$, что и доказывает возможность представления x в форме (8).

Если $x = x'_1 + x''_1$ — какое-нибудь другое представление элемента x в форме (8), так что $x'_1 \in X'$, $x''_1 \in X''$, то

$$T^r(x) = T^r(x'_1) + T^r(x''_1) = T^r(x'_1).$$

Но так как $x'_1 \in X'$, то $T^r(x'_1) = T^r_0(x'_1)$, поэтому

$$x'_1 = T_0^{-r} T^r(x) = x'$$

и единственность представления (8) доказана.

Наличие оценок (9) вытекает на основании (12) из непрерывности оператора T_0^{-1} ,

d) Ввиду того, что $U = I - T$, для $x \in X'$ имеем

$$U(x) = x - T(x) \in X',$$

т. е. оператор U отображает X' в себя. Аналогично убеждаемся, что $U(X'') \subset X''$.

Для произвольного $x \in X$ положим

$$U'(x) = U(x'), \quad U''(x) = U(x''), \quad (13)$$

где $x' \in X'$ и $x'' \in X''$ из представления элемента x в форме (8). Учитывая оценки (9), без труда убеждаемся, что U' и U'' — непрерывные линейные операторы. Кроме того, ясно, что $U = U' + U''$ и $U'(X) \subset X'$, $U''(X) \subset X''$. Далее, очевидно,

$$U'(X'') = U''(X') = \{0\}. \quad (14)$$

Из этих соотношений следует, что $U'U'' = U''U' = 0$, т. е. (11).

Оператор U'' отображает пространство X в конечномерное пространство X'' , в котором всякое ограниченное множество компактно. Поэтому U'' — компактный оператор. Но $U' = U - U''$, и с помощью теоремы IX.2.2 можно заключить о компактности оператора U' .

Докажем, наконец, что оператор $T' = I - U'$ имеет двусторонний непрерывный обратный. Для этого достаточно установить, во-первых, что $T'(x) = 0$ влечет $x = 0$ и, во-вторых, что $T'(X) = X$. Пусть $T'(x) = 0$. Представляя x в форме (8), получим

$$0 = T'(x) = x - U'(x) = x' - U(x') + x'' = T(x') + x''.$$

Так как $T(x') \in X'$, то вследствие единственности представления элемента 0 в форме (8) будем иметь

$$T(x') = x'' = 0$$

и на основании пункта а) $x' = 0$. Тем самым $x = x' + x'' = 0$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $y \in X$. Представим его в форме (8): $y = y' + y''$ ($y' \in X'$, $y'' \in X''$) и положим

$$x = T_0^{-1}(y') + y''.$$

Так как $T_0^{-1}(y') \in X'$, то

$$U'(x) = U(T_0^{-1}(y')),$$

$$\begin{aligned} T'(x) &= x - U'(x) = T_0^{-1}(y') - U(T_0^{-1}(y')) + y'' = \\ &= TT_0^{-1}(y') + y'' = y' + y'' = y. \end{aligned}$$

Итак, $T'(X) = X$.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Пусть m означает наименьшее из неотрицательных целых чисел n таких, что $N(T^n) = N(T^{n+1})$. Тогда $m = r$.

В самом деле, беря $x \in N(T^{r+1})$ и представляя его в форме (8), получим

$$0 = T^{r+1}(x) = T^{r+1}(x') + T^{r+1}(x'') = T^{r+1}(x'),$$

что в силу пункта а) возможно лишь при $x' = 0$. Отсюда $x = x'' \in N(T^r)$ и, следовательно, $m \leq r$.

Далее, если $y = T^m(x)$ ($x \in X$), то, подставляя x в форму (8), будем иметь

$$y = T^m(x) = T^m(x') + T^m(x'') = T^m(x') = T^{m+1}(T_0^{-1}(x'))$$

и $y \in T^{m+1}(X)$, следовательно, должно быть также $r \leq m$.

Частный случай факта, указанного в замечании, содержится в следующей теореме.

Теорема 2. Для того чтобы уравнение (1) было разрешимо при любом $y \in X$, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение

$$T(x) = 0 \tag{15}$$

имело единственное решение (очевидно, $x = 0$).

Действительно, разрешимость уравнения (1) при любом $y \in X$ означает, что $T(X) = X$, т. е. что $r = 0$. Единственность решения уравнения (15) эквивалентна тому, что $m = 0$.

Замечание. Опираясь на результаты § 2 предыдущей главы, можно дать доказательство теоремы 2, не зависящее от теоремы 1, используя лишь тот факт, что множество $T(X)$ замкнуто. Предоставляем читателю самостоятельно провести необходимые рассуждения.

1.3. Связь между уравнениями (1) и (2) устанавливается в следующей теореме.

Теорема 3. Множества $N(T)$ и $N(T^*)$ имеют одинаковую конечную размерность.

Доказательство. Так как $N(T) \subset N(T^r) = X''$, а на основании пункта б) теоремы 1 X'' конечномерно, то будет конечномерным и $N(T)$. Поскольку U^* — также компактный оператор, то сказанное применимо и к множеству $N(T^*)$.

Пусть размерность множества $N(T)$ равна n , а размерность $N(T^*)$ — m . Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — система линейно независимых

элементов в $N(T)$, а $g_1, g_2, \dots, g_m$ — линейно независимые элементы в $N(T^*)$.

Поскольку элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимы, к ним применима теорема о биортогонализации (теорема V.7.4), на основании которой существует биортогональная система функционалов $f_1, f_2, \dots, f_n$:

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Равным образом, пользуясь леммой III.3.1, найдем элементы $y_1, y_2, \dots, y_m$, так что

$$g_j(y_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots, m. \quad (17)$$

Предположим сначала, что $n \leq m$. Рассмотрим в пространстве X оператор $V = U + W$, где

$$W(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k, \quad x \in X.$$

Так как линейный оператор W переводит X в конечномерное пространство, то он компактен. Значит, и V — компактный оператор. Рассмотрим уравнение

$$\tilde{T}(x) = x - V(x) = T(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k = 0. \quad (18)$$

Пусть x_0 — некоторое его решение:

$$\tilde{T}(x_0) = T(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) y_k = 0. \quad (19)$$

Из этого равенства следует

$$g_s(T(x_0)) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) g_s(y_k) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

т. е., учитывая (17),

$$g_s(T(x_0)) - f_s(x_0) = 0$$

и вследствие того, что $T^*(g_s) = 0$, будет

$$f_s(x_0) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

Вместе с (19) это дает $T(x_0) = 0$, т. е. $x_0 \in N(T)$ и, значит, x_0 может быть представлен в форме

$$x_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Так как в силу (16) $\alpha_s = f_s(x_0)$, то из (21) вытекает $\alpha_s = 0$, а потому и $x_0 = 0$. Таким образом, уравнение (18) имеет единственное решение. По теореме 2 соответствующее неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части. В частности,

имеет решение уравнение

$$\tilde{T}(x) = T(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k = y_{n+1}.$$

Обозначим через x^* решение этого уравнения. С одной стороны,

$$g_{n+1} \left(T(x^*) - \sum_{k=1}^n f_k(x^*) y_k \right) = T^*(g_{n+1})(x^*) - \sum_{k=1}^n f_k(x^*) g_{n+1}(y_k) = 0.$$

Между тем $g_{n+1}(y_{n+1}) = 1$.

Таким образом, должно быть $m \leq n$.

Возможность неравенства $m < n$ исключается аналогичными рассуждениями. А именно, вместо уравнения (13) надо рассмотреть в пространстве X^* уравнение

$$T^*(g) - \sum_{k=1}^m g(y_k) f_k = 0.$$

1.4. Объединяя доказанные выше теоремы, получаем следующий результат.

Теорема 4. *Либо уравнения (1) и (2) разрешимы при любой правой части, и тогда их решения единственны. Либо однородные уравнения*

$$T(x) = 0 \quad \text{и} \quad T^*(g) = 0$$

имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $g_1, g_2, \dots, g_n$ соответственно. В этом случае, для того чтобы уравнение (1) (соответственно уравнение (2)) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$g_k(y) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(соответственно $f(x_k) = 0, k = 1, 2, \dots, n$). При этом общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x = x^* + \sum_{k=1}^n c_k x_{k1}$$

а общее решение уравнения (2) —

$$g = g^* + \sum_{k=1}^n c_k g_{k1}$$

где x^ (соответственно g^*) — какое-нибудь решение уравнения (1) (соответственно (2)), а $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.*

Вторая часть теоремы получается применением к уравнениям (1) и (2) теорем XII.2.3 и XII.2.3*, условия которых выполнены вследствие леммы 1 (но ее можно доказать и непосредственно).

Ввиду аналогии с известной теоремой теории интегральных уравнений настоящую теорему называют *альтернативой Фредгольма*.

§ 2. О комплексных нормированных пространствах

Как это ясно будет из дальнейшего (см. § 3), уравнение

$$x - \lambda U(x) = y$$

естественно рассматривать в комплексном пространстве, в частности, придавая λ комплексные значения. В связи с этим ниже вводятся некоторые вспомогательные понятия, относящиеся к комплексным пространствам и позволяющие включить вещественный случай в комплексный.

2.1. Пусть Z — комплексное нормированное пространство. Мы говорим, что Z имеет *вещественное ядро*, если на Z определен оператор C , переводящий Z в себя и называемый *инволюцией*, который обладает свойствами:

$$1. C(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \bar{\lambda}_1 C(z_1) + \bar{\lambda}_2 C(z_2) \quad (z_1, z_2 \in Z).$$

$$2. C^2(z) = z \quad (z \in Z).$$

$$3. \|C(z)\| = \|z\|.$$

Множество тех элементов, для которых $C(z) = z$, называется *вещественным ядром* пространства Z и обозначается $\text{Re } Z$; элементы этого множества называются *вещественными*.

Пусть $z \in Z$; элемент $x = \frac{1}{2} [z + C(z)]$ называется *вещественной частью* элемента z и обозначается $x = \text{Re } z$. Элемент $y = \frac{1}{2i} [z - C(z)]$ называется *мнимой частью* элемента z и обозначается $y = \text{Im } z$. Так как

$$C(x) = \frac{1}{2} [C(z) + C^2(z)] = x, \quad C(y) = -\frac{1}{2i} [C(z) - C^2(z)] = y,$$

то $x = \text{Re } z$ и $y = \text{Im } z$ — вещественные элементы. Очевидно,

$$z = x + yi, \tag{1}$$

$$C(z) = x - yi.$$

Последнее соотношение дает основание называть элемент $C(z)$ *сопряженным* к элементу z и ввести обычное обозначение: $C(z) = \bar{z}$.

Если элемент z каким-нибудь образом представлен в форме (1) с вещественными x и y , то непременно $x = \text{Re } z$, $y = \text{Im } z$. Действительно, $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}i = x - yi$, и поэтому $x = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) = \text{Re } z$, $y = \frac{1}{2i} (z - \bar{z}) = \text{Im } z$. Таким образом, представление (1) единственно; элементы x и y однозначно определяются элементом z .

Вещественное ядро X пространства Z является вещественным нормированным пространством, полным, если полно исходное пространство Z .

В самом деле, линейная комбинация с вещественными коэффициентами элементов из X снова является элементом множества X . Выполнение для X аксиом нормированного пространства вытекает из того, что эти аксиомы выполнены для данного пространства Z . Убедимся в полноте X (предполагая Z полным пространством). Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов пространства X . Рассматривая ее в пространстве Z и принимая во внимание его полноту, найдем, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z \in Z$. Так как в силу условия 1 $\overline{x_n - z} = x_n - z$, то $\|x_n - z\| = \|\overline{x_n - z}\| = \|x_n - \bar{z}\|$, откуда $x_n \rightarrow \bar{z}$. Ввиду единственности предела $\bar{z} = z$, т. е. $z \in X$.

Все конкретные вещественные пространства, рассмотренные выше, являются вещественными ядрами соответствующих комплексных пространств. Так, например, вещественное $C(K)$ является вещественным ядром комплексного пространства $C_c(K)$. При этом инволюцией будет оператор комплексного сопряжения $x(t) \rightarrow \overline{x(t)}$. То же можно сказать по отношению к пространствам L^p , V , C_0 и т. д.

Вообще произвольное вещественное пространство X можно рассматривать как вещественное ядро некоторого комплексного пространства, именно как вещественное ядро пространства Z , элементы которого суть упорядоченные пары элементов пространства X ; $z = (x, y)$ ($x, y \in X$), причем действия над ними введены по следующим правилам:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$\lambda(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y), \quad \lambda = \alpha + \beta i, \quad \alpha, \beta - \text{вещественные};$$

$$\|(x, y)\| = \max_0 \|x \cos \theta + y \sin \theta\| \quad *). \quad (2)$$

Чтобы убедиться, что X — вещественное ядро пространства Z , достаточно положить

$$C((x, y)) = (x, -y).$$

При этом вещественными в пространстве Z будут все элементы вида $(x, 0)$ и только они. Так как

$$\alpha(x_1, 0) + \beta(x_2, 0) = (\alpha x_1 + \beta x_2, 0),$$

$$\|(x, 0)\| = \max_0 \|x \cos \theta\| = \|x\|,$$

то, отождествляя элемент $(x, 0)$ с элементом x , мы и получим требуемый результат. Такое отождествление позволяет вместо (x, y) использовать обычное обозначение $x + yi$. Пространство Z называется *комплексификацией* X .

*) Разумеется, в конкретных пространствах норма может быть введена и иначе. Так, если $X = L^p$, то обычная норма в комплексном $L^p_{\mathbb{C}}$ эквивалентна, но не равна норме, определенной равенством (2).

2.2. Пусть Z и W — комплексные пространства с вещественными ядрами $X = \operatorname{Re} Z$ и $Y = \operatorname{Re} W$. Непрерывный линейный оператор $\bar{U}$, переводящий Z в W , называется *вещественным*, если он переводит вещественные элементы пространства Z в вещественные элементы пространства W , т. е. если $\bar{U}(X) \subset Y$; вещественный оператор индуцирует, таким образом, непрерывный линейный оператор из вещественного пространства X в вещественное пространство Y .

Наоборот, если U — непрерывный линейный оператор, отображающий пространство X в пространство Y и если $X = \operatorname{Re} Z$, $Y = \operatorname{Re} W$, то, полагая

$$\bar{U}(z) = U(x + yi) = U(x) + iU(y), \quad z = x + yi,$$

мы получим непрерывный линейный оператор $\bar{U}$ из комплексного пространства Z в комплексное пространство W . Очевидно, на X оператор $\bar{U}$ совпадает с U . Оператор $\bar{U}$ называется *комплексным расширением* оператора U .

Отметим неравенство

$$\|U\| \leq \|\bar{U}\| \leq 2\|U\|. \quad (3)$$

Первая часть неравенства очевидна. Что касается второй, то она является следствием цепи неравенств

$$\begin{aligned} \|\bar{U}(z)\| &= \|U(x) + iU(y)\| \leq \|U(x)\| + \|U(y)\| \leq \\ &\leq \|U\|(\|x\| + \|y\|) \leq 2\|U\|\|z\|. \end{aligned}$$

(Здесь мы использовали неравенство $\|\operatorname{Re} z\| \leq \|z\|$, которое доказывается так: $\|\operatorname{Re} z\| = \left\| \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \right\| \leq \frac{1}{2}(\|z\| + \|\bar{z}\|) = \|z\|$).

В ряде случаев можно доказать равенство $\|\bar{U}\| = \|U\|$. Так, если норма в пространствах Z и W определена формулой (2), то

$$\begin{aligned} \|\bar{U}(z)\| &= \max_{\theta} \|U(x) \cos \theta + U(y) \sin \theta\| \leq \\ &\leq \|U\| \max_{\theta} \|x \cos \theta + y \sin \theta\| = \|U\|\|z\| \end{aligned}$$

и, следовательно, $\|\bar{U}\| \leq \|U\|$, что вместе с (3) дает $\|\bar{U}\| = \|U\|$.

Далее, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой нормированный вещественный элемент x , что $\|\bar{U}(x)\| > \|\bar{U}\| - \varepsilon$, то также $\|\bar{U}\| = \|U\|$, так как в этом случае

$$\|\bar{U}\| \leq \|\bar{U}(x)\| + \varepsilon = \|U(x)\| + \varepsilon \leq \|U\| + \varepsilon.$$

Последнее условие выполнено, например, когда Z и W суть пространства функций из числа указанных выше, а $\bar{U}$ — интег-

реальный оператор

$$w = \tilde{U}(z), \quad w(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt,$$

с вещественным ядром $K(s, t)$.

Точно так же условие выполнено, если Z и W — пространства последовательностей, а оператор $\tilde{U}$ определяется вещественной матрицей.

2.3. Если вещественный оператор $\tilde{U}$ компактен, то, очевидно, и индуцируемый им оператор $\tilde{U}$ из $X = \text{Re } Z$ в $Y = \text{Re } W$ также компактен. Справедливо и обратное утверждение, т. е. если U — компактный оператор из X в Y , то его комплексное расширение — оператор $\tilde{U}$ — компактен.

Для того чтобы доказать этот факт, достаточно сослаться на то, что из сходимости последовательности $\{z_n\}$ вытекает сходимость последовательностей $\{\text{Re } z_n\}$ и $\{\text{Im } z_n\}$, и обратно.

2.4. Если Z — пространство с вещественным ядром, то и сопряженное пространство Z^* также имеет вещественное ядро.

Действительно, пусть $f \in Z^*$; инволюцию определим, полагая $C(f) = \bar{f}$:

$$\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad z \in Z. \quad (4)$$

Убедимся прежде всего, что $\bar{f}$ — непрерывный линейный функционал. В самом деле,

$$\bar{f}(\lambda z_1 + \mu z_2) =$$

$$\begin{aligned} &= \overline{f(\lambda \bar{z}_1 + \mu \bar{z}_2)} = \overline{f(\bar{\lambda} \bar{z}_1 + \bar{\mu} \bar{z}_2)} = \overline{\bar{\lambda} f(\bar{z}_1) + \bar{\mu} f(\bar{z}_2)} = \lambda \bar{f}(\bar{z}_1) + \mu \bar{f}(\bar{z}_2), \\ &|\bar{f}(z)| = |f(\bar{z})| \leq \|f\| \|\bar{z}\| = \|f\| \|z\|. \end{aligned} \quad (5)$$

Проверим теперь, что выполнены условия 1—3 определения инволюции. Имеем, учитывая правило умножения функционала на комплексное число:

$$\begin{aligned} (\overline{\lambda f_1 + \mu f_2})(z) &= \overline{(\lambda f_1 + \mu f_2)(\bar{z})} = \overline{\lambda f_1(\bar{z}) + \mu f_2(\bar{z})} = \\ &= \overline{\lambda f_1(\bar{z})} + \overline{\mu f_2(\bar{z})} = \bar{\lambda} \bar{f}_1(z) + \bar{\mu} \bar{f}_2(z) = (\bar{\lambda} \bar{f}_1 + \bar{\mu} \bar{f}_2)(z), \\ \bar{\bar{f}}(z) &= \overline{\bar{f}(\bar{z})} = \overline{\overline{f(z)}} = f(z). \end{aligned}$$

Наконец, из (5) вытекает неравенство $\|\bar{f}\| \leq \|f\|$. С другой стороны, $\|f\| = \|\bar{\bar{f}}\| \leq \|\bar{f}\|$, откуда $\|\bar{f}\| = \|f\|$.

Обозначим через X вещественное ядро пространства Z и докажем, что если φ — линейный функционал в вещественном пространстве X , то комплексное расширение f функционала φ принадлежит вещественному ядру пространства Z^* , которое исчерпывается функционалами указанного вида. Оба эти утверждения без труда вытекают из определения сопряженного функционала.

В самом деле, если f есть комплексное расширение функционала $\varphi \in X^*$, то

$$\overline{f(z)} = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\varphi(x) - \varphi(y)i} = \varphi(x) + \varphi(y)i = f(z),$$

$$z = x + yi \in Z.$$

Напротив, если функционал f является вещественным элементом пространства Z^* , т. е. если $\bar{f} = f$, то, согласно (4), это означает, что $\overline{f(z)} = f(z)$. В частности, если $z = x \in X$, то $\overline{f(x)} = f(x)$, т. е. $f(x)$ вещественно.

Доказанное предложение можно высказать в следующей форме: вещественное ядро сопряженного пространства является сопряженным пространством по отношению к вещественному ядру данного пространства.

2.5. Естественно ожидать, что оператор, сопряженный к вещественному, снова будет вещественным оператором. Пусть U — вещественный оператор, отображающий пространство Z в пространство W , и U — индуцируемый им оператор из пространства X в Y ($X = \text{Re } Z$, $Y = \text{Re } W$). Докажем, что U^* будет вещественным оператором и что индуцируемый им оператор из пространства Y^* в X^* есть U^* . Последнее утверждение надо понимать в том смысле, что если φ и ψ — функционалы в пространствах X и Y соответственно, причем

$$\varphi = U^*(\psi), \quad (6)$$

то

$$f = U^*(g), \quad (7)$$

где f — комплексное расширение функционала φ , а g — комплексное расширение функционала ψ ; наоборот, если вещественные функционалы $f \in Z^*$ и $g \in W^*$ связаны соотношением (7), то индуцируемые ими функционалы $\varphi \in X^*$ и $\psi \in Y^*$ связаны соотношением (6).

Вещественность оператора U^* доказывается совсем просто: если $g \in W^*$ — вещественный функционал, т. е. если $\bar{g} = g$ и $f = U^*(g)$, то

$$\overline{f(z)} = \overline{f(\bar{z})} = \overline{g(\bar{U}(\bar{z}))} = \overline{g(\overline{U(z)})} = g(U(z)) = f(z).$$

Пусть, далее, $\varphi = U^*\psi$, тогда ($x = \text{Re } z$, $y = \text{Im } z$)

$$f(z) = \varphi(x) + i\varphi(y) = \psi(U(x)) + i\psi(U(y)) =$$

$$= g(U(x) + iU(y)) = g(U(z)),$$

так что $f = U^*(g)$. Столь же просто устанавливается, что из (7) вытекает (6).

§ 3. Спектр

3.1. В этом и следующем параграфах мы исследуем поведение уравнения

$$T_{\lambda}(x) = x - \lambda U(x) = y, \quad (1)$$

или, что то же самое, уравнения

$$T'_{\mu}(x) = \mu x - U(x) = y \quad (1')$$

в зависимости от комплексного параметра λ (или μ). Под U здесь и в дальнейшем подразумевается непрерывный линейный оператор в комплексном B -пространстве X^*). Мы рассматриваем два уравнения (1) и (1') в связи с тем, что уравнение (1) принято рассматривать в теории интегральных уравнений, приложения к которой мы дадим в § 6, а уравнение (1') принято рассматривать в абстрактном функциональном анализе при изучении спектральных свойств оператора U .

В отношении разрешимости уравнения (1) комплексная плоскость разбивается на два множества: множество $\pi(U)$ тех значений λ , при которых уравнение (1) имеет единственное решение, какова бы ни была правая часть уравнения $y \in X$ (следовательно, оператор T_{λ} имеет непрерывный обратный (см. XII.1.3)), и множество $\chi(U)$ остальных значений λ . Точки множества $\pi(U)$ называются *неособенными значениями* оператора U ; множество $\chi(U)$ называется *характеристическим множеством* оператора U .

Аналогично введем множество $\rho(U)$ тех μ , для которых уравнение (1') однозначно разрешимо при любой правой части, и дополнительное множество $\sigma(U)$. Точки множества $\rho(U)$ называются *регулярными значениями* оператора U , а само множество $\rho(U)$ называется *резольвентным множеством* оператора U ; множество $\sigma(U)$ называется *спектром* оператора U .

Если при некотором λ однородное уравнение

$$T_{\lambda}(x) = x - \lambda U(x) = 0 \quad (2)$$

имеет отличные от нуля решения, то λ называется *характеристическим значением* оператора U . Очевидно, множество $\chi_0(U)$ всех характеристических значений содержится в множестве $\chi(U)$. Каждое решение уравнения (2) называется *собственным элементом*, или *вектором*, отвечающим данному характеристическому числу. Множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} N(T_{\lambda}^n)$ называется *корневым подпространством*, а его размерность (конечная или бесконечная) — *кратностью* характеристического значения λ . Число r различных

*) Если первоначально пространство X вещественное, то вместо U мы рассмотрим его комплексное расширение.

множеств $N(T_\lambda^n)$ ($n = 1, 2, \dots$) называется *рангом* характеристического значения (ср. лемму 2 из XIII.1.1).

Если вместо уравнения (2) рассматривать однородное уравнение, соответствующее уравнению (1'):

$$T'_\mu(x) = \mu x - U(x) = 0, \quad (2')$$

то мы придем к понятию *собственного значения или числа, собственного элемента (вектора) и корневого подпространства*, отвечающего данному собственному значению, которые уже были определены для операторов в гильбертовом пространстве (IX.4.1).

Отметим, что если U — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и μ — его собственное значение, то его ранг $r = 1$, т. е.

$$N(T'_\mu) = N(T'^2_\mu) = \dots = N(T'^n_\mu) = \dots \quad (3)$$

и потому в этом случае корневое подпространство есть $N(T'_\mu)$, т. е. состоит из всех собственных элементов оператора U .

Докажем соотношение (3). Так как собственные значения самосопряженного оператора вещественны, то оператор T'_μ и все его степени суть самосопряженные операторы. Опуская для простоты индекс μ и беря $n = 2^k$, будем иметь для $x \in N(T'^{2^k})$

$$(T'^{2^{k-1}}x, T'^{2^{k-1}}x) = (T'^{2^k}x, x) = 0,$$

откуда

$$T'^{2^{k-1}}x = 0.$$

Продолжая так дальше, придем в конце концов к равенству $T'x = 0$, т. е. $x \in N(T')$, и тем самым $N(T') \supset N(T'^{2^k})$. Обратное включение выполнено для произвольного оператора. Таким образом, $N(T') = N(T'^{2^k})$ ($k = 1, 2, \dots$). Если взять далее произвольное $n = 2, 3, \dots$, то, подбирая k так, чтобы $n \leq 2^k$, будем иметь очевидное включение $N(T') \subset N(T'^n) \subset N(T'^{2^k})$. Отсюда $N(T') = N(T'^n)$.

Укажем на простую связь между спектром и характеристическим множеством одного и того же оператора U . Легко видеть, что если $\lambda \in \chi(U)$, то $\mu = \frac{1}{\lambda} \in \sigma(U)$, и наоборот. Очевидно, таким же образом связаны характеристические и собственные значения оператора U . Важно при этом иметь в виду, что собственный элемент, отвечающий характеристическому значению λ , будет также собственным элементом, отвечающим собственному значению $\mu = 1/\lambda$, и обратно. Далее, так как при $\lambda\mu = 1$ будет $N(T_\lambda^n) = N(T'_\mu^n)$ ($n = 1, 2, \dots$), то последнее замечание распространяется и на собственные подпространства. В связи с указанным обстоятельством нет необходимости различать понятия собственного (характеристического) элемента, соответствующего характеристическому значению, и собственного элемента,

соответствующего собственному значению, что и отражено в терминологии, введенной выше.

Указанная связь между характеристическим множеством и спектром позволяет рассматривать, в зависимости от удобства, лишь одно из этих параллельных, а по существу эквивалентных понятий, только в исключительных случаях давая обе формулировки.

Выскажем несколько простых предложений, относящихся к введенным выше понятиям.

I. Соотношение $\lambda \in \pi(U)$ равносильно существованию непрерывного двустороннего обратного оператора, $B_\lambda = T_\lambda^{-1} = (I - \lambda U)^{-1}$.

См. XII.1.3, следствие к теореме XII.1.2.

II. Множество неособенных значений открыто и, следовательно, характеристическое множество замкнуто.

Это вытекает из теоремы о том, что если некоторый оператор имеет непрерывный обратный, то и оператор, близкий к нему по норме, также имеет непрерывный обратный (V.4.6). В нашем случае

$$\|T_\lambda - T_{\lambda'}\| = |\lambda - \lambda'| \|U\|,$$

так что если T_λ^{-1} существует, то при достаточно малой разности $\lambda - \lambda'$ будет существовать и $T_{\lambda'}^{-1}$.

III. Круг $|\lambda| < \frac{1}{\|U\|}$ содержится в множестве $\pi(U)$; следовательно, спектр $\sigma(U)$ целиком входит в круг $|\mu| \leq \|U\|$.

Чтобы установить справедливость этого предложения, достаточно применить теорему Банаха об обратном операторе (V.4.5).

IV. Множества $\chi(U)$ и $\chi(U^*)$ расположены симметрично относительно вещественной оси.

Действительно (IX.3.1),

$$T_\lambda^* = [I - \lambda U]^* = I^* - \bar{\lambda} U^*.$$

А по теореме XII.2.4 операторы T_λ^{-1} и $(T_\lambda^*)^{-1*}$ существуют одновременно.

V. Если X — пространство с вещественным ядром, а U — вещественный оператор, то множество $\chi_o(U)$ симметрично относительно вещественной оси. Кроме того, если $\lambda \in \chi_o(U)$ и z — соответствующий собственный элемент, то характеристическому значению $\bar{\lambda}$ будет отвечать собственный элемент $\bar{z}$,

В самом деле,

$$\bar{z} - \bar{\lambda} U(\bar{z}) = \overline{z - \lambda U(z)},$$

откуда вытекает, что равенства $z - \lambda U(z) = 0$ и $\bar{z} - \bar{\lambda} U(\bar{z}) = 0$ равносильны.

) T_λ^ следует понимать как $(T_\lambda)^*$.

Замечание. В IX.5.3 было дано определение спектра для случая самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Доказанная там теорема IX.5.3 показывает равносильность обоих определений (главы IX и данного выше).

3.2. В случае, когда U — компактный оператор, структура характеристического множества может быть выяснена довольно полно.

Теорема 1. Если U — компактный оператор, то:

а) характеристическое множество содержит лишь характеристические значения, т. е. $\chi(U) = \chi_0(U)$; при этом каждое характеристическое значение имеет конечную кратность;

б) каково бы ни было $r = 0$, круг $|\lambda| \leq r$ содержит разве лишь конечное число характеристических значений;

с) если $\lambda_1 \in \chi(U)$ и $\lambda_2 \in \chi(U^*)$, причем $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_2$, и если $x_1 \in X$ — собственный элемент, отвечающий λ_1 , а $g_2 \in X^*$ — собственный элемент, отвечающий λ_2 , то $g_2(x_1) = 0$.

Доказательство. а) Согласно теореме XII.1.4, если $\lambda \notin \pi(U)$, то однородное уравнение (2) имеет ненулевое решение. Конечномерность собственного подпространства вытекает из леммы 2 (XIII.1.1). Действительно, согласно этой лемме существует такое n_0 , что $N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n_0})$ ($n \geq n_0$). Поэтому в данном случае собственное подпространство есть $N(T_\lambda^{n_0})$. Но

$$T_\lambda^{n_0} = (I - \lambda U)^{n_0} = I - \tilde{U},$$

где $\tilde{U} = \sum_{k=1}^{n_0} (-1)^{k-1} C_{n_0}^k \lambda^k U^k$ есть, очевидно, компактный оператор.

Поэтому на основании упоминавшейся уже теоремы XII.1.4 совокупность решений однородного уравнения

$$T_\lambda^{n_0}(x) = 0$$

образует конечномерное подпространство, а $N(T_\lambda) \subset N(T_\lambda^{n_0})$.

б) Допустим противное, т. е. предположим, что в некотором круге $|\lambda| \leq r$ содержится бесконечное множество характеристических значений. Выделим из этого множества последовательность $\{\lambda_n\}$ различных характеристических значений: $|\lambda_n| \leq r$ ($n = 1, 2, \dots$). Пусть $\{x_n\}$ — последовательность соответствующих собственных элементов:

$$x_n - \lambda_n U(x_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Покажем (по индукции), что при любом $n = 1, 2, \dots$ элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимы. Для $n = 1$ это верно. Предположим, что утверждение справедливо при некотором $n \geq 1$. Проверим его для элементов $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. Допуская про-

тивное, будем иметь

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k,$$

откуда в силу (4)

$$\frac{x_{n+1}}{\lambda_{n+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\lambda_k} x_k.$$

Сопоставляя это с предыдущим равенством, найдем

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_k}\right) \alpha_k x_k = 0.$$

Так как $1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_k} \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то, таким образом, элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ оказались линейно зависимыми вопреки индуктивному предположению.

Образуем множества $X_n = \mathcal{L}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$. Так как по доказанному $X_{n+1} \neq X_n$, то по лемме о почти перпендикуляре (IV.1.7) можно найти такие элементы $y_1, y_2, \dots, y_n$, что

$$y_n \in X_n, \quad \|y_n\| = 1, \quad \rho(y_{n+1}, X_n) > \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Если $x \in X_n$, т. е. если $x = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k$, то $U(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\lambda_k} x_k \in X_n$.

Вместе с тем, $T_{\lambda_n}(x) = x - \lambda_n U(x) = \sum_{k=1}^n \beta_k \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right) x_k \in X_{n-1}$ (так как коэффициент при x_n равен нулю).

Пусть $m > n$. Рассмотрим выражение

$$U(\lambda_m y_m) - U(\lambda_n y_n) = y_m - [T_{\lambda_m}(y_m) + U(\lambda_n y_n)] = y_m - \tilde{y}.$$

По доказанному $T_{\lambda_m}(y_m) \in X_{m-1}$ и $U(\lambda_n y_n) \in X_n \subset X_{m-1}$. Следовательно,

$$\tilde{y} = T_{\lambda_m}(y_m) + U(\lambda_n y_n) \in X_{m-1}.$$

Вследствие (5)

$$\|U(\lambda_m y_m) - U(\lambda_n y_n)\| = \|y_m - \tilde{y}\| > \frac{1}{2}.$$

Это, однако, противоречит компактности оператора U , поскольку последовательность $\{\lambda_n y_n\}$ ограничена ($\|\lambda_n y_n\| \leq r$).

с) Имеем $\lambda_1 U(x_1) = x_1$ и $\lambda_2 U^*(g_2) = g_2$. Следовательно,

$$g_2(x_1) = g_2(\lambda_1 U(x_1)) = \lambda_1 U^*(g_2)(x_1) = \lambda_1 \left(\frac{g_2}{\lambda_2}\right)(x_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} g_2(x_1),$$

что в силу $\lambda_1 \neq \lambda_2$ возможно лишь в случае, если $g_2(x_1) = 0$.

Отметим в заключение, что если U — компактный оператор в бесконечномерном пространстве X , то точка нуль принадлежит спектру оператора U .

§ 4. Резольвента

4.1. Здесь мы будем продолжать изучение уравнения

$$x - \lambda U(x) = y, \quad (1)$$

однако, в противоположность предыдущему параграфу, сейчас нас будет интересовать случай однозначной его разрешимости.

Пусть $\lambda \neq 0$ — неособенное значение оператора U . Оператор B_λ , определяемый из соотношения

$$I + \lambda B_\lambda = (I - \lambda U)^{-1}, \quad (2)$$

называется *резольвентой* оператора U . При $\lambda = 0$ полагаем $B_0 = U$.

Если рассматривается спектр и соответственно множество регулярных значений, то вместо B_λ удобнее говорить об операторе

$$R_\mu = (\mu I - U)^{-1}, \quad (3)$$

который имеет смысл для всех регулярных значений оператора U . Оператор R_μ мы также будем называть *резольвентой*. Опасность смешения двух понятий исключается, так как из контекста всегда будет ясно, о какой именно резольвенте идет речь; кроме того, для различения той и другой резольвенты остаются разные обозначения. Отметим, что резольвента B_λ часто встречается в теории интегральных уравнений, где ее называют резольвентой Фредгольма, а в функциональном анализе резольвентой обычно называется R_μ (ср. 3.1).

Если $\mu \neq 0$, то, очевидно,

$$R_\mu = \frac{1}{\mu} I + \frac{1}{\mu^2} B_{1/\mu}. \quad (4)$$

Наоборот, из равенства

$$(I + \lambda B_\lambda)(I - \lambda U) = (I - \lambda U)(I + \lambda B_\lambda) = I$$

получаем

$$B_\lambda = U(I - \lambda U)^{-1} = (I - \lambda U)^{-1}U. \quad (5)$$

Следовательно, при $\lambda \neq 0$

$$B_\lambda = \frac{1}{\lambda} U R_{1/\lambda} = \frac{1}{\lambda} R_{1/\lambda} U. \quad (6)$$

Соотношения (4) и (6) позволяют все предложения, доказанные для B_λ , переформулировать для R_μ , и обратно.

4.2. Исследуем поведение резольвенты B_λ при малых λ . Рассмотрим ряд

$$I + \lambda U + \lambda^2 U^2 + \dots + \lambda^n U^n + \dots \quad (7)$$

Если он сходится в пространстве операторов $B(X, X)$, то согласно замечанию к теореме Банаха (V.4.5) его сумма есть $(I - \lambda U^{-1})$, т. е.

$$(I - \lambda U)^{-1} = I + \lambda U + \dots + \lambda^n U^n + \dots,$$

откуда вследствие (5)

$$B_\lambda = U + \lambda U^2 + \dots + \lambda^n U^{n+1} + \dots \quad (8)$$

Эта формула имеет место для тех же λ , для которых сходится ряд (7). Но, как установлено в V.4.2, ряд (7) сходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|\lambda^n U^n\|} < 1,$$

и расходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|\lambda^n U^n\|} > 1.$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Резольвента B_λ разлагается в ряд (8) по степеням λ , радиус сходимости которого*

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B_0^n\|}}.$$

Если от резольвенты B_λ с помощью соотношения (4) перейти к резольвенте R_μ , то получим

Следствие. *Резольвента R_μ разлагается в ряд по степеням μ^{-1} :*

$$R_\mu = \frac{1}{\mu} I + \frac{1}{\mu^2} U + \dots + \frac{1}{\mu^n} U^{n-1} + \dots; \quad |\mu| > \frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|}.$$

4.3. Можно указать другое выражение для радиуса сходимости ряда (8), связанное с расположением характеристического множества на комплексной плоскости. Докажем сначала два вспомогательных предложения.

Лемма 1. *Каковы бы ни были $\lambda, \mu \in \pi(U)$, имеет место равенство*

$$B_\lambda - B_\mu = (\lambda - \mu) B_\mu B_\lambda. \quad (9)$$

Доказательство. Из соотношения (3) имеем

$$B_\lambda - B_\mu = U(I - \lambda U)^{-1} - (I - \mu U)^{-1} U.$$

Умножая это равенство справа на $I - \lambda U$, а затем слева на $I - \mu U$, получим

$$(I - \mu U)(B_\lambda - B_\mu)(I - \lambda U) = (I - \mu U)U - U(I - \lambda U) = (\lambda - \mu)U^2$$

и, следовательно,

$$B_\lambda - B_\mu = (\lambda - \mu)(I - \mu U)^{-1}U \cdot U(I - \lambda U)^{-1} = (\lambda - \mu)B_\mu B_\lambda,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Операторы B_λ и B_μ перестановочны, т. е. $B_\lambda B_\mu = B_\mu B_\lambda$.

Аналогично доказывается, что для всех $\lambda, \mu \in \rho(U)$

$$R_\lambda - R_\mu = -(\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu.$$

Лемма 2. Резольвента B_λ является непрерывной функцией параметра λ в каждой точке множества $\pi(U)$, т. е. если $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ ($\lambda_n, \lambda_0 \in \pi(U)$), то $B_{\lambda_n} \rightarrow B_{\lambda_0}$.

Доказательство. Докажем сначала, что вещественная функция $\|B_\lambda\|$ непрерывна на $\pi(U)$. Если $U = 0$, то $B_\lambda = 0$, и наше утверждение доказано. Если же $U \neq 0$, то $B_\lambda \neq 0$, ввиду чего можно доказывать непрерывность функции $\frac{1}{\|B_\lambda\|}$. Из равенства

(9) получаем

$$\|B_\lambda\| - \|B_\mu\| \leq \|B_\lambda - B_\mu\| = |\lambda - \mu| \|B_\mu B_\lambda\| \leq |\lambda - \mu| \|B_\mu\| \|B_\lambda\|.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{1}{\|B_\mu\|} - \frac{1}{\|B_\lambda\|} \right| \leq |\lambda - \mu|,$$

откуда и вытекает требуемый результат.

Установим теперь непрерывность B_λ . Так как множество $\pi(U)$ открытое, а $\lambda_0 \in \pi(U)$, то найдется круг $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$, целиком содержащийся в $\pi(U)$. Непрерывная функция $\|B_\lambda\|$ ограничена в этом круге; пусть, например,

$$\|B_\lambda\| \leq M, \quad |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon. \quad (10)$$

Согласно (9) и (10)

$$\|B_\lambda - B_{\lambda_0}\| \leq |\lambda - \lambda_0| \|B_{\lambda_0}\| \|B_\lambda\| \leq M^2 |\lambda - \lambda_0|, \quad |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. Радиус сходимости r ряда (8) равен расстоянию r_0 от точки $\lambda = 0$ до характеристического множества $\chi(U)$.

Доказательство. Во-первых, так как в круге $|\lambda| < r$ ряд (8) сходится и, следовательно, при этих λ существует резольвента, то указанный круг содержится в множестве неособенных значений. Поэтому $r \leq r_0$.

Возьмем теперь произвольный элемент $x \in X$ и произвольный функционал $f \in X^*$ и рассмотрим функцию ϕ комплексного пере-

менного λ :

$$\varphi(\lambda) = f(B_\lambda(x)).$$

Докажем, что φ регулярна на множестве $\pi(U)$. Действительно, если $\lambda, \mu \in \pi(U)$, то в силу (9)

$$\frac{\varphi(\mu) - \varphi(\lambda)}{\mu - \lambda} = \frac{f(B_\mu(x)) - f(B_\lambda(x))}{\mu - \lambda} = f(B_\mu B_\lambda(x)).$$

При $\mu \rightarrow \lambda$ правая часть имеет пределом $f(B_\lambda^2(x))$ (лемма 2). Таким образом, существует непрерывная производная

$$\varphi'(\lambda) = f(B_\lambda^2(x)).$$

Разложим функцию φ в ряд Тейлора в окрестности точки $\lambda_0 = 0$:

$$\varphi(\lambda) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} \lambda + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n + \dots \quad (11)$$

Это разложение имеет место в круге, не содержащем особых точек функции φ , и тем более в круге $|\lambda| < r_0$. Но в силу (8)

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(U^{n+1}(x)) \lambda^n, \quad |\lambda| < r. \quad (12)$$

При этом вследствие известной теоремы теории функций комплексного переменного ряды (11) и (12) тождественны, так что ряд (12) сходится при $|\lambda| < r_0$.

Возьмем произвольное $0 < \lambda_1 < r_0$. Из сходимости ряда (12) при $\lambda = \lambda_1$ вытекает

$$\lambda_1^n f(U^{n+1}(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

и, следовательно, ввиду произвольности f

$$\lambda_1^n U^{n+1}(x) \rightarrow 0 \quad (\sigma(X, X^*)).$$

Но слабо сходящаяся последовательность элементов ограничена (VIII.1.1):

$$\sup_n \|\lambda_1^n U^{n+1}(x)\| < \infty.$$

Так как это неравенство выполнено для каждого $x \in X$, а пространство X полное, то по теореме VII.1.1

$$\sup \|\lambda_1^n U^{n+1}\| = M < \infty. \quad (13)$$

Поэтому

$$\lambda_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M^{1/n} = 1,$$

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|}} = r.$$

Так как λ_1 можно взять сколь угодно близким к r_0 , то $r_0 \leq r$. Учитывая доказанное выше неравенство $r \leq r_0$, получаем отсюда $r = r_0$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Пусть λ_0 — неособенное значение оператора U . Как и выше, обосновывается разложение

$$B_\lambda = B_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) B_{\lambda_0}^2 + \dots + (\lambda - \lambda_0)^n B_{\lambda_0}^{n+1} + \dots,$$

имеющее место в круге $|\lambda - \lambda_0| < \rho_0$, где ρ_0 есть расстояние от точки λ_0 до характеристического множества, или, как в теореме 1,

$$\rho_0 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B_{\lambda_0}^{n+1}\|}}.$$

Заменяя резольвенту B_λ резольвентой B_μ , получаем следующий результат.

Следствие 1. *Разложение*

$$R_\mu = \frac{1}{\mu} I + \frac{1}{\mu^2} U + \dots + \frac{1}{\mu^{n+1}} U^n + \dots \quad (14)$$

имеет место при $|\mu| > 1/r$, где $1/r$ — радиус наименьшего круга с центром в начале координат, целиком содержащего спектр.

Число $1/r$ называется *спектральным радиусом* оператора U .

Замечание 2. Если U — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то по IX.5.3 $1/r = \|U\|$. Сопоставляя это с результатом следствия к теореме 1, приходим к интересному соотношению

$$\|U\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|}^*).$$

Следствие 2. *Спектр $\sigma(U)$ непрерывного линейного оператора U в комплексном B -пространстве непуст.*

Доказательство. Если $\sigma(U) = \emptyset$, то, учитывая соотношение между $\sigma(U)$ и $\chi(U)$ и $0 \notin \chi(U)$, получаем, что множество $\pi(U)$ неособенных значений есть вся комплексная плоскость. Так как можно считать $U \neq 0$, то при любом λ будет $B_\lambda = 0$. Пусть $y_0 = B_{\lambda_0}(x_0) \neq 0$. Возьмем $f \in X^*$, $f(y_0) \neq 0$. Аналогично доказательству теоремы 2 получаем, что функция

$$\varphi(\lambda) = f(B_\lambda(x_0))$$

*) Впрочем, это равенство является следствием более сильного соотношения

$$\|U\| = \sqrt[n]{\|U^n\|}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

которое можно получить, если воспользоваться теоремой о спектре оператора $\varphi(U)$ (теорема IX.5.4) применительно к функции $\varphi(t) = t^n$ ($n = 1, 2, \dots$).

регулярна на всей комплексной плоскости. Далее,

$$|\varphi(\lambda)| = |f(B_\lambda(x_0))| \leq \|f\| \|B_\lambda\| \|x_0\|.$$

Так как $\sigma(U) = \emptyset$, то существует непрерывный U^{-1} , откуда аналогично лемме 2 получаем, что при $\lambda \rightarrow \infty$ $\|R_{1/\lambda}\| \rightarrow \|U^{-1}\|$. Следовательно, в силу (6)

$$\|B_\lambda\| \leq 1/\lambda \|R_{1/\lambda}\| \|U\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, $\varphi(\lambda)$ ограничена, откуда по теореме Ливилля $\varphi(\lambda)$ есть тождественная постоянная, которая, очевидно, может быть только нулем. Однако $\varphi(\lambda_0) = f(y_0) \neq 0$, чем получено противоречие.

Отметим, что если бы мы попытались определить спектр оператора U в вещественном пространстве аналогично тому, как это было сделано в 3.1, то спектр мог бы оказаться пустым множеством. Это основная причина того, что мы рассматриваем комплексный случай.

4.4. Применим доказанный результат к исследованию сходимости метода последовательных приближений для уравнения

$$x - U(x) = y. \quad (15)$$

Как было показано в V.5.1, сходимость ряда

$$I + U + U^2 + \dots + U^n + \dots \quad (16)$$

обеспечивает сходимость метода последовательных приближений, с какого бы начального приближения x_0 ни начать процесс последовательных приближений. Полагая в (14) $\mu = 1$, приходим к следующему критерию сходимости метода последовательных приближений для уравнения (15).

Теорема 3. Если спектр оператора U лежит в круге $|\mu| < 1$, то метод последовательных приближений для уравнения (15) сходится, каковы бы ни были $y \in X$ и начальное приближение $x_0 \in X$. Если же вне круга $|\mu| \leq 1$ имеются точки спектра, то существует множество $E \subset X$, являющееся вычетом*) в X , такое, что при $y \in E$ процесс последовательных приближений для уравнения (15), начатый с $x_0 = 0$, расходится.

В доказательстве нуждается только вторая часть теоремы. Заметим, что в этом случае будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U^n\| = \infty$$

и вследствие замечания к теореме VII.1.1

$$\sup_n \|U^n(y)\| = \infty \quad (17)$$

*) Напомним, что множество E в пространстве X называется *вычетом*, если его дополнение — первой категории в X (см. I.4.7).

для всех $y \in X$, за исключением, может быть, некоторого множества G первой категории в X . Но сходимость процесса последовательных приближений, начатого с $x_0 = 0$, равносильна сходимости ряда

$$y + U(y) + U^2(y) + \dots + U^n(y) + \dots,$$

а ввиду (17) этого ряд расходится, если $y \notin G$.

Замечание 1. Если оператор U таков, что все точки спектра, отличные от нулевой, суть собственные значения, то теорема может быть высказана в более определенной форме. Именно, для сходимости метода последовательных приближений в этом случае необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения оператора U лежали в круге $|\mu| < 1$.

Действительно, согласно доказанной теореме, если метод последовательных приближений сходится, спектр оператора U лежит в круге $|\mu| \leq 1$. Если допустить, что существует собственное значение μ_0 , лежащее на окружности $|\mu| = 1$, то, полагая в уравнении (15) $y = y'$, где y' — собственный элемент, отвечающий собственному значению μ_0 , и беря $x_0 = 0$, получим для n -го приближения x_n выражение

$$x_n = (1 + \mu_0 + \dots + \mu_0^{n-1})y',$$

которое не имеет предела.

Замечание 2. Результаты теоремы и замечания 1 значительно упрощаются, если в уравнении (15) оператор U является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве. Учитывая замечание 2 из 4.3, имеем в этом случае: для сходимости метода последовательных приближений для уравнения (15) достаточно, чтобы $\|U\| < 1$. Если все отличные от нуля точки спектра являются собственными значениями, то это условие также и необходимо.

Сформулируем, наконец, теорему 3 в терминах характеристического множества.

Теорема 3'. Если характеристическое множество оператора U лежит вне круга $|\lambda| \leq 1$, то метод последовательных приближений для уравнения (15) сходится, каковы бы ни были $y \in X$ и начальное приближение $x_0 \in X$. Если же в круге $|\lambda| < 1$ имеются точки характеристического множества, то существует такое множество $E \subset X$, являющееся вычетом в X , что если $y \in E$, то процесс последовательных приближений, начатый с $x_0 = 0$, расходится.

В связи с этой теоремой также можно сделать замечания, аналогичные замечаниям 1 и 2. Предоставляем это читателю.

4.5. Если U — компактный оператор, то к результатам теорем 1 и 2 можно присоединить более тонкие факты, относящиеся к поведению резольвенты в окрестности характеристического значения.

Будем называть непрерывный линейный оператор V *конечномерным*, если он отображает пространство X в конечномерное

подпространство $X \subset X$. Выберем в X полную систему линейно независимых элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$. По самому определению для произвольного $x \in X$

$$V(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ зависят, очевидно, от x . Полагая $\alpha_k = f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), мы без труда убедимся, что функции f_k ($k = 1, 2, \dots, n$) линейные и непрерывные: линейность их не вызывает сомнений, а непрерывность вытекает из того факта, что если последовательность элементов нормированного конечномерного пространства стремится к нулю, то к нулю стремится и каждая координата (см. IV.1.6). Таким образом, получаем

$$V(x) = f_1(x)x_1 + f_2(x)x_2 + \dots + f_n(x)x_n. \quad (18)$$

Обратно, всякий оператор V , представимый в форме (18), будет, разумеется, конечномерным.

Отметим, что конечномерный оператор necessarily компактен.

Рассмотрим теперь компактный оператор U , и пусть λ_0 — его характеристическое значение. Справедлива

Теорема 4. Оператор U допускает представление в форме

$$U = U' + U'',$$

где U'' — конечномерный оператор, а U' — компактный, при этом характеристическое множество оператора U'' состоит из единственной точки λ_0 , а характеристическое множество оператора U' получается из характеристического множества оператора U удалением из последнего точки λ_0 .

Доказательство. Можно считать, что $\lambda_0 = 1$ (иначе мы рассмотрели бы вместо U оператор $\frac{1}{\lambda_0} U$). При этом предположении докажем, что разложение оператора U на сумму $U' + U''$, указанное в теореме 1.1, удовлетворяет требованиям данной теоремы.

Будем употреблять обозначения, использованные в теореме 1.1. Проверим, что оператор U'' имеет единственное характеристическое значение $\lambda_0 = 1$. Действительно, если $x_0 \in N(T)$, то тем самым $x_0 \in N(T') = X''$, следовательно, в силу определения оператора U''

$$U''(x_0) = U(x_0) = x_0$$

и $\lambda_0 = 1$ есть характеристическое значение оператора U'' .

Если

$$\lambda U''(x) = x \quad (19)$$

при некотором $x \in X$ ($x \neq 0$), то, так как $U''(x) \in X''$, будет $x \in X''$ и, следовательно, $U''(x) = U(x)$. Пусть $m \geq 0$ таково, что

$T^{m+1}(x) = 0$, но $T^m(x) \neq 0$. Вследствие (19)

$$\begin{aligned} 0 = T^m(x - \lambda U(x)) &= T^m(x - \lambda[x - T(x)]) = \\ &= (1 - \lambda)T^m(x) + \lambda T^{m+1}(x) = (1 - \lambda)T^m(x), \end{aligned}$$

что возможно лишь при $\lambda = 1$.

Итак, единственное характеристическое значение оператора U'' есть $\lambda_0 = 1$.

Докажем теперь утверждение теоремы, относящееся к характеристическому множеству оператора U' .

Так как согласно теореме 1.1 оператор $T' = I - U'$ имеет обратный, то $\lambda_0 = 1$ не является характеристическим значением оператора U' . Пусть $\lambda \neq 1$ — какое-нибудь характеристическое значение оператора U и $x_0 \neq 0$ — соответствующий собственный элемент. Если бы оказалось, что $x_0 \in X''$, то, рассуждая как выше, мы получили бы $\lambda = 1$. Таким образом, $x_0 \notin X''$. Поэтому в разложении

$$x_0 = x'_0 + x''_0, \quad x'_0 \in X', \quad x''_0 \in X'' \quad (20)$$

(см. пункт с) теоремы 1.1) должно быть $x'_0 \neq 0$. В силу единственности представления (20) из соотношения

$$x_0 = \lambda U(x'_0) + \lambda U(x''_0)$$

получаем $x'_0 = \lambda U(x'_0) = \lambda U'(x'_0)$, т. е. λ является характеристическим значением оператора U' .

Наоборот, пусть λ — характеристическое значение оператора U' и $x \neq 0$ — соответствующий собственный элемент. Так как

$$x = \lambda U'(x) \in X',$$

то $U'(x) = U(x)$ и, следовательно, $x = \lambda U(x)$, т. е. λ есть характеристическое значение оператора U .

Остальные утверждения теоремы содержатся в теореме 1.1. Теорема доказана.

4.6. Более полное представление о поведении резольвенты в окрестности характеристического значения можно составить на основании следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть λ_0 — характеристическое значение компактного оператора U . Тогда в достаточно малой окрестности точки λ_0 имеет место разложение

$$\begin{aligned} B_\lambda = \frac{U_{-r}}{(\lambda - \lambda_0)^r} + \dots + \frac{U_{-1}}{\lambda - \lambda_0} + U_0 + \\ + U_1(\lambda - \lambda_0) + \dots + U_n(\lambda - \lambda_0)^n + \dots \quad (21) \end{aligned}$$

При этом r — ранг характеристического значения λ_0 ; операторы $U_{-r}, \dots, U_{-1}$ конечномерные; $U_{-r} \neq 0$.

Ряд в правой части (21) сходится в пространстве операторов $B(X, X)$.

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, будем считать $\lambda_0 = 1$. Отметим сразу же, что на основании леммы 2 из 1.1 ранг характеристического значения λ_0 конечен. Снова используя обозначения теоремы 1.1, будем иметь на основании замечания к упомянутой теореме, что $X' = T^r(X)$, $X'' = N(T^r)$.

Представляя элемент $x \in X$ в форме

$$x = x' + x'', \quad x' \in X', \quad x'' \in X''$$

(пункт с) теоремы 1.1) и сопоставляя элементу x элемент $x' = P'(x)$ или элемент $x'' = P''(x)$, построим операторы P' и P'' — проекторы пространства X на подпространства X' и X'' . В силу оценки (9) § 1 эти операторы непрерывны. Отметим еще, что

$$P'(X) = X', \quad P''(X) = X'', \quad P' + P'' = I.$$

Рассмотрим произвольный элемент $y \in X$. Элемент $x = B_\lambda(y)$ есть решение уравнения

$$x - \lambda U(x) = U(y). \quad (22)$$

Подставляя сюда $x = P'(x) + P''(x)$, $y = P'(y) + P''(y)$ и учитывая, что $U(X') \subset X'$, а $U(X'') \subset X''$, можем записать уравнение (22) в виде системы двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} P'(x) - \lambda U P'(x) &= U P'(y) \\ P''(x) - \lambda U P''(x) &= U P''(y) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Замечая, что $U P' = U' P'$, можно переписать первое из уравнений в форме

$$T'_\lambda(P'(x)) = U' P'(y),$$

где обозначено $T'_\lambda = I - \lambda U'$. В силу теоремы 4 $\lambda_0 = 1$ есть регулярное значение оператора U' . Поэтому на основании замечания к теореме 2, если разность $\lambda - 1$ достаточно мала, резольвента B'_λ оператора U' допускает разложение

$$B'_\lambda = U'_0 + (\lambda - 1) U'_1 + \dots + (\lambda - 1)^n U'_n + \dots,$$

причем ряд в правой части сходится в пространстве $B(X, X)$. Учитывая сказанное, можем написать

$$P'(x) = B'_\lambda P'(y) = [U'_0 + (\lambda - 1) U'_1 + \dots + (\lambda - 1)^n U'_n + \dots](y), \quad (24)$$

где $U_n = U'_n P'$ ($n = 1, 2, \dots$) и ряд в правой части по-прежнему сходится в пространстве $B(X, X)$.

Займемся теперь вторым из уравнений (23).

Образуем фактор-пространства

$$X^{(k)} = N(T^k)/N(T^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

и через φ_k обозначим естественный гомоморфизм пространства $N(T^k)$ на $X^{(k)}$. Пространство $X^{(r)}$; очевидно, конечномерное. Выберем в нем полную систему линейно независимых элементов $\bar{x}_1^{(r)}, \bar{x}_2^{(r)}, \dots, \bar{x}_{n_r}^{(r)}$, и пусть $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots, x_{n_r}^{(r)}$ — такие элементы из $N(T^r)$, что $\varphi_r(x_j^{(r)}) = \bar{x}_j^{(r)}$. Элементы $x_j^{(r-1)} = T(x_j^{(r)})$ ($j = 1, 2, \dots, n_r$) входят в $N(T^{r-1})$. При этом их образы $\bar{x}_j^{(r-1)} = \varphi_{r-1}(x_j^{(r-1)})$ линейно независимы, так как если $\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j \bar{x}_j^{(r-1)} = 0$, то

$$\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j x_j^{(r-1)} = T\left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j x_j^{(r)}\right) \in N(T^{r-2});$$

иначе говоря, $\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j x_j^{(r)} \in N(T^{r-1})$ и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j \bar{x}_j^{(r)} = \varphi_r\left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j x_j^{(r)}\right) = 0,$$

что возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n_r} = 0$.

Присоединим к элементам $\bar{x}_1^{(r-1)}, \bar{x}_2^{(r-1)}, \dots, \bar{x}_{n_r}^{(r-1)}$ еще элементы $\bar{x}_{n_r+1}^{(r-1)}, \dots, \bar{x}_{n_{r-1}}^{(r-1)} \in X^{(r-1)}$ так, чтобы в результате получился базис в $X^{(r-1)}$. Выберем, далее, $x_{n_r+1}^{(r-1)}, \dots, x_{n_{r-1}}^{(r-1)} \in N(T^{r-1})$ так, чтобы $\bar{x}_j^{(r-1)} = \varphi_{r-1}(x_j^{(r-1)})$.

Продолжая рассуждать так и дальше, мы для каждого $k = 1, 2, \dots, r$ построим элементы $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}$ так, что

$$\begin{aligned} x_j^{(k)} &\in N(T^k), \quad T(x_j^{(k)}) = x_j^{(k-1)}, \\ j &= 1, 2, \dots, n_k; \quad k = 1, 2, \dots, r; \quad x_j^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

При этом элементы

$$\bar{x}_1^{(k)} = \varphi_k(x_1^{(k)}), \quad \bar{x}_2^{(k)} = \varphi_k(x_2^{(k)}), \quad \dots, \quad \bar{x}_{n_k}^{(k)} = \varphi_k(x_{n_k}^{(k)})$$

образуют при каждом $k = 1, 2, \dots, r$ базис в пространстве $X^{(k)}$.

Обозначим

$$X_k = \mathcal{L}(\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}\}), \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Вследствие (25)

$$T(X_k) \subset X_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, r; \quad X_0 = \{0\}. \quad (26)$$

Докажем, что элементы $\{x_j^{(k)}\}$ ($j = 1, 2, \dots, n_k; k = 1, 2, \dots, r$) образуют полную в X'' систему линейно независимых элементов. Пусть

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j^{(k)} x_j^{(k)} = 0.$$

Поскольку $x_j^{(k)} \in N(T^{r-1})$ при $k < r$, применение оператора φ_r дает

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j^{(k)} \varphi_r(x_j^{(k)}) = \sum_{j=1}^{n_r} \lambda_j^{(r)} \bar{x}_j^{(r)} = 0$$

и, следовательно, $\lambda_j^{(r)} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n_r$). Аналогичным образом убеждаемся, что и все остальные коэффициенты $\lambda_j^{(k)}$ равны нулю. Рассмотрим теперь произвольный элемент $x'' \in X''$. Элемент $\varphi_r(x'') \in X^{(r)}$, поэтому найдутся коэффициенты $\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \dots, \alpha_{n_r}^{(r)}$ такие, что

$$\varphi_r(x'') = \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j^{(r)} \bar{x}_j^{(r)} = \varphi_r\left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j^{(r)} x_j^{(r)}\right).$$

Поэтому

$$x'' - \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j^{(r)} x_j^{(r)} \in N(T^{r-1}).$$

Продолжая подобные рассуждения, получим в конце концов, что при некоторых $\alpha_j^{(k)}$

$$x'' - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)} x_j^{(k)} \in N(T^0) = \{0\},$$

и, следовательно, $x'' = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)} x_j^{(k)}$.

Если x — произвольный элемент из X , то $P''(x) \in X''$, вследствие чего

$$P''(x) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)}(x) x_j^{(k)},$$

при этом, как отмечалось в 4.5, коэффициенты $\alpha_j^{(k)}$ суть линейные функционалы. Если обозначить

$$P_k(x) = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)}(x) x_j^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

то в силу сказанного P_k будет непрерывным оператором,

отображающим X на X_k , причем

$$P'' = P_1 + P_2 + \dots + P_r, \quad (27)$$

$$P_m P_k = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ P_{m_k}, & m = k, \end{cases} \quad k, m = 1, 2, \dots, r. \quad (28)$$

Принимая во внимание соотношение $UP'' = P''U$, запишем правую часть второго из уравнений (23) в виде $P''U(y)$, после чего заменим оператор P'' суммой $P_1 + P_2 + \dots + P_r$:

$$\sum_{k=1}^r P_k(x) - \lambda \sum_{k=1}^r UP_k(x) = \sum_{k=1}^r P_k U(y).$$

Применяя к обеим частям равенства оператор P_m , получим с учетом (28)

$$P_m(x) - \lambda \sum_{k=1}^r P_m UP_k(x) = P_m U(y), \quad m = 1, 2, \dots, r. \quad (29)$$

Но

$$UP_k(x) = P_k(x) - TP_k(x),$$

поэтому вследствие (26)

$$P_m UP_k(x) = \begin{cases} P_m(x), & k = m, \\ -TP_{m+1}(x), & k = m + 1, \\ 0, & k \neq m, m + 1, \end{cases}$$

$$k, m = 1, 2, \dots, r; \quad P_{r+1} = 0.$$

Используя это соотношение, можем записать уравнение (29) в более простой форме

$$P_r(x) - \lambda P_r(x) = P_r U(y), \quad (30)$$

$$P_m(x) - \lambda[P_m(x) - TP_{m+1}(x)] = P_m U(y), \quad m = 1, 2, \dots, r-1. \quad (31)$$

Из (30) находим

$$P_r(x) = \frac{P_r U(y)}{1 - \lambda},$$

следовательно, на основании (31)

$$P_{r-1}(x) =$$

$$= \frac{\lambda}{1 - \lambda} TP_r(x) + \frac{1}{1 - \lambda} P_{r-1} U(y) = \frac{\lambda}{(1 - \lambda)^2} TP_r U(y) + \frac{1}{1 - \lambda} P_{r-1} U(y)$$

и вообще для любого $m = 1, 2, \dots, r$

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{r-m} \frac{\lambda^k}{(1 - \lambda)^{k+1}} T^k P_{m+k} U(y).$$

Складывая все полученные равенства, будем иметь

$$\begin{aligned} P''(x) &= \sum_{m=1}^r P_m(x) = \sum_{m=1}^r \sum_{k=0}^{r-m} \frac{\lambda^k}{(1-\lambda)^{k+1}} T^k P_{m+k} U(y) = \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda^k}{(1-\lambda)^{k+1}} \sum_{m=1}^{r-k} T^k P_{m+k} U(y). \end{aligned} \quad (32)$$

Дробь $\frac{\lambda^k}{(1-\lambda)^{k+1}}$ разложим на простейшие:

$$\frac{\lambda^k}{(1-\lambda)^{k+1}} = \sum_{j=0}^k \frac{c_j^{(k)}}{(\lambda-1)^{j+1}}.$$

Здесь $c_j^{(k)}$ — некоторые постоянные, причем $c_k^{(k)} = (-1)^{k+1}$. Подставляя это в (32), получим

$$P''(x) = \sum_{s=1}^r \frac{U_{-s}(y)}{(\lambda-1)^{s^2}} \quad (33)$$

где операторы U_{-s} ($s=1, 2, \dots, r$) суть линейные комбинации операторов вида $T^k P_{m+k} U$. Так как $P_{m+k}(X) = X_{m+k} \subset X''$, а на основании пункта б) теоремы 1.1. $T(X'') \subset X''$, то операторы U_{-s} отображают пространство X в X'' и, следовательно, являются конечномерными. Далее, из равенства (32) видно, что

$$U_{-r} = (-1)^r T^{r-1} P_r U.$$

Поэтому, если, например, $y = x_1^{(r)}$, то в силу (25)

$$\begin{aligned} U_{-r}(y) &= (-1)^r T^{r-1} P_r U(x_1^{(r)}) = (-1)^r T^{r-1} P_r (x_1^{(r)} - x_1^{(r-1)}) = \\ &= (-1)^r T^{r-1} (x_1^{(r)}) = (-1)^r x_1^{(1)} \neq 0, \end{aligned}$$

так что $U_{-r} \neq 0$.

Складывая соотношения (24) и (33), получим требуемое разложение резольвенты B_λ . Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Если $\hat{U}$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то теорема может быть несколько уточнена, так как в этом случае $r=1$ (см. 3.1) и, следовательно, в разложении (21) будет лишь одно слагаемое с отрицательным показателем у разности $\lambda - \lambda_0$, именно $(\lambda - \lambda_0)^{-1} U_{-1}$. Мы не приводим подробной формулировки соответствующего результата, так как он сформулирован уже (и в более сильной форме) в IX.4.5.

§ 5. Альтернатива Фредгольма

В этом параграфе будут указаны условия, которым должен удовлетворять непрерывный линейный оператор T , отображающий B -пространство X в себя, чтобы для него имела место альтернатива Фредгольма (см. 1.4). В частности, оказывается, что если некоторая степень U^m линейного оператора U есть компактный оператор, то для $T = I - U$ справедлива альтернатива Фредгольма. Изложенные ниже результаты принадлежат С. М. Никольскому [1].

5.1. Рассмотрим уравнение

$$T(x) = y \quad (1)$$

и сопряженное к нему

$$T^*(g) = f. \quad (2)$$

Рассмотрим также соответствующие однородные уравнения

$$T(x) = 0, \quad (3)$$

$$T^*(g) = 0. \quad (4)$$

Напомним, что справедливость альтернативы Фредгольма для оператора T означает, что:

1) либо уравнения (1) и (2) разрешимы, каковы бы ни были их правые части, и тогда их решения единственны;

2) либо однородные уравнения (3) и (4) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $g_1, g_2, \dots, g_n$ соответственно; в этом случае для разрешимости уравнения (1), соответственно уравнения (2), необходимо и достаточно, чтобы

$$g_k(y) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

соответственно

$$f(x_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

при этом общее решение уравнения (1) дается равенством

$$x = x^* + \sum_{k=1}^n c_k x_k,$$

а общее решение уравнения (2) —

$$g = g^* + \sum_{k=1}^n c_k g_k,$$

где x^* (соответственно g^*) — какое-нибудь решение уравнения (1) (уравнения (2)), а $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Следующая ниже теорема показывает, что класс операторов T , для которых имеет место альтернатива Фредгольма, немногим по существу отличается от класса операторов вида $T = I - U$, где U — компактный оператор.

Теорема 1. Каждое из следующих двух условий необходимо и достаточно, чтобы для оператора T имела место альтернатива Фредгольма.

1) Оператор T представим в форме

$$T = W + V,$$

где W — оператор, имеющий двусторонний непрерывный обратный, а V — компактный оператор.

2) Оператор T представим в форме

$$T = W_1 + V_1,$$

где W_1 — оператор, имеющий двусторонний непрерывный обратный, а V_1 — конечномерный оператор.

Доказательство. Очевидно, можно ограничиться доказательством достаточности условия 1) и необходимости условия 2).

Достаточность условия 1). Пусть

$$T = W + V,$$

причем W имеет двусторонний непрерывный обратный W^{-1} , а V компактен. Уравнение (1) эквивалентно в этом случае уравнению

$$W^{-1}T(x) = W^{-1}(y). \quad (5)$$

Далее, существует непрерывный двусторонний обратный оператор $W^{*-1} = (W^{-1})^*$ (XII.2.3), поэтому уравнение (2) равносильно уравнению

$$T^*W^{*-1}(g) = f \quad (6)$$

в том смысле, что если g_0 — решение уравнения (6), то $W^{*-1}(g_0)$ будет решением уравнения (2), а если g'_0 — решение уравнения (2), то $W^*(g'_0)$ будет решением уравнения (6).

Введем обозначение $U = -W^{-1}V$. Принимая во внимание, что $U^* = -V^*(W^{-1})^* = -V^*W^{*-1}$ (см. IX.3.1), мы можем переписать уравнения (5) и (6) в форме

$$x - U(x) = W^{-1}(y), \quad (7)$$

$$g - U^*(g) = f. \quad (8)$$

Поскольку оператор U компактен, для уравнений (7) и (8) справедливо заключение теоремы 1.4. Следовательно, однородные уравнения

$$x - U(x) = 0, \quad (9)$$

$$g - U^*(g) = 0 \quad (10)$$

имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $g'_1, g'_2, \dots, g'_n$. Однородное уравнение (3), очевидно, будет иметь ту же полную систему линейно независимых решений, что и уравнение (9), т. е. $x_1, x_2, \dots, x_n$. Докажем,

что функционалы

$$g_k = W^{*-1}(g'_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

образуют полную систему линейно независимых решений уравнения (4). То, что каждый функционал (11) является решением уравнения (4), вытекает из отмеченной выше эквивалентности уравнений (2) и (6). Функционалы (11) линейно независимы, так

как из соотношения $\sum_{k=1}^n \alpha_k g_k = 0$ вытекает $\sum_{k=1}^n \alpha_k g'_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k W^*(g_k) = 0$, а это возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Наконец, если бы уравнение (4) имело решение g_0 , не являющееся линейной комбинацией функционалов (11), то функционал $W^*(g_0)$ был бы решением уравнения (10), не являющимся линейной комбинацией функционалов $g'_1, g'_2, \dots, g'_n$, что невозможно.

Таким образом, уравнения (3) и (4) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.

Далее, снова по теореме 1.4 уравнение (5), а следовательно, и уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$g'_k(W^{-1}(y)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Это условие в силу (11) эквивалентно следующему:

$$(W^{-1})^*(g'_k)(y) = W^{*-1}(g'_k)(y) = g_k(y) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогично проверяется, что условия

$$f(x_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (2).

Докажем необходимость условия 2). Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $g_1, g_2, \dots, g_n$ — полные системы линейно независимых решений уравнений (3) и (4) соответственно. Пользуясь теоремой V.7.4 и леммой III.3.1, найдем функционалы $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$ и элементы $y_1, y_2, \dots, y_n \in X$ так, что

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

$$g_k(y_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Обозначим $Y' = T(X)$, $Y'' = \mathcal{L}(\{y_1, y_2, \dots, y_n\})$. Каждый элемент $y \in X$ может быть единственным образом представлен в виде

$$y = y' + y'', \quad y' \in Y', \quad y'' \in Y''. \quad (15)$$

Действительно, если положить

$$y'' = \sum_{k=1}^n g_k(y) y_{k1}, \quad y' = y - y''.$$

то в силу (14)

$$g_j(y') = g_j(y) - \sum_{k=1}^n g_k(y) g_j(y_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

так что уравнение $T(x) = y'$ имеет решение и, следовательно, $y' \in Y'$. Единственность представления (15) вытекает из того,

что если $y'' = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \in Y'$, то уравнение $T(x) = y''$ должно иметь решение, и поэтому $g_j(y'') = \alpha_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Обозначим, далее, $X' = N(f_1, f_2, \dots, f_n)$ и $X'' = \mathcal{L}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$. Аналогично предыдущему докажем, что всякий элемент $x \in X$ может быть единственным образом представлен в форме

$$x = x' + x'', \quad x' \in X', \quad x'' \in X''. \quad (16)$$

Построим оператор W_1 , полагая

$$W_1(x) = T(x) + \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k,$$

и докажем, что W_1 осуществляет взаимно однозначное отображение пространства X на себя и, следовательно, имеет двусторонний непрерывный обратный (теорема XII.1.2). В самом деле, пусть y — произвольный элемент из X . Представим его в форме

(15): $y = y' + y''$. При этом $y' \in Y' = T(X)$, $y'' = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \in Y''$, т. е. уравнение $T(x) = y'$ имеет решение x' , которое можно считать элементом из X' *).

Положив

$$x'' = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \quad x^* = x' + x'',$$

и учитывая, что $T(x'') = 0$, $f_j(x') = 0$, а также (13), получим

$$\begin{aligned} W_1(x^*) &= T(x') + T(x'') + \sum_{k=1}^n f_k(x'') y_k = \\ &= T(x') + \sum_{k=1}^n f_k \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right) y_k = y' + \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k = y. \end{aligned}$$

Покажем, что, кроме элемента x^* , других решений уравнения $W_1(x) = y$ не имеет. В самом деле, в противном случае существовал бы такой элемент $x_0 \neq 0$, что

$$W_1(x_0) = 0,$$

*) Действительно, представляя решение x в форме (16): $x = x' + x''$, и принимая во внимание, что $T(x'') = 0$, будем иметь $y' = T(x) = T(x')$.

т. е.

$$T(x_0) + \sum_{k=1}^n f_k(x_0) y_k = 0.$$

При этом $T(x_0) \in Y$, а $\sum_{k=1}^n f_k(x_0) y_k \in Y''$. В силу единственности представления элемента в форме (15), приходим к соотношениям

$$T(x_0) = 0, \quad \sum_{k=1}^n f_k(x_0) y_k = 0, \quad f_k(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

откуда получаем $x_0 = 0$ (так как одновременно $x_0 \in X''$ и $x_0 \in X'$).

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно положить

$$V_1(x) = - \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k.$$

З а м е ч а н и е. Предоставляем читателю доказать, что если в условиях 1) или 2) заменить оператор T оператором T^* , то получатся два условия, также необходимых и достаточных для того, чтобы для оператора T имела место альтернатива Фредгольма.

5.2. Дальнейшее изложение опирается на две простые леммы.

Л е м м а 1. Пусть A и B — непрерывные линейные операторы, отображающие нормированное пространство X в себя. Если эти операторы перестановочны, а оператор $C = AB$ имеет обратный (двусторонний), то операторы A и B также имеют обратные.

Доказательство. Докажем сначала, что операторы A и C^{-1} перестановочны. Действительно, имеем

$$A = C^{-1}CA = C^{-1}ABA = C^{-1}A(AB) = C^{-1}AC.$$

Умножая это соотношение справа на C^{-1} , получим $AC^{-1} = C^{-1}A$.

Далее, используя доказанную перестановочность операторов A и C^{-1} , можем написать

$$B(AC^{-1}) = BAC^{-1} = CC^{-1} = I,$$

$$(AC^{-1})B = C^{-1}AB = C^{-1}C = I,$$

откуда и следует, что существует $B^{-1} = AC^{-1}$. Аналогично доказывается, что существует $A^{-1} = BC^{-1}$.

З а м е ч а н и е. Если оператор C^{-1} непрерывен, то будут непрерывными и операторы A^{-1} и B^{-1} .

Л е м м а 2. Пусть U — непрерывный оператор в пространстве X . Характеристическое множество $\chi(U)$ оператора U и характеристическое множество $\chi(U^m)$ оператора U^m связаны соотношением

$$[\chi(U)]^m \subset \chi(U^m),$$

т. е. если $\lambda \in \chi(U)$, то $\lambda^m \in \chi(U^m)$.

Доказательство. Обозначим $\varepsilon = e^{2\pi i/m}$. Имеем

$$I - \lambda^m U^m = (I - \lambda U)(I - \lambda \varepsilon U) \dots (I - \lambda \varepsilon^{m-1} U).$$

Если $\lambda^m \notin \chi(U^m)$, то, полагая

$$A = I - \lambda U, B = (I - \lambda \varepsilon U) \dots (I - \lambda \varepsilon^{m-1} U), C = I - \lambda^m U^m,$$

будем иметь, что существует непрерывный обратный C^{-1} . Следовательно, на основании замечания к лемме 1 существует непрерывный обратный A^{-1} , т. е. $\lambda \notin \chi(U)$.

5.3. Считая X , как и в 5.1, B -пространством, рассмотрим непрерывный линейный оператор U в X .

Теорема 2. Пусть существует такое натуральное число m , что оператор U^m компактен. Тогда для оператора $T = I - U$ справедлива альтернатива Фредгольма.

Доказательство. Согласно лемме 2 характеристическое множество $\chi(U)$ состоит из изолированных точек, поэтому на единичной окружности комплексной плоскости имеется лишь конечное число точек $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v \in \chi(U)$.

Пусть p пробегает множество всех простых чисел; числа $e^{2\pi i k/p}$, $k = 1, 2, \dots, p-1$,

все различны, поэтому при достаточно большом p_0

$$\lambda_j \neq e^{2\pi i k/p}, \quad p \geq p_0; \quad k = 1, 2, \dots, p-1; \quad j = 1, 2, \dots, v. \quad (17)$$

Можно считать, что m — простое число, причем $m \geq p_0$. Напишем разложение

$$I - U^m = (I - U)(I - \varepsilon U) \dots (I - \varepsilon^{m-1} U) = (I - U)V, \quad (18)$$

где

$$\varepsilon = e^{2\pi i/m}, \quad V = (I - \varepsilon U) \dots (I - \varepsilon^{m-1} U).$$

Вследствие (17) операторы $I - \varepsilon^k U$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) обратимы, и, следовательно, существует непрерывный оператор V^{-1} . Но тогда

$$T = I - U = (I - U^m)V^{-1} = V^{-1} - U^m V^{-1}.$$

Поскольку оператор V^{-1} обратим, а оператор $U^m V^{-1}$ компактен, применима теорема 1.

Доказательство теоремы закончено.

5.4. На операторы рассмотренного в предыдущей теореме вида распространяется теорема о характеристическом множестве компактного оператора (теорема 2). Именно, справедлива

Теорема 3. Если при некотором m оператор U^m компактен, то:

1) характеристическое множество $\chi(U)$ оператора U состоит только из характеристических значений, причем каждое характеристическое значение имеет конечный ранг, а соответствующее собственное подпространство конечномерно;

2) в каждом круге $|\lambda| \leq R$ комплексной плоскости имеется лишь конечное число характеристических значений.

Доказательство. Принимая во внимание результат леммы 2, можно ограничиться доказательством только первого пункта теоремы. При этом первая его часть очевидным образом вытекает из теоремы 2. Следовательно, остается доказать конечность ранга каждого характеристического значения и конечность соответствующего собственного подпространства.

Не умаляя общности, можно считать, что рассматриваемое характеристическое значение $\lambda_0 = 1$. Обозначим $T_m = I - U^m$. На основании (18) можно записать

$$T_m = VT, \quad T = V^{-1}T_m.$$

Поскольку операторы T , T_m , V и V^{-1} перестановочны друг с другом, то

$$T_m^n = V^n T^n, \quad T^n = V^{-n} T_m^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда сразу же следует, что

$$N(T_m^n) = N(T^n). \quad (19)$$

Таким образом, поскольку U^m — компактный оператор, а для таких операторов доказываемое утверждение уже установлено, на основании (19) можно заключить о справедливости этого утверждения и в рассматриваемом случае.

В заключение приведем пример непрерывного линейного оператора U , который сам не является компактным, но имеет компактную степень U^2 .

Пусть X — одно из пространств l^p ($1 \leq p \leq \infty$), с. с. Для $x = \{\xi_n\} \in X$ положим $y = U(x)$, где

$$y = \{\eta_n\}, \quad \eta_n = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетное,} \\ \xi_{n-1}, & n \text{ четное,} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Очевидно, $U^2 = 0$.

Замечание. Поскольку теоремы § 4, доказанные для компактных операторов, использовали лишь те свойства компактных операторов, которые заключены в теореме 1.1 и теореме 3.1, а эти теоремы переносятся на случай операторов рассмотренного выше вида без каких-либо изменений в формулировках, то упомянутые результаты из § 4 также верны, если считать, что лишь некоторая степень оператора U компактна.

§ 6. Применение к интегральным уравнениям

6.1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t) x(t) dt = y(s), \quad (1)$$

предполагая ядро $K(s, t)$ непрерывной в квадрате $[0, 1; 0, 1]$ функцией. Если трактовать интегральное слагаемое как линей-

ный оператор в пространстве $C[0, 1]$, то уравнение (1) оказывается уравнением изученного в предыдущих параграфах типа.

Можно было бы рассматривать интегральное уравнение более общего вида, чем (1), а именно уравнение

$$x(s) - \lambda \int_T K(s, t) x(t) dt = y(s), \quad (1')$$

где T — произвольное замкнутое ограниченное множество в n -мерном евклидовом пространстве (s, t в данном случае означают точки n -мерного пространства). Однако все, что будет доказано для уравнения (1), без каких-либо существенных изменений в доказательствах переносится на уравнение (1'), ввиду чего мы и будем рассматривать более простой случай.

Интегральный оператор U :

$$z = U(x), \quad z(s) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt, \quad (2)$$

рассматриваемый как оператор из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$, имеет норму (см. III.2.4)

$$\|U\| = \max_s \int_0^1 |K(s, t)| dt$$

и является компактным (IX.2.1).

Запишем уравнение (1) в форме

$$x - \lambda U(x) = y. \quad (3)$$

Решение x^* этого уравнения, выражающееся через y по формуле

$$x^* = y + \lambda B_\lambda(y),$$

может быть согласно теореме 4.1 разложено в ряд по степеням:

$$x^* = y + \lambda U(y) + \dots + \lambda^n U^n(y) + \dots, \quad (4)$$

который сходится для всех

$$|\lambda| < \frac{1}{d} = r,$$

где $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|}$, а r есть расстояние от точки $\lambda = 0$ до характеристического множества оператора U (теорема 4.2). Сходимость ряда (4) во всяком случае имеет место для

$$|\lambda| < \frac{1}{\|U\|} = \frac{1}{\max_s \int_0^1 |K(s, t)| dt}.$$

Как было показано в V.3.8, степени оператора U также будут интегральными операторами. Именно:

$$z = U^n(x), \quad z(s) \equiv \int_0^1 K_n(s, t) \dot{x}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где $K_n(s, t)$ — повторные ядра.

Подставляя (5) в (4), получим разложение решения интегрального уравнения (1) в ряд по степеням параметра:

$$x^*(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 K(s, t) y(t) dt + \dots + \lambda^n \int_0^1 K_n(s, t) y(t) dt + \dots$$

При этом ряд сходится равномерно относительно $s \in [0, 1]$.

Поскольку ряд

$$B_\lambda = U + \lambda U^2 + \dots + \lambda^{n-1} U^n + \dots \quad (6)$$

сходится в пространстве операторов из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$, то

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{m+p} \lambda^{j-1} U^j \right\| = \max_s \int_0^1 \left| \sum_{j=m+1}^{m+p} \lambda^{j-1} K_j(s, t) \right| dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, при каждом фиксированном $s \in [0, 1]$ ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(s, t) \quad (7)$$

сходится в пространстве L^1 равномерно относительно $s \in [0, 1]$. Сумма этого ряда — функция $\Gamma(s, t; \lambda)$ — называется *резольвентой* интегрального уравнения (1). Ясно, что

$$B_\lambda(y)(s) = \int_0^1 \Gamma(s, t; \lambda) y(t) dt,$$

в силу чего формулу (4) можно записать еще в виде

$$x^*(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 \Gamma(s, t; \lambda) y(t) dt.$$

Если $|\lambda| < r$, то по теореме 1.3 процесс последовательных приближений для уравнения (3) сходится, а это в применении к интегральному уравнению (1) дает следующий результат: для указанных λ решение уравнения (1) может быть получено как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций $\{x_n(s)\}$, определяемых по рекуррентной формуле

$$x_{n+1}(s) = \lambda \int_0^1 K(s, t) x_n(t) dt + y(s), \quad n = 0, 1, \dots$$

причем $x_0(t)$ — произвольная непрерывная функция.

6.2. Если ядро $K(s, t)$ обращается в нуль при $s < t$, то уравнение (1) можно записать в форме

$$x(s) - \lambda \int_0^s K(s, t) x(t) dt = y(s). \quad (8)$$

Уравнения такого вида называются *интегральными уравнениями Вольтерра*.

Нетрудно проверить, что повторные ядра для уравнения Вольтерра также обращаются в нуль при $s < t$.

Предполагая ядро $K(s, t)$ непрерывным при $0 \leq t \leq s \leq 1$, докажем, что разложение (4) имеет место при всех комплексных λ , т. е. что $r = \infty$. Положим $|K(s, t)| \leq M$. Для $K_n(s, t)$ без труда получаем оценку

$$|K_n(s, t)| \leq \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} M^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Действительно, при $n=1$ эта оценка тривиальна, а если она верна при некотором $n > 1$, то

$$|K_{n+1}(s, t)| \leq$$

$$\leq \int_0^s |K(s, u) K_n(u, t)| dt \leq M \int_0^s \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} M^n du = \frac{s^n}{n!} M^{n+1}.$$

Из (9) получаем

$$\|U^n\| = \max_s \int_0^s |K_n(s, t)| dt \leq M^n \max_s \int_0^s \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{M^n}{(n-1)!},$$

откуда

$$\sqrt[n]{\|U^n\|} \leq M \sqrt[n]{\frac{1}{(n-1)!}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, $r = \infty$ и интегральный оператор типа Вольтерра не имеет характеристических значений.

6.3. Рассмотрим опять уравнение (1). Так как оператор (2) компактен, для уравнения (3) имеет место альтернатива Фредгольма. Это приводит к следующему результату для интегрального уравнения (1).

Теорема 1. Либо уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение, какова бы ни была непрерывная функция $y(s)$, либо уравнение

$$x(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t) x(t) dt = 0 \quad (10)$$

имеет конечное число линейно независимых решений $x_i(s)$,

$x_2(s), \dots, x_n(s)$. При этом уравнение

$$\psi(t) - \bar{\lambda} \int_0^1 \overline{K(s, t)} \psi(s) ds = 0$$

имеет также n линейно независимых непрерывных решений $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$. В последнем случае уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \overline{\psi_h(s)} y(s) ds = 0.$$

Те значения λ , для которых уравнение (10) имеет решения, отличные от нуля, называются *характеристическими значениями* уравнения (1) или ядра $K(s, t)$. Иначе говоря, характеристические значения уравнения (1) не что иное, как характеристические значения оператора U . Поэтому для наименьшего по модулю характеристического значения λ_1 интегрального уравнения справедлива оценка

$$|\lambda_1| = R = \frac{1}{d} \geq \frac{1}{\|U\|} = \frac{1}{\max \int_0^1 |K(s, t)| dt} \geq \frac{1}{\max_{s, t} |K(s, t)|}.$$

Используя зависимость решения уравнения (3) от λ , мы на основании теоремы 4.5 приходим к следующему результату.

Теорема 2. В окрестности характеристического значения решение λ_0 уравнения (1) может быть представлено в форме

$$x^*(s) = \frac{y_{-r}(s)}{(\lambda - \lambda_0)^r} + \dots + \frac{y_{-1}(s)}{\lambda - \lambda_0} + y_0(s) + \dots \\ \dots + y_n(s)(\lambda - \lambda_0)^n + \dots,$$

где $y_k(s)$ ($k = -r, \dots, 0, \dots$) — непрерывные функции, зависящие только от y . Ряд в правой части сходится равномерно относительно $s \in [0, 1]$.

Таким образом, $x^*(s)$ при каждом фиксированном $s \in [0, 1]$ является мероморфной функцией λ с полюсами в характеристических значениях.

6.4. Рассмотрим теперь пространство $L^p(D)$, где D — ограниченная область n -мерного пространства, и интегральное уравнение в нем

$$x(s) - \lambda \int_D K(s, t) x(t) dt = y(s), \quad s \in D. \quad (41)$$

Пусть ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условиям теоремы XI.3.3 (с $q = p$), т. е.

$$1) \left\{ \int_D |K(s, t)|^r dt \right\}^{1/r} \leq C_1 \quad (s \in D);$$

$$2) \left\{ \int_D |K(s, t)|^s ds \right\} \leq C_2 \quad (t \in D);$$

$$3) p - r(p - 1) < \sigma < p.$$

Тогда по цитированной выше теореме интегральный оператор U с ядром $K(s, t)$ будет компактным оператором из $L^p(D)$ в $L^p(D)$ с нормой $\|U\| \leq C_1^{1-\sigma/p} C_2^{\sigma/p}$ и, следовательно, к уравнению (11) применимо все сказанное выше по поводу уравнения (1).

В частности, если ядро $K(s, t)$ типа потенциала, т. е. если

$$K(s, t) = \frac{B(s, t)}{|s - t|^m},$$

где $B(s, t)$ — ограниченная непрерывная при $s \neq t$ функция, а $m < n$, то указанные выше условия будут выполнены (теорема XI.3.6).

Если, кроме того, $B(s, t)$ — непрерывная функция и

$$p > \frac{n}{n - m},$$

то по теореме XI.3.7 оператор U будет отображать $L^p(D)$ в $C(D)$, так что в этом случае степенные ряды, представляющие решения $x^*(s)$ в окрестности характеристического значения или в окрестности нулевой точки, будут сходиться равномерно.

Подобные формулировки предоставляем читателю.

§ 7. Инвариантные подпространства компактного оператора. Проблема аппроксимации

Рубеж 1960—1970-х годов ознаменовался рядом крупных открытий в теории B -пространств. Одним из них является характеристика гильбертовых пространств, данная Линденштраусом и Цафрири (см. теорему V.3.3). Здесь мы остановимся еще на двух важных результатах. (С современным состоянием теории B -пространств в целом можно познакомиться по монографии Линденштраусс, Цафрири.)

7.1. Пусть X — B -пространство, U — непрерывный линейный оператор в X . Замкнутое линейное множество $E \subset X$ называется *инвариантным* подпространством оператора U , если $U(E) \subset E$. Очевидно, что $\{0\}$ и X — инвариантные подпространства. Инвариантное подпространство E называется *нетривиальным*, если $E \neq X, \{0\}$. Наличие у оператора собственного вектора означает,

что оператор обладает одномерным инвариантным подпространством. Однако даже компактный оператор может не иметь ни одного собственного вектора.

Примером тому является интегральный оператор типа Вольтерра (см. 6.2). Но этот оператор имеет много инвариантных подпространств. Например, при любом $a \in (0, 1)$ совокупность всех функций $x \in C[0, 1]$, которые равны нулю в интервале $[0, a]$, представляет собой такое подпространство.

В 1935 году Дж. фон Нейман доказал существование нетривиального инвариантного подпространства у любого ненулевого компактного оператора в гильбертовом пространстве*). Недавно В. И. Ломоносовым [1] было получено простое доказательство более общего факта (мы приведем вариант доказательства, предложенный Хилдемом).

Пусть U — компактный оператор в бесконечномерном B -пространстве X . Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех операторов, коммутирующих с U , т. е. множество всех $T \in B(X, X)$ таких, что $TU = UT$. Очевидно, что $\mathfrak{A}$ — линейное подмножество в $B(X, X)$, и если $T_1, T_2 \in \mathfrak{A}$, то $T_1 T_2 \in \mathfrak{A}$.

Теорема 1 (Ломоносов). *Существует подпространство E в X , которое является нетривиальным инвариантным подпространством для всех операторов $T \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Так как $U \neq 0$, то можно считать, что $\|U\| = 1$. Кроме того, найдется элемент $x_0 \in X$ такой, что

$$\|x_0\| > 1, \quad \|U(x_0)\| > 1. \quad (1)$$

Пусть B — открытый единичный шар с центром в x_0 . Так как оператор U компактен, то $K = \overline{U(B)}$ — компакт. Любую $x \in B$ представим в виде $x = x_0 + z$, где $\|z\| < 1$. Если $y = U(x)$, то $y = U(x_0) + U(z)$ и $\|U(z)\| \leq 1$. Следовательно,

$$\|y\| \geq \|U(x_0)\| - \|U(z)\| \geq \|U(x_0)\| - 1 = \delta > 0,$$

откуда для любого $y \in K$ имеем

$$\|y\| \geq \delta > 0, \quad (2)$$

где δ не зависит от y . Рассмотрим два случая.

а) Пусть оператор U имеет ненулевое собственное число λ . Обозначим через N_λ соответствующее λ собственное подпространство. Покажем, что N_λ является инвариантным подпространством для любого $T \in \mathfrak{A}$ (очевидно, что $N_\lambda \neq X$, так как U компактен). Если $x \in N_\lambda$, то

$$U(T(x)) = T(U(x)) = T(\lambda x) = \lambda T(x),$$

откуда $T(x) \in N_\lambda$.

*) Этот результат Неймана был опубликован в статье Ароншайна и Смита [1], где он был обобщен на B -пространства.

b) Далее считаем, что оператор U не имеет собственных чисел, а тогда спектр $\sigma(U) = \{0\}$. Следовательно, спектральный радиус оператора U равен нулю, а тогда в силу 4.1 при любом λ

$$\|\lambda^n U^{n+1}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3)$$

Допустим, что пет нетривиального подпространства, инвариантного для всех $T \in \mathfrak{A}$. Для произвольного $x \in X$, $x \neq 0$, рассмотрим подпространство L_x , равное замыканию множества $L'_x = \{T(x) : T \in \mathfrak{A}\}$. Так как $\mathfrak{A}$ — линейное множество, то множество L'_x линейно. Если $y \in L'_x$, то $y = T_0(x)$, $T_0 \in \mathfrak{A}$. Для любого $T \in \mathfrak{A}$ имеем $TT_0 \in \mathfrak{A}$, откуда $T(y) = (TT_0)(x) \in L'_x$. Отсюда и из непрерывности всех операторов из $\mathfrak{A}$ вытекает, что подпространство L_x инвариантно для любого оператора из $\mathfrak{A}$.

Так как тождественный оператор I принадлежит $\mathfrak{A}$, то $x \in L'_x$, откуда $L_x \neq \{0\}$. Так как мы предположили, что не существует нетривиального инвариантного подпространства, то $L_x = X$ при любом $x \neq 0$, откуда $L'_x \cap B$ непусто.

Следовательно, для любого $x \neq 0$ существует $T \in \mathfrak{A}$, для которого $T(x) \in B$, откуда

$$\bigcup_{T \in \mathfrak{A}} T^{-1}(B) = X \setminus \{0\}.$$

В силу (2) $K \subset X \setminus \{0\}$, откуда $\{T^{-1}(B) : T \in \mathfrak{A}\}$ — открытое покрытие компакта K . Выберем из него конечное покрытие:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m T_i^{-1}(B).$$

Возьмем точку x_0 , выбранную в начале доказательства (напомним, что x_0 удовлетворяет (1)). Так как $U(x_0) \in U(B) \subset K$, то найдется $i_1 (1 \leq i_1 \leq m)$, для которого $U(x_0) \in T_{i_1}^{-1}(B)$. Тогда

$$x_1 = T_{i_1}(U(x_0)) \in B.$$

Аналогично, найдется $i_2 (1 \leq i_2 \leq m)$, для которого

$$x_2 = T_{i_2}(U(x_1)) \in B,$$

и т. д. Получим последовательность $\{x_n\} \subset B$ такую, что

$$x_n = T_{i_n} U T_{i_{n-1}} U T_{i_{n-2}} \dots T_{i_1} U(x_0).$$

Учитывая перестановочность операторов T_i с U , имеем

$$x_n = T_{i_n} T_{i_{n-1}} T_{i_{n-2}} \dots T_{i_1} U^n(x_0).$$

Применим к x_n оператор U :

$$z_n = U(x_n) = T_{i_n} T_{i_{n-1}} T_{i_{n-2}} \dots T_{i_1} U^{n+1}(x_0) \in K.$$

В силу (2)

$$\|z_n\| \geq \delta > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Теперь оценим $\|z_n\|$ по-другому. Положим $\lambda = \max \{\|T_i\|: 1 \leq i \leq n\}$. Имеем

$$\|z_k\| \leq \prod_{j=1}^n \|T_{i_j}\| \|U^{n+1}\| \|x_0\| \leq \|\lambda^n U^{n+1}\| \|x_0\|. \quad (5)$$

В силу (3) получаем, что правая часть в (5) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, что противоречит (4). Это противоречие и доказывает теорему. Из доказанной теоремы получаем, в частности, что сам оператор U имеет нетривиальное инвариантное подпространство, т. е. старый результат Неймана.

Как мы видели, задача о том, что операторы некоторого класса имеют нетривиальные инвариантные подпространства, весьма непроста. Однако сложной является и противоположная задача нахождения непрерывного линейного оператора, действующего в сепарабельном банаховом пространстве без нетривиальных инвариантных подпространств.

7.2. Как мы убедились в этой главе, компактные операторы по своим свойствам весьма близки к конечномерным. Это побудило А. Гротендика [2] дать следующее определение.

Говорят, что B -пространство X обладает *свойством аппроксимации*, если любой компактный оператор U из любого B -пространства Y в X есть предел последовательности конечномерных операторов по норме пространства $B(Y, X)$. Это условие эквивалентно тому, что для любого компакта K в X и любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечномерный оператор $T \in B(X, X)$ такой, что

$$\|Tx - x\| < \varepsilon, \quad x \in K.$$

Гротендик поставил вопрос, любое ли B -пространство обладает свойствами аппроксимации. Он же доказал, что положительное решение этого вопроса, называемого проблемой аппроксимации, эквивалентно выполнению ряда весьма конкретных предложений. Например, такому. Если $K(s, t)$ — непрерывная функция на квадрате $[0, 1; 0, 1]$ и

$$\int_0^1 K(s, t) K(t, u) dt = 0 \quad \text{для всех } s, u \in [0, 1],$$

то

$$\int_0^1 K(t, t) dt = 0.$$

Еще раньше была поставлена проблема базиса (см. Бапах), которая заключается в следующем.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ элементов B -пространства X является *базисом* *) в X , если каждый элемент $x \in X$ однозначно раскладывается в ряд

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n,$$

сходящийся по норме пространства X .

Очевидно, что пространство с базисом обязательно сепарабельно. Полная ортонормальная система в сепарабельном гильбертовом пространстве (см. IV.5.8) является базисом. Базисы имеются в пространствах $L^p(0, 1)$ и l^p , $1 \leq p < \infty$, $C[0, 1]$. Например, в l^p базисом, очевидно, является последовательность ортов, т. е. элементов $x_n = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\xi_n = 1$, $\xi_k = 0$ ($k \neq n$).

Вопрос, будет ли любое сепарабельное B -пространство иметь базис, и составлял проблему базиса. Несложно показать, что всякое пространство с базисом обладает свойством аппроксимации.

Обе приведенные проблемы оставались долгое время нерешенными. Лишь в 1972 году шведский математик П. Энфло построил замечательный пример, отрицательно решивший сразу проблемы базиса и аппроксимации (см. Энфло [1]). А именно: он построил пример сепарабельного рефлексивного B -пространства без свойства аппроксимации, а следовательно, и без базиса. Подробнее об этой проблематике см. статью Пелчинского и Фигеля [1].

В 1975 году А. Шанковский построил пример сепарабельного рефлексивного БФП без свойства аппроксимации.

*) Понятие базиса введено Шаудером [1]. Подробнее о базисах см. Зингер.

Г л а в а XIV

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ

Для приближенного решения задач математического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, граничных задач математической физики, конформного отображения и других предложено и фактически применяется большое число методов, основанных на различных идеях. Так, для граничных задач применяются вариационные и подобные им методы (Ритца, Галеркина, метод моментов, метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям), разностные методы, интерполяционные методы. Для суждения об эффективности и обоснованности применения этих методов необходимо их теоретическое исследование, при котором в порядке возрастающей точности и трудности встают следующие три вопроса:

- а) установление осуществимости и сходимости алгоритма;
- б) исследование быстроты сходимости;
- в) эффективная оценка погрешности.

Решение этих вопросов проводилось для каждого класса уравнений и каждого из методов своим путем и часто представляло значительную трудность, в ряде случаев не преодоленную до настоящего времени.

Важной является задача объединения этих исследований и построения единой теории приближенных методов. Естественный подход к решению этого вопроса дает использование идей функционального анализа.

В этой главе мы рассмотрим построение теории приближенных методов для некоторого класса линейных уравнений. В этой теории мы будем рассматривать точное и приближенное уравнения в различных, разумеется, связанных определенным образом, пространствах, как это фактически имеет место во многих конкретных методах, например, при приближенной замене интегрального уравнения конечной системой линейных алгебраических уравнений. Впрочем, как будет показано, всегда можно свести дело к тому случаю, когда аппроксимирующее пространство является подпространством того пространства, в котором задано точное уравнение.

В дальнейшем будут доказаны теоремы двоякого рода: теоремы, позволяющие на основании данных о точном уравнении уста-

новить разрешимость «приближенного» уравнения и сходимость приближенного решения к точному, и наоборот, теоремы, дающие на основании результатов приближенного решения сведения о разрешимости точного уравнения и близости обоих решений.

Результаты этой главы при несколько иных предположениях принадлежат Л. В. Канторовичу (см. Канторович [9]). Некоторые теоремы § 1 уточнены по сравнению с указанным изложением Г. П. Акиловым. Другие построения теории приближенных методов, использующие аппарат функционального анализа, имеются в работах С. Г. Михлина, М. А. Красносельского, Н. И. Польского, Т. М. Вайникко, М. К. Гавурина и др. См. Вайникко — I, II; Гавурин; Красносельский и др.; Красносельский [1]; Михлин — II.

§ 1. Общая теория для уравнений второго рода

1.1. Пусть X — нормированное пространство, а $\bar{X}$ — его полное подпространство*). Предположим, что существует непрерывный линейный оператор P , проектирующий пространство X на $\bar{X}$, т. е. такой, что

$$P(X) = \bar{X}, \quad P^2 = P.$$

Ясно, что оператор P не меняет элементов из $\bar{X}$.

Пусть, например, $X = C[a, b]$, $\bar{X}$ — совокупность полиномов степени не выше $(n-1)$ -й. Оператор P сопоставляет непрерывной функции $x \in C[a, b]$ ее интерполяционный полином, построенный по заранее заданной системе узлов $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Рассмотрим, далее, два уравнения: первое в пространстве X —

$$Kx = x - \lambda Nx = y, \quad (1)$$

и второе в пространстве $\bar{X}$ —

$$K\tilde{x} = \tilde{x} - \lambda N\tilde{x} = Py. \quad (2)$$

Здесь N есть непрерывный линейный оператор в X , N — непрерывный линейный оператор в $\bar{X}$. Уравнение (1) будем называть *точным*, а уравнение (2) — *приближенным* (соответствующим точному уравнению (1)).

Пространства X и $\bar{X}$ и операторы N и N в дальнейшем будем связывать следующими условиями.

I. (Условие близости операторов N и N .) Для любого $\tilde{x} \in \bar{X}$

$$\|PN\tilde{x} - N\tilde{x}\| \leq \eta \|\tilde{x}\|.$$

Последнее соотношение равносильно такому:

$$\|PK\tilde{x} - K\tilde{x}\| \leq |\lambda| \eta \|\tilde{x}\|, \quad \tilde{x} \in \bar{X}.$$

II. (Условие хорошей аппроксимации элементов вида Nx элементами из $\bar{X}$.) Для всякого $x \in X$ найдется $\tilde{x} \in \bar{X}$, так что

$$\|Nx - \tilde{x}\| \leq \eta_1 \|x\|.$$

*) Само пространство X не предполагается полным.

III. (Условие хорошей аппроксимации свободного члена точного уравнения.) Существует элемент $\tilde{y} \in X$ такой, что

$$\|y - \tilde{y}\| \leq \eta_2 \|y\|.$$

В отличие от предыдущих условий, η_2 здесь, вообще говоря, зависит от y .

1.2. Для уравнений, удовлетворяющих перечисленным условиям (или некоторым из них), мы докажем ряд теорем, связывающих точное и приближенное уравнения.

Теорема 1 (о разрешимости приближенного уравнения). Пусть выполнены условия I и II и оператор K имеет непрерывный обратный (двусторонний). Тогда, если

$$q = |\lambda| [\eta + \|I - P\| \eta_1] \|K^{-1}\| < 1, \quad (3)$$

то оператор $\tilde{K}$ также имеет непрерывный обратный $\tilde{K}^{-1}$. При этом

$$\|\tilde{K}^{-1}\| \leq \frac{\|K^{-1}\|}{1 - q}. \quad (4)$$

Доказательство. Предположим сначала, что пространство X полное. Рассмотрим оператор $K_1 = I - \lambda P H$. Для произвольного элемента $x \in X$ построим $\tilde{x} \in X$ согласно условию II так, что

$$\|Hx - \tilde{x}\| \leq \eta_1 \|x\|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|(K - K_1)x\| &= |\lambda| \|Hx - PHx\| = |\lambda| \|Hx - \tilde{x} + P\tilde{x} - PH\tilde{x}\| = \\ &= |\lambda| \|(I - P)(Hx - \tilde{x})\| \leq |\lambda| \|I - P\| \eta_1 \|x\|. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности элемента x доказано, что

$$\|K - K_1\| \leq |\lambda| \|I - P\| \eta_1.$$

Оператор K_1 может быть представлен в виде

$$K_1 = K(I - K^{-1}(K - K_1)), \quad (5)$$

причем для оператора $K^{-1}(K - K_1)$ выполняется оценка

$$\|K^{-1}(K - K_1)\| \leq |\lambda| \|I - P\| \eta_1 \|K^{-1}\| \leq q < 1.$$

По теореме Банаха (теорема V.4.3) существует обратный оператор $(I - K^{-1}(K - K_1))^{-1}$ и

$$\|(I - K^{-1}(K - K_1))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - |\lambda| \|I - P\| \eta_1 \|K^{-1}\|}.$$

Из представления (5) следует теперь, что оператор K_1 обратим, $K_1^{-1} = (I - K^{-1}(K - K_1))^{-1} K^{-1}$, и потому

$$\|K_1^{-1}\| \leq \frac{\|K^{-1}\|}{1 - |\lambda| \|I - P\| \eta_1 \|K^{-1}\|}. \quad (6)$$

В пространстве X рассмотрим оператор $K_1 \tilde{x} = \tilde{x} - \lambda PH\tilde{x}$. Очевидно, для любого $\tilde{x} \in X$ $K_1 \tilde{x} = K_1 \tilde{x}$. Оператор K_1 обладает еще и тем свойством, что если $\tilde{y} \in X$, то $K_1^{-1} \tilde{y} \in \tilde{X}$. Действительно, если $x' = K_1^{-1} \tilde{y}$, то $x' - PHx' = \tilde{y}$, $x' = \tilde{y} + PHx' \in X$. Поэтому оператор K_1 имеет непрерывный обратный, совпадающий с K_1^{-1} на $\tilde{X}$, и

$$\|\tilde{K}_1^{-1}\| \leq \|K_1^{-1}\|. \quad (7)$$

Оценим теперь разность $\tilde{K} - K_1$. По условию 1 для любого $\tilde{x} \in X$

$$\|\tilde{K}\tilde{x} - K_1\tilde{x}\| = |\lambda| \|PH\tilde{x} - H\tilde{x}\| \leq |\lambda| \eta \|\tilde{x}\| \quad (8)$$

и тем самым

$$\|\tilde{K} - K_1\| \leq |\lambda| \eta. \quad (9)$$

Поэтому согласно (7), (6) и (9)

$$\begin{aligned} \|\tilde{K}_1^{-1}\| \|\tilde{K} - K_1\| &\leq \\ &\leq \frac{\|K^{-1}\| |\lambda| \eta}{1 - |\lambda| \|I - P\| \eta_1 \|K^{-1}\|} = 1 - \frac{1 - q}{1 - |\lambda| \|I - P\| \eta_1 \|K^{-1}\|} < 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Записывая оператор $\tilde{K}$ в форме $\tilde{K} = \tilde{K}_1(I - \tilde{K}_1^{-1}(\tilde{K}_1 - \tilde{K}))$ и опять применяя теорему Банаха, мы докажем существование обратного оператора $\tilde{K}^{-1}$ и оценку

$$\|\tilde{K}^{-1}\| \leq \frac{\|\tilde{K}_1^{-1}\|}{1 - \|\tilde{K}_1^{-1}\| \|\tilde{K} - \tilde{K}_1\|} \leq \frac{(1 - |\lambda| \|I - P\| \eta_1 \|K^{-1}\|) \|K_1^{-1}\|}{1 - q} \leq \frac{\|K^{-1}\|}{1 - q}. \quad (11)$$

Этим в случае полного пространства X теорема доказана.

Случай неполного пространства X легко сводится к уже рассмотренному. Действительно, если ввести пополнение пространства X , то замыкания (см. теорему V.8.2) операторов K и K^{-1} будут взаимно обратны, а замыкание оператора H будет также связано с оператором $\tilde{H}$ условиями I и II с той же самой постоянной η и новой постоянной η_1 , сколь угодно близкой к старой.

1.3. Решение приближенного уравнения (2) естественно рассматривать как приближенное решение точного уравнения (1). Оценка погрешности этого приближенного решения устанавливается в следующей теореме.

Теорема 2 (об оценке погрешности приближенного решения). Если выполнены условия I, II и III, существует непрерывный оператор $\tilde{K}^{-1}$ (в частности, если выполнены условия теоремы 1) и уравнение (1) имеет решение x^* , то справедлива оценка

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq p \|x^*\|, \quad (12)$$

где $\tilde{x}^*$ — решение уравнения (2), а

$$p = 2|\lambda|\eta\|K^{-1}\| + (\eta_1|\lambda| + \eta_2\|K\|)(1 + \|K^{-1}PK\|). \quad (13)$$

Доказательство. Покажем, прежде всего, что условия теоремы позволяют аппроксимировать элемент x^* элементом из $\tilde{X}$ с точностью порядка $\eta_1 + \eta_2$. Точнее говоря, докажем, что существует элемент $\tilde{x} \in \tilde{X}$ такой, что

$$\|x^* - \tilde{x}\| \leq \varepsilon \|x^*\|, \quad (14)$$

где

$$\varepsilon = \min [1, \eta_1|\lambda| + \eta_2\|K\|]. \quad (15)$$

Действительно, выбирая $\tilde{y} \in \tilde{X}$ и $\tilde{z} \in \tilde{X}$ на основании II и III так, чтобы

$$\|Hx^* - \tilde{z}\| \leq \eta_1\|x^*\|, \quad \|y - \tilde{y}\| \leq \eta_2\|y\| \leq \eta_2\|K\|\|x^*\|,$$

и полагая $\tilde{x} = \lambda\tilde{z} + \tilde{y}$, будем иметь

$$\|x^* - \tilde{x}\| = \|\lambda Hx^* + y - (\lambda\tilde{z} + \tilde{y})\| \leq (\eta_1|\lambda| + \eta_2\|K\|)\|x^*\|.$$

С другой стороны, (14) выполнено при $\varepsilon = 1$; если положить $\tilde{x} = 0$. Отсюда и следует, что в качестве ε можно взять (15).

Перейдем теперь к доказательству неравенства (12). Обозначив $\tilde{x}_0 = K^{-1}PK\tilde{x}$, будем иметь

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq \|x^* - \tilde{x}\| + \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| + \|\tilde{x}_0 - \tilde{x}^*\|. \quad (16)$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Оценка первого слагаемого уже имеется — (14). Второе слагаемое оценивается так: на основании условия I

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| &= \|K^{-1}K\tilde{x} - K^{-1}PK\tilde{x}\| \leq \|K^{-1}\|\|K\tilde{x} - PK\tilde{x}\| \leq \\ &\leq |\lambda|\eta\|K^{-1}\|\|\tilde{x}\|. \end{aligned} \quad (17)$$

Но по (14)

$$\|\tilde{x}\| \leq \|x^*\| + \|x^* - \tilde{x}\| \leq (1 + \varepsilon)\|x^*\|.$$

Подставляя это в (17), получим окончательно

$$\|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| \leq |\lambda|\eta(1 + \varepsilon)\|K^{-1}\|\|x^*\|. \quad (18)$$

Учитывая, что $\tilde{x}^*$ — решение уравнения (2) и, следовательно,

$$\tilde{x}^* = K^{-1}PKx^*,$$

оценим последнее слагаемое в (16). Имеем в силу (14)

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_0 - \tilde{x}^*\| &= \|K^{-1}PK\tilde{x} - K^{-1}PKx^*\| \leq \\ &\leq \|K^{-1}PK\|\|\tilde{x} - x^*\| \leq \varepsilon\|K^{-1}PK\|\|x^*\|. \end{aligned}$$

Сопоставляя это с (14) и (18), приходим к оценке

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq [|\lambda|\eta(1 + \varepsilon)\|K^{-1}\| + \varepsilon(1 + \|K^{-1}PK\|)]\|x^*\|. \quad (19)$$

Остается заметить, что $1 + \varepsilon \leq 2$ и $\varepsilon \leq \eta_1|\lambda| + \eta_2\|K\|$. Теорема доказана.

Замечание 1. Может оказаться, что возможность аппроксимации элемента x^* элементом из X удастся установить непосредственно, а не на основании II и III. В этом случае по-прежнему можно использовать неравенство (19). При этом, естественно, нет надобности предполагать, что выполнены условия II и III.

Полезно еще отметить, что в этом случае речь идет о приближении конкретного элемента x^* и ε может зависеть от него, тогда как в условии II η_1 предполагается не зависящим от x .

Замечание 2. На основании теоремы 2 легко получить оценку близости приближенного решения к точному, не использующую данных, относящихся к точному решению. Имейно, в условиях теоремы 2, если при этом $p < 1$, справедлива оценка

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq \frac{p}{1-p} \|\tilde{x}^*\|. \quad (20)$$

Действительно,

$$\|x^*\| \leq \|\tilde{x}^*\| + \|x^* - \tilde{x}^*\|.$$

Учитывая это в неравенстве (12), получаем

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq p \|\tilde{x}^*\| + p \|x^* - \tilde{x}^*\|,$$

а решая последнее неравенство относительно $\|x^* - \tilde{x}^*\|$, приходим к (20).

1.4. Пусть теперь имеется последовательность приближенных уравнений и полученных с их помощью приближенных решений. В этом случае пространство X , а также операторы $H(K)$, P и постоянные η , η_1 , η_2 , q , p , ε , ... зависят от индекса n , который, однако, мы для простоты обозначений опускаем.

В следующей ниже теореме даются условия сходимости последовательности $\{\tilde{x}_n^*\}$ приближенных решений к точному решению.

Теорема 3. Если выполнены условия:

1) оператор K имеет непрерывный обратный;

2) при каждом $n = 1, 2, \dots$ выполнены условия I, II, III,

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_1 \|P\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_2 \|P\| = 0, \quad (21)$$

то при достаточно больших n приближенные уравнения разрешимы и имеет место сходимость последовательности приближенных решений к точному:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^* - \tilde{x}_n^*\| = 0.$$

Точнее,

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| \leq Q_0 \eta + Q_1 \eta_1 \|P\| + Q_2 \eta_2 \|P\|, \quad (22)$$

где Q_0 , Q_1 , Q_2 — некоторые постоянные.

Доказательство. Так как $\|P\| \geq 1$, то из (21) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_1 = 0$, и поэтому для достаточно больших n в теореме 1

будет $q < 1/2$. Таким образом, для указанных n существует непрерывный оператор $\tilde{K}^{-1}$, причем

$$\|\tilde{K}^{-1}\| \leq \frac{\|K^{-1}\|}{1-q} < 2\|K^{-1}\|.$$

Отсюда видно, что $\|K^{-1}\|$ ограничена независимо от n . Учитывая это, на основании оценки (12) в теореме 2 придем к (22).

Замечание. Если вместо (12) использовать в доказательстве оценку (19), то получим, что

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| \leq Q'\eta + Q''\varepsilon\|P\| \quad (23)$$

и условия сходимости (21) заменяются условиями

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon\|P\| = 0. \quad (24)$$

При этом условие III оказывается излишним (условие II необходимо, так как используется в теореме 1; впрочем, условие $\eta_1\|P\| \rightarrow 0$ можно заменить требованием $q \leq q_0 < 1$ при достаточно больших n).

1.5. Теорема 1 дает возможность на основании разрешимости точного уравнения судить о разрешимости приближенного. Следующая ниже теорема позволяет делать обратное заключение.

Теорема 4. Если оператор K имеет непрерывный обратный, выполнены условия I и II и

$$r = |\lambda|\eta_1(1 + |\lambda|\eta_1)\|K^{-1}\| + |\lambda|\eta_1(1 + \|K^{-1}PK\|) < 1, \quad (25)$$

то оператор K имеет непрерывный левый обратный, норма которого оценивается с помощью неравенства

$$\|K^{-1}\| \leq \frac{1 + \|\tilde{K}^{-1}P\| + |\lambda|\eta_1\|\tilde{K}^{-1}\| + \|\tilde{K}^{-1}PK\|}{1-r}. \quad (26)$$

Доказательство. Пусть x^* — произвольный отличный от нулевого элемент пространства X . Он очевидно, является решением уравнения

$$Kx = Kx^*.$$

По условию II найдем элемент $\tilde{x} \in X$ такой, что

$$\|Hx^* - \tilde{x}\| \leq \eta_1\|x^*\|.$$

Так как $x^* = \lambda Hx^* + Kx^*$, то

$$\|x^* - \lambda\tilde{x}\| \leq |\lambda|\eta_1\|x^*\| + \|Kx^*\| = \left(|\lambda|\eta_1 + \frac{\|Kx^*\|}{\|x^*\|}\right)\|x^*\|.$$

Это неравенство позволяет применить теорему 2 (в форме замечания 1 к ней) со значением

$$\varepsilon = |\lambda|\eta_1 + \frac{\|Kx^*\|}{\|x^*\|}. \quad (27)$$

Так как приближенное уравнение для рассматриваемого точного есть

$$\tilde{K}\tilde{x} = PKx^*,$$

решение которого $\tilde{x}^* = \tilde{K}^{-1}PKx^*$, то, заменяя в (19) $\tilde{x}$ его значением (27), получаем

$$\begin{aligned} \|x^* - \tilde{K}^{-1}PKx^*\| &\leq \left[|\lambda| \eta \left(1 + |\lambda| \eta_1 + \frac{\|Kx^*\|}{\|x^*\|} \right) \right] \|\tilde{K}^{-1}\| + \\ &\quad + \left(|\lambda| \eta_1 + \frac{\|Kx^*\|}{\|x^*\|} \right) (1 + \|\tilde{K}^{-1}PK\|) \|x^*\| = \\ &= [|\lambda| \eta (1 + |\lambda| \eta_1) \|\tilde{K}^{-1}\| + |\lambda| \eta_1 (1 + \|\tilde{K}^{-1}PK\|)] \|x^*\| + \\ &\quad + [|\lambda| \eta \|\tilde{K}^{-1}\| + 1 + \|\tilde{K}^{-1}PK\|] \|Kx^*\|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|x^*\| &\leq \|x^* - \tilde{K}^{-1}PKx^*\| + \|\tilde{K}^{-1}P\| \|Kx^*\| \leq \\ &\leq r \|x^*\| + [1 + \|\tilde{K}^{-1}P\| + |\lambda| \eta \|\tilde{K}^{-1}\| + \|\tilde{K}^{-1}PK\|] \|Kx^*\|, \end{aligned}$$

или

$$\|Kx^*\| \geq \frac{1-r}{1 + \|\tilde{K}^{-1}P\| + |\lambda| \eta \|\tilde{K}^{-1}\| + \|\tilde{K}^{-1}PK\|} \|x^*\| = Q \|x^*\|.$$

Поскольку $r < 1$, то $Q > 0$, и на основании сказанного в V.4.4 теорема доказана.

Следствие. Если оператор K удовлетворяет условию:

(А) Из единственности решения уравнения (1) следует его разрешимость при любой правой части;
то в условиях теоремы существует двусторонний непрерывный обратный оператор K^{-1} .

1.6. Если условие III выполнено лишь с большой константой η_2 , т. е. если правая часть уравнения (1) не допускает хорошей аппроксимации элементами из X , то и решение x^* не допускает хорошей аппроксимации и приближенное решение $\tilde{x}^*$ будет заведомо плохим.

В этом случае оказывается целесообразной «регуляризация» свободного члена. В уравнении (1) сделаем замену неизвестной $x = y + z$. Новое уравнение (относительно z) будет

$$Kz = y', \quad y' = \lambda Ny. \quad (28)$$

Правая часть этого уравнения уже «регулярна» в силу условия II.

Приближенным по отношению к уравнению (28) будет уравнение

$$\tilde{K}z = \lambda PNy. \quad (29)$$

Обозначая через $\tilde{z}^*$ решение этого уравнения, естественно в качестве приближенного решения (1) рассмотреть элемент

$$x' = y + \tilde{z}^*. \quad (30)$$

Так как

$$\|x^* - x'\| = \|z^* - \tilde{z}^*\|,$$

где z^* означает решение уравнения (28), то оценка погрешности приближенного решения (30) может быть найдена на основании теоремы 2 — в ка-

честве η_2 следует при этом взять $|\lambda|\eta_1^*$. Однако непосредственное рассмотрение данного случая позволяет получить более точную оценку.

Теорема 5. Если выполнены условия I и II и существует непрерывный обратный оператор K^{-1} и решение x^* уравнения (1), то справедлива оценка

$$\|x^* - x'\| \leq p' \|x^*\|, \quad (31)$$

где

$$p' = |\lambda| [\eta_1 (1 + \|K^{-1}PK\|) + |\lambda|\eta_1 \|K^{-1}\| (\|H\| + \eta_1)]. \quad (32)$$

Доказательство. Поскольку

$$z^* = \lambda H z^* + \lambda H y = \lambda H x^*, \quad (33)$$

по условию II можно найти такой элемент $\bar{z} \in X$, что

$$\|z^* - \bar{z}\| \leq |\lambda|\eta_1 \|x^*\|. \quad (34)$$

Обозначим

$$\bar{z}_0 = K^{-1}PK\bar{z}.$$

Тогда, так как

$$K\bar{z}^* = PK\bar{z}^*,$$

то

$$\bar{z}^* = K^{-1}PK\bar{z}^*,$$

откуда

$$\|\bar{z}^* - \bar{z}_0\| \leq \|K^{-1}PK\| \|\bar{z}^* - \bar{z}\| \leq |\lambda|\eta_1 \|K^{-1}PK\| \|x^*\|. \quad (35)$$

Далее, в силу условия I, (34) и (33)

$$\begin{aligned} \|\bar{z} - \bar{z}_0\| &\leq \|K^{-1}\| \|K\bar{z} - PK\bar{z}\| \leq |\lambda|\eta_1 \|K^{-1}\| \|\bar{z}\| \leq \\ &\leq |\lambda|\eta_1 \|K^{-1}\| [\|z^*\| + \|\bar{z} - z^*\|] \leq |\lambda|\eta_1 \|K^{-1}\| (|\lambda|\|H\| + |\lambda|\eta_1) \|x^*\|. \end{aligned}$$

Но вследствие (34) и (35) получим

$$\begin{aligned} \|x^* - x'\| &\leq \|z^* - \bar{z}\| + \|\bar{z} - \bar{z}_0\| + \|\bar{z}_0 - \bar{z}^*\| \leq \\ &\leq [|\lambda|\eta_1 + |\lambda|^2\eta_1 \|K^{-1}\| (\|H\| + \eta_1) + |\lambda|\eta_1 \|K^{-1}PK\|] \|x^*\| = p' \|x^*\|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Аналогичным образом в данном случае может быть уточнен результат теоремы 4.

1.7. Рассмотрим вопрос о сходимости характеристических значений оператора H к характеристическим значениям оператора $\tilde{H}$, ограничиваясь при этом случаем, когда оба эти оператора компактны и, следовательно, когда характеристическое множество дискретно.

Прежде всего в предположениях теоремы 3 можно утверждать, что характеристические значения оператора H могут сходить к характеристическим значениям оператора $\tilde{H}$. Действительно, возьмем в плоскости λ круг C_0 радиуса R с центром в начале координат, и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — те характеристические значения оператора H , которые попадают в него. Обозначим через D замкнутую область, получающуюся из C_0 удалением δ -окрестностей точек $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. В этой области оператор $K_\lambda^{-1} (K_\lambda = I - \lambda H)$ существует и $\|K_\lambda^{-1}\|$ ограничена как функции от λ . В таком случае, по теореме 3 при достаточно больших n и $\|\tilde{K}_\lambda^{-1}\| (\tilde{K}_\lambda = \tilde{I} - \lambda \tilde{H})$

) Или даже меньшую величину $|\lambda|\eta_1^$, лишь бы для некоторого $\tilde{y} \in X$ было

$$\|Hy - \tilde{y}\| \leq \eta_1^* \|y\|.$$

Таким образом, если выполнено второе из условий (21), то выполнения третьего всегда можно добиться.

ограничена независимо от n . Следовательно, при указанных условиях характеристические значения оператора H могут находиться лишь в выделенных окрестностях или вне C_0 , откуда ясно, что если при $n \rightarrow \infty$ они имеют конечный предел, то он совпадает с одним из характеристических значений оператора H .

В то же время каждое из характеристических значений оператора H является пределом характеристических значений оператора H . Действительно, если бы некоторое λ_n не было таким пределом, то в какой-то окрестности точки λ_n , ограниченной окружностью C_n , не было бы характеристических значений оператора H (при достаточно больших n). На окружности C_n функция $\|K_n^{-1}\|$ ограничена, тогда в силу (11) на ней и $\|\tilde{K}_n^{-1}\|$ ограничена. В таком случае и внутри нее $\|\tilde{K}_n^{-1}\|$ была бы ограничена тем же числом. Последнее устанавливается применением принципа максимума модуля и аналитической функции $\psi(\lambda) = f(\tilde{K}_n^{-1}\tilde{x})$ (f — произвольный функционал в пространстве X , а $\tilde{x}$ — произвольный элемент этого пространства). Применяя теорему 4, мы получили бы, что K_n^{-1} существует во всей окрестности, что приводит к противоречию.

Вопрос о сходимости собственных значений и элементов в плане общей теории приближенных методов рассматривался Троицкой [1] и Вайнником — I, II (см. также Михлин — II).

1.8. Отметим важный случай, когда можно упростить формулировки доказанных ранее теорем.

Часто приближенное уравнение (2) строится специальным образом. Именно, в качестве оператора H рассматривается оператор PH^* ; таким образом, в данном случае приближенное уравнение выглядит так:

$$\tilde{x} - \lambda PH\tilde{x} = Py, \quad K = PK. \quad (36)$$

Условие I при таком выборе, очевидно, выполняется с $\eta = 0$. Это вносит упрощения в формулировки теорем. Так, в теореме 1 следует принять

$$q = |\lambda| \eta_1 \|I - P\| \|K^{-1}\|. \quad (37)$$

В теореме 2

$$p = (\eta_1 |\lambda| + \eta_2 \|K\|)(1 + \|K^{-1}PK\|). \quad (38)$$

Условия (21) теоремы 3 заменяются условиями

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_1 \|P\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_2 \|P\| = 0. \quad (39)$$

В теореме 4

$$r = |\lambda| \eta_1 (1 + \|K^{-1}PK\|), \quad \|K^{-1}\| \leq \frac{1 + \|\tilde{K}^{-1}P\| + \|\tilde{K}^{-1}PK\|}{1 - r}. \quad (40)$$

Укажем условия, при которых в данном случае можно гарантировать выполнение соотношений (39) и, следовательно, сходимость последовательности приближенных решений к точному. Пусть имеется последовательность операторов P_n , проектирующих X на подпространства X_n . Каждому P_n соответствует свое приближенное уравнение (36).

* Оператор H здесь следует считать оператором из X в X .

Теорема 6. Если выполнены условия:

1) X — полное пространство;

2) $P_n \rightarrow I$ на X , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = x \quad (x \in X)$;

3) оператор H компактен;

то постоянные $\eta_1^{(n)}$ и $\eta_2^{(n)}$, фигурирующие в условиях II и III, можно выбрать так, что $\eta_1^{(n)} \rightarrow 0$ и $\eta_2^{(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть B — единичный шар пространства X . Множество $H(B)$ компактно, и потому по теореме Гельфанда (IX.1.4) на этом множестве $P_n \rightarrow I$ равномерно. Обозначая

$$\eta_1^{(n)} = \sup_{z \in H(B)} \|P_n z - z\|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

будем иметь

$$\eta_1^{(n)} \rightarrow 0.$$

С другой стороны, для любого $x \in X$

$$\|P_n Hx - Hx\| \leq \eta_1^{(n)} \|x\|.$$

Поскольку $P_n Hx \in X_n$, то из этого неравенства следует, что $\eta_1^{(n)}$ удовлетворяет условию II. В качестве $\eta_2^{(n)}$ можно взять величину

$$\eta_2^{(n)} = \frac{\|P_n y - y\|}{\|y\|},$$

которая, очевидно, стремится к нулю.

Следствие 1. В условиях теоремы, если λ не является характеристическим значением оператора H , то выполнены условия теоремы 3 и, следовательно, имеет место сходимость последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ приближенных решений к точному.

Действительно, (39) выполнено, так как согласно условию 2) теоремы $\sup_n \|P_n\| < \infty$ (VII.1.2).

Следствие 2. Характеристические значения оператора H суть пределы последовательностей характеристических значений операторов H_n .

Рассмотрим более подробно случай, когда X — конечномерное (размерности n) пространство. Каждый $\tilde{x} \in X$ единственным образом представим в форме

$$\tilde{x} = c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2 + \dots + c_n \omega_n, \quad (41)$$

где элементы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ образуют базис в X .

Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n$ — полная в X система линейных функционалов в X , т. е. такая, что из равенств

$$f_j(\tilde{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

следует $\tilde{x} = 0$.

Приближенное уравнение (36) равносильно системе равенств

$$f_j(PK\tilde{x}) = f_j(Py), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Разыскивая решение уравнения (36) в форме (41), получим для коэффициентов c_k систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} c_k - \lambda \sum_{k=1}^n a_{jk} c_k = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (42)$$

где

$$\alpha_{jk} = f_j(\omega_k), \quad a_{jk} = f_j(PH\omega_k), \quad b_j = f_j(Py), \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Если система функционалов $f_1, f_2, \dots, f_n$ биортогональна базису $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, то система (42) упрощается, приобретая вид

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^n a_{jk} c_k = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (43)$$

В частности, если X — гильбертово пространство, а P — проектор, т. е. оператор ортогонального проектирования, то, предполагая систему $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ортонормальной, получим

$$a_{jk} = f_j(PH\omega_k) = (PH\omega_k, \omega_j) = (H\omega_k, P\omega_j) = (H\omega_k, \omega_j),$$

$$j, k = 1, 2, \dots, n,$$

$$b_j = f_j(Py) = (Py, \omega_j) = (y, P\omega_j) = (y, \omega_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

и система (42) запишется в такой форме:

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^n c_k (H\omega_k, \omega_j) = (y, \omega_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (44)$$

Систему (42) будем называть системой *метода Галеркина* в абстрактной форме *).

Отметим другой частный случай общей теории, когда возможны еще большие упрощения.

Если пространство X совпадает с $\bar{X}$, то условия II и III выполнены очевидным образом с $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Условие I превращается при этом в условие близости операторов H и $\bar{H}$ (которые действуют в этом случае в одном и том же пространстве)

$$\|H - \bar{H}\| \leq \eta.$$

Следует заметить, однако, что этот случай не представляет значительного интереса с точки зрения общей теории, так как все теоремы для него могут быть доказаны элементарными средствами (ср. V.4.6).

1.9: Нередки случаи, когда приближенное уравнение того или иного метода рассматривается не в подпространстве пространства X , а в другом пространстве $\bar{X}$, которое, как обычно в таких случаях, изоморфно некоторому подпространству основного пространства X .

*) Для нелинейных уравнений метод Галёркина изучен в книгах Красосельский и др. и Вайникко — I.

Будем считать, что в полном подпространстве $X \subset X$ определен непрерывный линейный оператор Φ_0 , отображающий X взаимно однозначно на полное пространство $\bar{X}$. Эти условия обеспечивают непрерывность обратного оператора Φ_0^{-1} . Будем предполагать, что существует непрерывный линейный оператор φ — распространение оператора Φ_0 на все X ; таким образом, φ означает непрерывный линейный оператор, отображающий X на $\bar{X}$ и совпадающий с Φ_0 на X .

Если под P подразумевать оператор проектирования X на X , введенный в 1.1, то в качестве φ можно взять

$$\varphi = \Phi_0 P. \quad (45)$$

Умножая обе части этого равенства на Φ_0^{-1} , получим

$$P = \Phi_0^{-1} \varphi. \quad (46)$$

Ввиду наличия взаимно однозначного соответствия между элементами пространств X и $\bar{X}$ приближенное уравнение (2) можно преобразовать в эквивалентное уравнение, но уже в пространстве $\bar{X}$. Для этого в уравнении (2) заменим $x = \Phi_0^{-1} \bar{x}$, после чего применим к обеим частям уравнения оператор Φ_0 . Преобразованное таким образом уравнение примет вид

$$\bar{x} - \Phi_0 \bar{H} \Phi_0^{-1} \bar{x} = \Phi_0 P y.$$

Обозначая через $\bar{H}$ оператор, отображающий пространство $\bar{X}$ в себя,

$$\bar{H} = \Phi_0 \bar{H} \Phi_0^{-1}, \quad (47)$$

и принимая во внимание (45), перепишем приближенное уравнение в такой форме:

$$\bar{K} \bar{x} = \bar{x} - \lambda \bar{H} \bar{x} = \varphi y, \quad \bar{K} = \Phi_0 \bar{K} \Phi_0^{-1}. \quad (48)$$

Поскольку в приложениях часто встречаются случаи, когда приближенное уравнение дано в форме (48), мы укажем формулировки основных теорем общей теории в терминах операторов $\bar{H}$, φ (и $\bar{K}$). Для этого надо всюду заменить P его выражением (46), а для оператора $\bar{H}(\bar{K})$ из (47) находим.

$$\bar{H} = \Phi_0^{-1} \bar{H} \Phi_0, \quad \bar{K} = \Phi_0^{-1} \bar{K} \Phi_0. \quad (49)$$

Остановимся на условии I. В новых терминах оно выглядит так:

$$\|\Phi_0^{-1} \bar{H} \Phi_0 \tilde{x} - \Phi_0^{-1} \varphi \bar{H} \tilde{x}\| \leq \eta \|\tilde{x}\|, \quad \tilde{x} \in \bar{X}.$$

Это неравенство будет выполнено, если соблюдено условие Ia. Для любого $\tilde{x} \in \bar{X}$ имеет место неравенство

$$\|\bar{H} \Phi_0 \tilde{x} - \varphi \bar{H} \tilde{x}\| \leq \bar{\eta} \|\tilde{x}\|.$$

При этом в качестве η в условии I следует взять величину

$$\eta = \bar{\eta} \|\varphi_0^{-1}\|. \quad (50)$$

Условия II и III не затрагивают операторов H и P , поэтому в новой ситуации они не изменятся.

Дадим теперь новую формулировку теоремы 1.

Теорема 1а. Пусть выполнены условия Ia, II, и оператор K имеет непрерывный обратный. Тогда, если

$$\bar{q} = |\lambda| [\bar{\eta} \|\varphi_0^{-1}\| + \|I - \varphi_0^{-1} \varphi\| \eta_1] \|K^{-1}\| < 1, \quad (51)$$

то $\bar{K}$ также имеет непрерывный обратный $\bar{K}^{-1}$. При этом

$$\|\bar{K}^{-1}\| \leq \frac{\bar{N}}{1 - \bar{q}}, \quad (52)$$

где

$$\bar{N} = \|K^{-1}\| \|\varphi_0\| \|\varphi_0^{-1}\|. \quad (53)$$

Действительно, $\bar{K} = \varphi_0 \bar{K} \varphi_0^{-1}$, а для оператора K по теореме 1 существует обратный K^{-1} и для него выполнена оценка (4).

Если обозначить через $\tilde{x}^*$ решение уравнения (48), то приближенное решение $\tilde{x}^*$ уравнения (1) будет $\tilde{x}^* = \varphi_0^{-1} \tilde{x}^*$. Оценка погрешности приближенного решения получается с помощью теоремы 2, если в ее формулировке сделать необходимые замены.

Теорема 2а. Если выполнены условия Ia, II и III, существует непрерывный оператор $\bar{K}^{-1}$ и уравнение (1) имеет решение x^* , то справедлива оценка

$$\|x^* - \varphi_0^{-1} \tilde{x}^*\| \leq \bar{p} \|x^*\|, \quad (54)$$

где

$$\bar{p} = (1 + \varepsilon) |\lambda| \bar{\eta} \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1}\| + \varepsilon (1 + \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi K\|), \quad (55)$$

$$\varepsilon \leq \eta_1 |\lambda| + \eta_2 \|K\|.$$

В качестве $\bar{p}$ можно также взять

$$\bar{p} = 2 |\lambda| \bar{\eta} \|\varphi_0^{-1}\| \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi_0\| + \varepsilon (1 + \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi K\|). \quad (56)$$

Возможность для $\bar{p}$ значения (56) сразу же следует из (13). Равенство (55) требует небольшого дополнительного обоснования. Сохраняя обозначения доказательства теоремы 2, имеем согласно условию Ia

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| &= \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \bar{K} \varphi_0 \tilde{x} - \varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi_0 \varphi_0^{-1} \varphi K \tilde{x}\| \leq \\ &\leq \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1}\| \|\bar{K} \varphi_0 \tilde{x} - \varphi K \tilde{x}\| \leq |\lambda| \bar{\eta} \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1}\| \|\tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Используя эту оценку вместо (17), мы и приходим к (55).

Отметим, что факты, о которых шла речь в замечаниях к теореме 2, остаются справедливыми при соответствующих изменениях в формулировках.

Сформулируем, наконец, теорему о сходимости последовательности приближенных решений.

Теорема 3а. Если выполнены условия:

- 1) оператор K имеет непрерывный обратный;
- 2) при каждом $n = 1, 2, \dots$ выполнены условия Ia, II, III, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{\eta}\| \varphi_0^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_1 \|\varphi_0^{-1} \varphi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_2 \|\varphi_0^{-1} \varphi\| = 0; \quad (57)$$

то при достаточно больших n приближенное уравнение (48) разрешимо и имеет место сходимость последовательности приближенных решений к точному решению. При этом

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| \leq \bar{Q} \|\bar{\eta}\| \varphi_0^{-1} + \bar{Q}_1 \eta_1 \|\varphi_0^{-1} \varphi\| + \bar{Q}_2 \eta_2 \|\varphi_0^{-1} \varphi\|, \quad (58)$$

где $\tilde{x}_n^* = \varphi_0^{-1} \tilde{x}_n$, а $\bar{Q}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ постоянные.

В самом деле, принимая во внимание (50) и (46), заключаем, что выполнены все условия теоремы 3, откуда и следует сформулированный результат.

Не приводя полной формулировки теоремы 4, укажем, что условие (25) в новых терминах примет вид

$$\bar{r} = |\lambda| [(1 + |\lambda| \eta_1) \|\bar{\eta}\| \varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} + \eta_1 \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi K\|] < 1, \quad (59)$$

а (26) перепишется так:

$$\|K^{-1}\| \leq \frac{1 + \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi\| + |\lambda| \|\bar{\eta}\| \varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} + \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi K\|}{1 - \bar{r}}. \quad (60)$$

Для доказательства надо провести те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 4, воспользовавшись оценкой (54) теоремы 2а с $\bar{p}$ из (55).

Непосредственная замена в (25) и (26) дает для $\bar{r}$ значение

$$\bar{r} = |\lambda| [(1 + |\lambda| \eta_1) \|\bar{\eta}\| \varphi_0^{-1} \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi_0\| + \eta_1 (1 + \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi K\|)], \quad (61)$$

а вместо (60) приводит к оценке

$$\|K^{-1}\| \leq \frac{1 + \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi\| + |\lambda| \|\bar{\eta}\| \varphi_0^{-1} \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi_0\| + \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi K\|}{1 - \bar{r}}, \quad (62)$$

где $\bar{r}$ из (61).

§ 2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям второго рода

2.1. Рассмотрим уравнения, в которых хотя в левой части и не выделен тождественный оператор, и, более того, левая часть представляет непрерывный линейный оператор, переводящий данное пространство не в себя, а в другое нормированное пространство, но которые благодаря наличию в этом операторе главной

части простого вида могут быть приведены к уравнениям второго рода, рассмотренным в § 1.

Итак, предположим, что у нас имеются два нормированных пространства X и Y и в каждом из них выделено полное подпространство $X \subset X$ и $Y \subset Y$. Будем предполагать, что имеется непрерывный линейный оператор Φ , проектирующий Y на Y .

Рассматриваются два уравнения — точное:

$$K_1 x = Gx - \lambda T x = y_1, \quad (1)$$

и соответствующее ему приближенное:

$$K \tilde{x} = G \tilde{x} - \lambda T \tilde{x} = \Phi y_1. \quad (2)$$

Здесь операторы G и T (и K_1) — непрерывные линейные операторы, отображающие X в Y , а оператор T (и K) — непрерывный линейный оператор из X в Y . Кроме того, относительно указанных операторов будем еще предполагать:

- 1) оператор G имеет непрерывный обратный;
- 2) оператор G устанавливает взаимно однозначное соответствие между X и Y , т. е. $G(X) = Y$ и, следовательно, $G^{-1}(Y) = X$.

Введем условия, подобные условиям I—III § 1.

Iб. Для всякого $\tilde{x} \in X$ имеет место неравенство

$$\|\Phi T \tilde{x} - T \tilde{x}\| \leq \mu \|\tilde{x}\|.$$

IIб. Для каждого $x \in X$ найдется такое $\tilde{y} \in Y$, что

$$\|Tx - \tilde{y}\| \leq \mu_1 \|x\|.$$

IIIб. Существует элемент $\tilde{y}_1 \in Y$ такой, что

$$\|y_1 - \tilde{y}_1\| \leq \mu_2 \|y_1\|.$$

Покажем, что при сделанных предположениях изучение уравнений (1) и (2) сводится к исследованию уравнений второго рода.

Действительно, применим к обеим частям уравнений (1) и (2) оператор G^{-1} . Это даст

$$Kx = G^{-1}K_1 x = x - \lambda G^{-1}Tx = G^{-1}y_1, \quad (3)$$

$$K\tilde{x} = G^{-1}K_1 \tilde{x} = \tilde{x} - \lambda G^{-1}T\tilde{x} = G^{-1}\Phi y_1. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) имеют вид уравнений (1) и (2) § 1, при этом роль операторов H , $\tilde{H}$, $P(K, \tilde{K})$ играют операторы $G^{-1}T$, $G^{-1}T$, $G^{-1}\Phi G(G^{-1}K_1, G^{-1}K_1)$, а роль y — элемент $G^{-1}y_1$.

Проверим выполнение условий I, II, III.

I. В силу Iб имеем

$$\|PH\tilde{x} - \tilde{H}\tilde{x}\| = \|G^{-1}\Phi G G^{-1}T\tilde{x} - G^{-1}T\tilde{x}\| \leq \|G^{-1}\| \mu \|\tilde{x}\|.$$

II. По $x \in X$ в соответствии с IIб найдем $\tilde{y} \in Y$. Тогда, полагая $\tilde{x} = G^{-1}\tilde{y}$, имеем

$$\|Hx - \tilde{x}\| = \|G^{-1}Tx - G^{-1}\tilde{y}\| \leq \|G^{-1}\| \mu_1 \|x\|.$$

III. Пусть $\tilde{y}_1$ определено согласно IIIб. Обозначим $\tilde{y} = G^{-1}\tilde{y}_1$. При этом

$$\|y - \tilde{y}\| = \|G^{-1}y_1 - G^{-1}\tilde{y}_1\| \leq \|G^{-1}\| \mu_2 \|y_1\| \leq \|G^{-1}\| \|G\| \mu_2 \|y\|.$$

Таким образом, условия I, II, III из § 1 выполнены, причем постоянные η , η_1 , η_2 выражаются через μ , μ_1 , μ_2 следующим образом:

$$\eta = \mu \|G^{-1}\|, \quad \eta_1 = \mu_1 \|G^{-1}\|, \quad \eta_2 = \mu_2 \|G^{-1}\| \|G\|. \quad (5)$$

Замечание. Вместо IIб и IIIб можно было бы потребовать наличия таких $\tilde{x} \in X$ и $\tilde{y} \in Y$, что выполнены неравенства

$$\|G^{-1}Tx - \tilde{x}\| \leq \mu'_1 \|x\|, \quad \|G^{-1}y_1 - \tilde{y}\| \leq \mu'_2 \|G^{-1}y_1\|. \quad (6)$$

Тогда условия II и III выполняются с $\eta_1 = \mu'_1$ и $\eta_2 = \mu'_2$.

Поскольку для уравнений (3) и (4) выполнены условия I, II и III, мы можем из теорем предыдущего параграфа получить соответствующие им теоремы для уравнений (3) и (4) или для равносильных им уравнений (1) и (2). Развернутые формулировки соответствующих теорем мы приведем, сделав, однако, еще одно дальнейшее упрощающее предположение.

Именно, предположим, что нормы в пространствах X и Y согласованы в соответствии с отображением G :

$$\|x\|_X = \|Gx\|_Y, \quad \|y\|_Y = \|G^{-1}y\|_X, \quad x \in X, \quad y \in Y. \quad (7)$$

При этом условии отображение G , очевидно, изометричное; $\|G\| = \|G^{-1}\| = 1$. Благодаря этому

$$\|P\| = \|\Phi\|, \quad \|K\| = \|K_1\|, \quad \|K\| = \|K_1\|, \quad \|H\| = \|T\|, \quad \|H\| = \|T\|. \quad (8)$$

2.2. Сформулируем теперь основные теоремы § 1 для уравнений (1) и (2).

Теорема 16. Если выполнены условия Iб и IIб, существует непрерывный оператор K_1^{-1} и

$$q = |\lambda| [\mu + \|I - \Phi\| \mu_1] \|K_1^{-1}\| < 1, \quad (9)$$

то оператор K_1 также имеет непрерывный обратный, причем

$$\|\tilde{K}_1^{-1}\| \leq \frac{\|K_1^{-1}\|}{1 - q}. \quad (10)$$

Теорема 26. Если соблюдены условия Iб, IIб, IIIб, существует непрерывный оператор $\tilde{K}_1^{-1}$ (в частности, если выполнены условия теоремы Iб) и существует решение x^* уравнения (1), то имеет место оценка

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq p \|x^*\|, \quad (11)$$

где $\tilde{x}^*$ — решение уравнения (2), а

$$p = 2|\lambda|\mu\|\tilde{K}_1^{-1}\| + (\mu_1|\lambda| + \mu_2\|K_1\|)(1 + \|\tilde{K}_1^{-1}\Phi K_1\|). \quad (12)$$

Замечание. Если имеется такой $\tilde{x} \in X$, что

$$\|x^* - \tilde{x}\| \leq \varepsilon \|x^*\|, \quad (13)$$

то оценка (11) верна и без условий IIб и IIIб, причем под p следует понимать в этом случае величину

$$p = 2|\lambda|\mu\|\tilde{K}_1^{-1}\| + \varepsilon(1 + \|\tilde{K}_1^{-1}\Phi K_1\|). \quad (14)$$

Теорема 36. Если при каждом $n=1, 2, \dots$ выполнены условия Iб, IIб, IIIб, оператор K_1 имеет непрерывный обратный и имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 \|\Phi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2 \|\Phi\| = 0, \quad (15)$$

то последовательность приближенных решений (т. е. решений уравнения (2)) сходится к решению уравнения (1) x^* . При этом

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| \leq Q\mu + Q_1\mu_1\|\Phi\| + Q_2\mu_2\|\Phi\|. \quad (16)$$

Теорема 46. Если существует непрерывный оператор $\tilde{K}_1^{-1}$, выполнены условия Iб и IIб и

$$r = |\lambda|\mu(1 + |\lambda|\mu_1)\|\tilde{K}_1^{-1}\| + |\lambda|\mu_1(1 + \|\tilde{K}_1^{-1}\Phi K_1\|) < 1, \quad (17)$$

то оператор K_1 имеет непрерывный левый обратный, при этом

$$\|K_1^{-1}\| \leq \frac{1 + \|\tilde{K}_1^{-1}\Phi\| + |\lambda|\mu\|\tilde{K}_1^{-1}\| + \|\tilde{K}_1^{-1}\Phi K_1\|}{1 - r}. \quad (18)$$

2.3. Отметим, наконец, частный случай, когда формулировки теорем упрощаются. Именно, пусть приближенное уравнение (2) построено специальным образом — проектированием точного уравнения. Иначе говоря, приближенное уравнение получается, если к обеим частям уравнения (1) применить оператор Φ :

$$K_1\tilde{x} = \Phi K_1\tilde{x} = G\tilde{x} - \lambda\Phi T\tilde{x} = \Phi y_1, \quad (19)$$

т. е. в этом случае $T = \Phi T$.

Легко видеть, что при этом условие Iб выполнено при $\mu = 0$. Действительно,

$$\|T\tilde{x} - \Phi T\tilde{x}\| = \|\Phi T\tilde{x} - \Phi T\tilde{x}\| = 0.$$

Таким образом, всюду в формулировках теорем можно принять $\mu = 0$.

Добавим еще теорему, получающуюся из теоремы 1.6 и относящуюся специально к уравнениям рассматриваемого типа.

Теорема 56. Если имеется последовательность приближенных уравнений вида (19) и соответственно отображений Φ_n , причем:

- 1) пространство Y — полное;
- 2) $\Phi_n \rightarrow I$ на Y ;
- 3) оператор $G^{-1}T$ компактен;

и если существует K_1^{-1} , то приближенные уравнения для достаточно больших n разрешимы и имеет место сходимость приближенных решений к точному.

§ 3. Применение к бесконечным системам уравнений *)

3.1. Пусть дана бесконечная система уравнений

$$\xi_j - \lambda \sum_{h=1}^{\infty} a_{jh} \xi_h = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

в предположении, что

$$\sum_{j,h=1}^{\infty} |a_{jh}|^2 < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2 < \infty. \quad (2)$$

Требуется разыскать решение этой системы, удовлетворяющее условию

$$\sum_{h=1}^{\infty} |\xi_h|^2 < \infty. \quad (3)$$

Одним из распространенных методов решения системы (1) является так называемый *метод редукции*, который состоит в замене бесконечной системы (1) системой из n уравнений с n неизвестными

$$\xi_j - \lambda \sum_{h=1}^n a_{jh} \xi_h = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Решение этой системы рассматривается как приближенное решение исходной системы (1).

Нас будет интересовать вопрос об оценке погрешности приближенного решения и о сходимости при $n \rightarrow \infty$ приближенных решений к точному.

Для применения общей теории примем $X = l^2$. Система (1) при этом запишется в виде одного уравнения в X :

$$Kx = x - \lambda Nx = y, \quad x = \{\xi_n\}, \quad y = \{b_n\}. \quad (5)$$

Здесь под N понимается непрерывный линейный (и компакт-

*) По поводу бесконечных систем см. Рисс [4], Хеллингер, Теплиц [1], а также Канторович, Крылов.

ный — см. XI.2.2) оператор в l^2 , определяемый матрицей системы:

$$z = Hx, \quad \zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k, \quad j = 1, 2, \dots; \quad x = \{\xi_n\}, \quad z \in \{\zeta_n\}.$$

В качестве пространства $\bar{X}$ возьмем конечномерное евклидово пространство l_n^2 . За $\bar{X}$ естественно при этом взять совокупность элементов из l^2 , все координаты которых, начиная с $(n+1)$ -й, равны нулю. Смысл операторов Φ_0 и Φ_0^{-1} ясен без пояснений, оператор Φ сопоставляет элементу $x = \{\xi_n\} \in l^2$ элемент

$$\bar{x} = \Phi x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in l_n^2.$$

Очевидно,

$$\|\Phi\| = \|\Phi_0\| = \|\Phi_0^{-1}\| = 1.$$

Систему (4) можно записать теперь в виде одного уравнения в пространстве $\bar{X}$. Именном,

$$K\bar{x} = \bar{x} - \lambda H\bar{x} = \Phi y, \quad (6)$$

где оператор H определяется «усеченной» матрицей

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условий Ia, II, III. Имеем для произвольного $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots) \in \bar{X}$

$$\bar{z} = \Phi H\bar{x} - H\Phi_0\bar{x}, \quad \bar{z} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n),$$

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k - \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, условие Ia выполнено с $\bar{\eta} = 0$.

Для проверки условия II возьмем произвольное $x = \{\xi_n\} \in l^2$ и положим $\bar{x} = [Hx]_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots)$ *). Тогда

$$\|Hx - \bar{x}\| = \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk} \xi_k|^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right]^{1/2} =$$

$$= \eta_1 \|x\|,$$

где

$$\eta_1 = \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \right]^{1/2}.$$

Ясно по (2), что $\eta_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Наконец, полагая $\bar{y} = [y]_n$,

*) Знаком $[x]_n$ мы обозначаем «усеченный» элемент, т. е. элемент, получающийся из $x \in l^2$ заменой всех его координат, начиная с $(n+1)$ -й, нулями. Очевидно, $[x]_n = \Phi_0^{-1} \Phi x = Px$.

имеем

$$\|y - \tilde{y}\| = \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} |b_j|^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} |b_j|^2}{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2} \right]^{1/2} \|y\|,$$

так что в условии III можно принять

$$\eta_2 = \left[\frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} |b_j|^2}{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2} \right]^{1/2}$$

и здесь $\eta_2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

К данному случаю, таким образом, применима изложенная в 1.9 теория. В частности, теорема 3а позволяет заключить, что если λ не является характеристическим значением системы (1) (т. е. не является характеристическим значением оператора H), то при n , достаточно больших, система (4) разрешима и имеет место сходимость приближенных решений к точному. Быстрота сходимости определяется неравенством

$$\|x^* - \varphi_0^{-1} x_n^*\| \leq Q_1 \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \right]^{1/2} + Q_2 \left[\frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} |b_j|^2}{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2} \right]^{1/2},$$

где $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*, \dots)$ означает решение системы (1), а $x_n^* = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)})$ — решение системы (4).

Отсюда ясно, что ξ_k^* мало отличается от $\xi_k^{(n)}$ для $k = 1, 2, \dots, n$, а при $k > n$ координата ξ_k^* мала. Также ясна отсюда сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k^*, \quad k = 1, 2, \dots$$

Используя теорему 1.4 (с условием (59) § 1), приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Если система (4) имеет единственное решение и

$$\bar{r} = |\lambda| \eta_1 \|\bar{K}^{-1}\| \|\varphi K\| < 1, \quad (7)$$

то λ — не характеристическое значение системы (1), причем

$$\|K^{-1}\| \leq \frac{1 + \|\bar{K}^{-1}\| (1 + \|\varphi K\|)}{1 - \bar{r}}.$$

Эта теорема заслуживает внимания в том отношении, что заключение о разрешимости бесконечной системы делается на

оснований данных о решении конечной системы; при этом все величины, входящие в неравенство (7), могут быть без труда найдены, так что критерий разрешимости, данный в теореме, является вполне эффективным.

Значение величины η_1 указано выше. Для $\| \Phi K \|$ применима оценка

$$\| \Phi K \| \leq 1 + \| \Phi H \| \leq 1 + \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \right]^{1/2}.$$

Накопец, $\| \bar{K}^{-1} \|$, если матрица A_n симметричная, определяется из равенства

$$\| \bar{K}^{-1} \| = \max_{j=1,2,\dots,n} \frac{1}{|1 - \lambda_j^{(n)}|},$$

где $\lambda_j^{(n)}$ — собственные значения матрицы A_n . В общем случае $\| \bar{K}^{-1} \|$ определяется сложнее (см. V.2.8).

Замечание 1. Вместо систем, удовлетворяющих условию (2), можно было бы рассматривать более обширный класс систем, для которых оператор H компактен из l^2 в l^2 . В этом случае η_1 определялось бы формулой

$$\eta_1 = \| H - \Phi_0^{-1} \Phi H \Phi_0^{-1} \Phi \|,$$

и по-прежнему $\eta_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (XI.2.2), так что и здесь все теоремы общей теории применимы.

Замечание 2. Общая теория может быть применена и к другим классам бесконечных систем, которые могут быть рассматриваемы как функциональные уравнения в других пространствах последовательностей. Таковы, например, системы типа Рисса, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^{p/(p-1)} \right]^{p-1} < \infty, \quad 1 < p < \infty$$

(H здесь следует рассматривать как оператор в l^p). Регулярные и вполне регулярные системы также подходят под эту схему (в пространстве l^{∞}).

§ 4. Применение к интегральным уравнениям *)

4.1. Одним из наиболее эффективных методов численного решения интегральных уравнений является метод замены интегрального уравнения алгебраической системой линейных уравнений с помощью применения квадратурной формулы.

*) О приближенном решении интегральных уравнений и литературу по этому вопросу см. Канторович, Крылов.

Пусть дано уравнение

$$x(s) - \lambda \int_0^1 h(s, t) x(t) dt = y(s). \quad (1)$$

Заменяя интеграл по некоторой формуле численного интегрирования, построенной по узлам $t_1, t_2, \dots, t_n$ и имеющей вид

$$\int_0^1 x(t) dt = \sum_{k=1}^n A_k x(t_k), \quad (2)$$

и требуя удовлетворения равенства (1) только в узлах, приходим к системе

$$x(t_j) - \lambda \sum_{k=1}^n A_k h(t_j, t_k) x(t_k) = y(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

решение которой определяет приближенное значение искомого решения в точках $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Рассмотрим применение общей теории к оценке погрешности этого метода. Для определенности будем предполагать в уравнении (1) правую часть непрерывной периодической функцией (периода 1), а ядро $h(s, t)$ непрерывной периодической (также периода 1) как по s , так и по t . При этих условиях решение тоже будет периодической непрерывной функцией. Уравнение (1) будем рассматривать как функциональное уравнение в пространстве $X = C$ непрерывных периодических функций. Алгебраическую систему (3) будем рассматривать как приближенное функциональное уравнение в пространстве $\tilde{X} = l_n^\infty$,

$$\bar{K}\bar{x} = \bar{x} - \lambda \bar{H}\bar{x} = \varphi y. \quad (4)$$

При этом узлы и коэффициенты квадратурной формулы (2) выберем следующим образом:

$$A_k = \frac{1}{n}, \quad t_k = \frac{2k-1}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

т. е. положим в основу формулу средних прямоугольников — одну из наиболее удобных в случае периодических функций. При таком выборе оператор $\bar{H}$ в уравнении (4) определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} h\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) & \frac{1}{n} h\left(\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}\right) & \dots & \frac{1}{n} h\left(\frac{1}{2n}, \frac{2n-1}{2n}\right) \\ \frac{1}{n} h\left(\frac{3}{2n}, \frac{1}{2n}\right) & \frac{1}{n} h\left(\frac{3}{2n}, \frac{3}{2n}\right) & \dots & \frac{1}{n} h\left(\frac{3}{2n}, \frac{2n-1}{2n}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} h\left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) & \frac{1}{n} h\left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{3}{2n}\right) & \dots & \frac{1}{n} h\left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{2n-1}{2n}\right) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Оператор Φ определяется следующим образом:

$$\Phi x = (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)), \quad \|\Phi\| = 1, \quad x \in C.$$

Что касается пространства $\tilde{X}$ и связанного с ним отображения Φ_0^{-1} , то мы определим их двумя различными способами, что приводит к двум оценкам погрешности.

Примем сначала в качестве $\tilde{X}$ множество всех непрерывных периодических функций, линейных в каждом из промежутков вида $[t_k, t_{k+1}]$, где $t_k = \frac{2k-1}{2n}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Каждая такая функция определяется своими значениями в точках $t_1, t_2, \dots, t_n$, и тем самым отображение Φ_0^{-1} определено:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \Phi_0^{-1} x, \quad \bar{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \tilde{l}_n^\infty; \\ \tilde{x}(t_k) &= \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \tilde{x} \in \tilde{X}. \end{aligned}$$

При этом $\|\Phi_0^{-1}\| = 1$.

Обозначим через $\omega_*(\delta)$ модуль непрерывности функции $h(s, t)$ как функции от s :

$$\omega_*(\delta) = \sup |h(s + \sigma, t) - h(s, t)|, \quad 0 \leq s, t \leq 1, \quad |\sigma| \leq \delta;$$

аналогично определяется $\omega_t(\delta)$.

Для проверки условия Ia оценим погрешность квадратурной формулы (2) для функции вида $z(t)\tilde{x}(t)$, где z — периодическая функция, модуль непрерывности которой не превосходит $\omega(\delta)$, а $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Имеем ввиду периодичности

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 z(t) \tilde{x}(t) dt - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} z(t_k) \tilde{x}(t_k) \right| = \\ &= \left| \int_0^{t_n} z(t) \tilde{x}(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} (z(t_k) \tilde{x}(t_k) + z(t_{k+1}) \tilde{x}(t_{k+1})) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[z(t) - z\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) \right] \tilde{x}(t) dt + \right. \\ &+ \sum_{k=0}^n \frac{1}{2n} \left[\tilde{x}(t_k) \left(z\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) - z(t_k) \right) + \right. \\ &+ \left. \left. \tilde{x}(t_{k+1}) \left(z\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) - z(t_{k+1}) \right) \right] \right| \leq 2\omega\left(\frac{1}{2n}\right) \|\tilde{x}\|_x \end{aligned}$$

Поскольку в силу линейности функции $\tilde{x}(t)$ в каждом из

промежутков .

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \tilde{x}(t) dt = \frac{1}{2n} (\tilde{x}(t_k) + \tilde{x}(t_{k+1})); \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Полагая в предыдущем неравенстве $z(t) = h(t_j, t)$, получим

$$\begin{aligned} \|\varphi H\tilde{x} - \bar{H}\varphi_0\tilde{x}\| &= \\ &= \max_{j=1,2,\dots,n} \left| \int_0^1 h(t_j, t) \tilde{x}(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(t_j, t_k) \tilde{x}(t_k) \right| \leq \omega_t\left(\frac{1}{2n}\right) \|\tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Итак, условие Ia выполнено с

$$\bar{\eta} = 2\omega_t\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Перейдем к проверке условия II. Покажем предварительно, что если $z \in C$ — произвольная функция, модуль непрерывности которой не превосходит $\omega(\delta)$, то

$$\|z - \tilde{z}\| \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\tilde{z} = \varphi_0^{-1}\varphi z$, т. е. $\tilde{z}$ — кусочно-линейная функция, значения которой в точках $t_1, t_2, \dots, t_n$ совпадают с соответствующими значениями функции z . Действительно, если $t_j \leq s \leq t_{j+1}$, то

$$\begin{aligned} \|z(s) - \tilde{z}(s)\| &= |z(s) - [(t_{j+1} - s)z(t_j) + (s - t_j)z(t_{j+1})]| \leq \\ &\leq n[|(t_{j+1} - s)(z(s) - z(t_j))| + |(s - t_j)(z(s) - z(t_{j+1}))|] \leq \\ &\leq n\omega\left(\frac{1}{n}\right)(t_{j+1} - t_j) = \omega\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

откуда вследствие произвольности s и следует доказываемое. Оценим теперь модуль непрерывности элемента $z = Hx$ ($x \in C$):

$$\begin{aligned} |z(s) - z(s')| &\leq \int_0^1 |h(s, t) - h(s', t)| |x(t)| dt \leq \omega_s(\delta) \|x\|, \\ |s - s'| &\leq \delta. \end{aligned}$$

Таким образом, в качестве $\omega(\delta)$ можно взять

$$\omega(\delta) = \omega_s(\delta) \|x\|$$

и по предыдущему, если обозначить $\tilde{z} = \varphi_0^{-1}\varphi Hx$, имеем

$$\|Hx - \tilde{z}\| \leq \omega_s\left(\frac{1}{n}\right) \|x\|.$$

Следовательно, условие II выполнено с

$$\eta_1 = \omega_s \left(\frac{1}{n} \right).$$

Наконец, применяя сказанное к элементу y , найдем $\tilde{y} \in X$ так, что

$$\|y - \tilde{y}\| \leq \bar{\omega} \left(\frac{1}{n} \right),$$

где $\bar{\omega}(\delta)$ — модуль непрерывности функции y . Отсюда видно, что условие III выполнено с

$$\eta_2 = \frac{1}{\|y\|} \bar{\omega} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Вследствие непрерывности ядра $h(s, t)$ и правой части $y(s)$ уравнения (1) величины $\bar{\eta}$, η_1 , η_2 стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, а $\|\varphi\| = \|\varphi_0^{-1}\| = 1$, поэтому применимы теоремы общей теории. В частности, если λ_2 — не характеристическое значение уравнения (1), то на основании теоремы 1.3а можно заключить о разрешимости системы (3) (для достаточно больших n) и о стремлении приближенных решений $\varphi_0^{-1}x_n^*$ (кусочно-линейных функций, построенных по значениям $\{\xi_n\}$, найденным из системы (3)) к точному.

Для дальнейшего важно отметить, что на основании теоремы 1.1а норма обратного оператора $\|K^{-1}\|$ ограничена независимо от n .

В случае, если $h(s, t)$ и $y(s)$ удовлетворяют условию Липшица с показателем α , то на основании теоремы 1.3а быстрота сходимости последовательности приближенных решений может быть оценена так:

$$\|x^* - \varphi_0^{-1}x_n^*\| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Действительно, в этом случае $\omega_s(\delta)$, $\omega_t(\delta)$, $\bar{\omega}(\delta)$ имеют вид $O(\delta^\alpha)$.

4.2. Рассмотрим другой способ оценки погрешности того же метода, к которому мы приходим при ином выборе подпространства X .

Для удобства будем считать n нечетным: $n = 2m + 1$. За X примем множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше m , т. е. $\tilde{x} \in X$ означает

$$\tilde{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos 2k\pi t + b_k \sin 2k\pi t).$$

Ясно, что оператор φ_0^{-1} сопоставляет элементу $\tilde{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in l_n^\infty$ интерполяционный полином, построенный по узлам $t_1, t_2, \dots, t_n$ со значениями в них соответственно $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. По

лемме Бернштейна *), если для тригонометрического полинома $\tilde{x}$ в узлах $t_1, t_2, \dots, t_n$ имеет место оценка

$$|\tilde{x}(t_j)| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

то

$$|\tilde{x}(t)| \leq A \ln m + B, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Отсюда получается оценка нормы оператора φ_0^{-1} :

$$\|\varphi_0^{-1}\| \leq A \ln m + B. \quad (6)$$

Обозначим далее через E_m^t и E_m^s наилучшее приближение $h(s, t)$ как функции от t и s соответственно тригонометрическими полиномами m -го порядка по соответствующей переменной; иначе говоря, предполагаем существование функций вида

$$h_1(s, t) = \frac{a_0'(s)}{2} + \sum_{k=1}^m [a_k'(s) \cos 2k\pi t + b_k'(s) \sin 2k\pi t],$$

$$h_2(s, t) = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{k=1}^m [a_k''(t) \cos 2k\pi s + b_k''(t) \sin 2k\pi s]$$

таких, что

$$|h(s, t) - h_1(s, t)| \leq E_m^t, \quad |h(s, t) - h_2(s, t)| \leq E_m^s, \quad 0 \leq s, t \leq 1.$$

Для проверки условия Ia отметим, прежде всего, что квадратурная формула (2) точна, если подынтегральная функция — тригонометрический полином порядка не выше $n-1 = 2m$ **).

Учитывая, что $h_1(s, t)\tilde{x}(t)$ имеем такой полином от t , имеем

$$\int_0^1 h_1(s, t) \tilde{x}(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_1(s, t_k) \tilde{x}(t_k), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\varphi H \tilde{x} - \bar{H} \varphi_0 \tilde{x}\| &= \\ &= \max_{j=1,2,\dots,n} \left| \int_0^1 h(t_j, t) \tilde{x}(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(t_j, t_k) \tilde{x}(t_k) \right| \leq \\ &\leq \max_{j=1,2,\dots,n} \left| \int_0^1 [h(t_j, t) - h_1(t_j, t)] \tilde{x}(t) dt \right| + \\ &+ \max_{j=1,2,\dots,n} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n [h(t_j, t_k) - h_1(t_j, t_k)] \tilde{x}(t_k) \right| \leq 2E_m^t \|\tilde{x}\|. \end{aligned}$$

*) См. Натансон — I, с. 542.

**) См. Натансон — I, с. 611.

Следовательно, условие Ia выполнено с

$$\bar{\eta} = 2E_m^t.$$

Для проверки условия II с целью аппроксимации элемента $x = Hx$ построим функцию *)

$$\tilde{x}(s) = \int_0^1 h_2(s, t) x(t) dt.$$

Как ясно из вида $h_2(s, t)$, функция $\tilde{x}(s)$ есть тригонометрический полином порядка m , т. е. $\tilde{x} \in X$. В то же время

$$\|Hx - \tilde{x}\| = \max_s \left| \int_0^1 [h(s, t) - h_2(s, t)] x(t) dt \right| \leq E_m^s \|x\|.$$

Условие II, таким образом, выполнено при

$$\eta_1 = E_m^s.$$

Наконец, условие III выполняется, если положить

$$\eta_2 = \frac{1}{\|y\|} E_m(y),$$

где $E_m(y)$ — наилучшее приближение функции y тригонометрическими полиномами порядка m .

На основании этих оценок имеем возможность, пользуясь теоремой 1.2а, получить оценку близости точного и приближенного решения:

$$\begin{aligned} \|x^* - \varphi_0^{-1} \bar{x}^*\| &\leq \bar{p} \|x^*\|, \\ \bar{p} &= 4|\lambda| E_m^t \|\varphi_0^{-1}\| \|\bar{K}^{-1}\| + \\ &+ \left(|\lambda| E_m^s + \frac{E_m(y) \|K\|}{\|y\|} \right) (1 + \|\varphi_0^{-1}\| \|\bar{K}^{-1}\| \|K\|). \end{aligned}$$

Отметим, что, как было установлено в 4.1, $\|\bar{K}^{-1}\|$ ограничена независимо от n .

Предположим, что ядро $h(s, t)$ имеет производные до ν -го порядка по s и по t , причем $\frac{\partial^\nu h}{\partial s^\nu}$ и $\frac{\partial^\nu h}{\partial t^\nu}$ удовлетворяют условию Липшица с показателем α ; эти же предположения сделаем относительно функции $y(s)$. Тогда в силу известной теоремы

*) Нетрудно показать, что функция $h_2(s, t)$ может быть всегда выбрана непрерывной по t , так что написанный интеграл существует. Впрочем, эта оговорка не нужна, если интеграл понимать в смысле Банаха (см. II.4.2), так как он определен для любой ограниченной функции.

Джексона (см. Патапсон — I, с. 124)

$$E_m^t = O\left(\frac{1}{m^{v+\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{v+\alpha}}\right), \quad E_m^s = O\left(\frac{1}{m^{v+\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{v+\alpha}}\right),$$

$$E_m(y) = O\left(\frac{1}{m^{v+\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{v+\alpha}}\right),$$

а так как на основании (6)

$$\|\varphi_0^{-1}\| = O(\ln m) = O(\ln n),$$

то по теореме 1.3а получаем оценку быстроты убывания погрешности приближенного решения

$$\|x^* - \varphi_0^{-1}x_n^*\| = O\left(\frac{\ln n}{n^{v+\alpha}}\right).$$

Используя теорему 1.4, можно на основании результатов приближенного решения установить возможную область расположения характеристических значений уравнения (1).

Отметим, наконец, что аналогичные рассуждения можно было бы применить для оценки погрешности того же метода и в случае использования других квадратурных формул. В частности, для непериодического случая, используя формулу Гаусса, можно было бы опираться на интерполирование алгебраическими полиномами и теоремы о порядке приближения функций алгебраическими полиномами.

4.3. Рассмотрим некоторые другие методы приближенного решения интегрального уравнения (1) и, прежде всего, *метод моментов*. Этот метод состоит в том, что приближенное решение уравнения (1) отыскивается в форме

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \omega_k(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (7)$$

где ω_k ($k = 1, 2, \dots$) — функции полной ортонормальной системы. Коэффициенты c_k при этом определяются из системы

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^n c_k \int_0^1 \int_0^1 h(s, t) \omega_j(s) \omega_k(t) ds dt = \int_0^1 y(s) \omega_j(s) ds, \\ j = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

которая заменяет требование обращения в нуль разности $Kx - y$ условием ортогональности ее первым n функциям данной ортонормальной системы.

Предполагая ядро $h(s, t)$ уравнения (1) удовлетворяющим условию

$$\int_0^1 \int_0^1 |h(s, t)|^2 ds dt < \infty,$$

примем за X пространство $L^2(0, 1)$, а в качестве $\tilde{X}$ возьмем подпространство элементов вида (7). Оператор P определим как оператор ортогонального проектирования на $\tilde{X}$, т. е. $\tilde{x} = Px$ означает, что

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^n (x, \omega_k) \omega_k.$$

Система (8) может быть записана в виде одного уравнения в пространстве $\tilde{X}$

$$\hat{x} - PH\hat{x} = Py.$$

Отсюда ясно, что мы находимся в условиях, о которых шла речь в 1.8. При этом, поскольку система $\{\omega_k\}$ полная, выполнены условия теоремы 1.6 и, следовательно, имеет место сходимость приближенных решений к точному. Быстрота сходимости определяется свойствами ядра $h(s, t)$ и правой части $y(s)$; она зависит от быстроты сходимости ортогональных разложений этих функций по функциям системы. Остановимся на случае, когда ядро периодическое и удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha + \frac{1}{2}$ ($\alpha > 0$) по s . Аналогичные требования наложим на $y(s)$. За ортонормальную систему $\{\omega_k\}$ возьмем систему тригонометрических функций. С помощью теоремы Джексона нетрудно получить в этом случае оценки

$$\eta_1 = O(n^{-1/2-\alpha}), \quad \eta_2 = O(n^{-1/2-\alpha}),$$

и, следовательно,

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_{L^2} = O(\eta_1 + \eta_2) = O(n^{-1/2-\alpha}). \quad (9)$$

Докажем, что фактически в этом случае имеет место равномерная сходимость приближенных решений к точному.

Пусть $\tilde{x} = \sum_{j=1}^n c_j \omega_j$. Оценим $\|\tilde{x}\|_C$ через $\|\tilde{x}\|_{L^2}$. Так как $\|\omega_j\|_C \leq M$ ($j = 1, 2, \dots$), то, применяя неравенство Коши — Буняковского, будем иметь

$$\|\tilde{x}\|_C \leq M \sum_{j=1}^n |c_j| \leq M \sqrt{n} \left[\sum_{j=1}^n |c_j|^2 \right]^{1/2} = M \sqrt{n} \|x\|_{L^2}.$$

Применим эту оценку к разности двух приближений $\tilde{x}_n^*$ и $\tilde{x}_{2^k}^*$, где $2^{k-1} \leq n \leq 2^k$. Получим

$$\|\tilde{x}_{2^k}^* - \tilde{x}_n^*\|_C \leq M 2^{k/2} \|\tilde{x}_{2^k}^* - \tilde{x}_n^*\|_{L^2}.$$

Далее, используя оценку (9), будем иметь

$$\|\tilde{x}_{2^k}^* - \tilde{x}_n^*\|_{L^2} \leq \|\tilde{x}_{2^k}^* - x^*\|_{L^2} + \|x^* - \tilde{x}_n^*\|_{L^2} \leq \frac{C}{2^{\frac{k}{2} + \alpha k}} + \frac{C}{n^{\frac{1}{2} + \alpha}} \leq \frac{C_2}{2^{\frac{k}{2} + \alpha k}},$$

и, следовательно,

$$\|\tilde{x}_{2^k}^* - \tilde{x}_n^*\|_C \leq \frac{C_2}{2^{\alpha k}}. \quad (10)$$

В частности, последняя оценка верна и при $n = 2^{k-1}$, т. е.

$$\|\tilde{x}_{2^k}^* - \tilde{x}_{2^{k-1}}^*\|_C \leq \frac{C_2}{2^{\alpha k}}.$$

Отсюда можно заключить о равномерной сходимости ряда

$$\tilde{x}_1^*(t) + \sum_{h=1}^{\infty} [\tilde{x}_{2^h}^*(t) - \tilde{x}_{2^{h-1}}^*(t)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_{2^k}^*(t) = x^*(t).$$

Учитывая (10), найдем, что и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n^*(t) = x^*(t)$$

равномерно. При этом, очевидно,

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_C = O(n^{-\alpha}).$$

Отметим, что если рассматривать интегральное уравнение (1) как уравнение в пространстве $C[0, 1]$, то применение теоремы 1.3 позволит получить более сильный результат, чем только что указанный. Именно, если ядро (по s) и правая часть $y(s)$ удовлетворяют условию Липшица с показателем $\beta > 0$, то приближенные решения сходятся к точному равномерно и

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_C = O(n^{-\beta} \ln n).$$

4.4. Рассмотрим теперь метод замены ядра на близкое (в частности, на вырожденное). Метод состоит, как ясно из его названия, в замене уравнения (1) уравнением

$$\tilde{x}(s) - \lambda \int_0^1 \tilde{h}(s, t) \tilde{x}(t) dt = y(s), \quad (11)$$

ядро которого — $\tilde{h}(s, t)$ — близко к $h(s, t)$ и решение которого известно.

Записывая уравнение (11) как функциональное в том же пространстве, что и уравнение (1):

$$K\tilde{x} = \tilde{x} - \lambda H\tilde{x} = y,$$

мы приходим к ситуации, которая была описана в конце пункта 1.8. Как там было указано, условие I сводится к неравенству

$$\|H - \tilde{H}\| \leq \eta, \quad (12)$$

а условия II и III выполнены с $\eta_1 = \eta_2 = 0$.

Выбирая в качестве пространства $X = \tilde{X}$ пространство $L^\infty(0, 1)$ ограниченных измеримых функций, перепишем (12) в форме

$$\int_0^1 |h(s, t) - \tilde{h}(s, t)| dt \leq \eta_s, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Норма оператора K^{-1} без труда оценивается, если известна резольвента $\tilde{\Gamma}(\lambda; s, t)$ приближенного уравнения (11). Так как обратный оператор K^{-1} имеет вид

$$z = \tilde{K}^{-1} y_s$$

$$z(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 \tilde{\Gamma}(\lambda; s, t) y(t) dt_s$$

то

$$\|K^{-1}\| \leq 1 + |\lambda|B;$$

где B определяется из неравенства

$$\int_0^1 |\tilde{\Gamma}(\lambda; s, t)| dt \leq B_s, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Используя оценку (19) § 1, получаем оценку близости приближенного решения к точному

$$|x^*(t) - \tilde{x}^*(t)| \leq |\lambda| \eta (1 + |\lambda|B) \|x^*\|. \quad (13)$$

Аналогичная оценка верна, если поменять ролями уравнения.

Из (13) вытекает равномерная сходимость приближенных решений к точному при соответствующей сходимости ядер.

Общая теория может быть применена и к методу решения, при котором решение ищется в форме (7), причем требуется, чтобы равенство левой и правой части соблюдалось лишь в заданных точках. Изложение этого метода и его исследование (см. Канторович [9]) мы здесь приводить не будем, так как сходный метод рассмотрен для дифференциальных уравнений в следующем параграфе.

§ 5. Применение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

5.1. Рассмотрим сначала так называемый *интерполяционный метод*, иначе называемый *методом совпадения* (коллокации)*), в случае граничной задачи для уравнения

$$\frac{d^{2m}x}{dt^{2m}} - \lambda \left[p_1 \frac{d^{2m-1}x}{dt^{2m-1}} + \dots + p_{2m} x \right] = y \quad (1)$$

*) Впервые интерполяционный метод предложен, по-видимому, в работе Канторовича [1]. Доказательство сходимости на основании теорем §§ 1, 2 получено в статье Карпаловской [1].

при условиях

$$\begin{aligned} x(a) = x'(a) = \dots = x^{(m-1)}(a) = 0, \\ x(b) = x'(b) = \dots = x^{(m-1)}(b) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Приближенное решение будем искать в форме

$$\tilde{x}(t) = (t-a)^m(b-t)^m \sum_{k=1}^n c_k t^{k-1}, \quad (3)$$

так что граничные условия для $\tilde{x}$ удовлетворены; коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n$ находятся из условия удовлетворения уравнения (1) в некоторой заданной системе точек (узлов) $t_1, t_2, \dots, t_n$:

$$\left\{ \frac{d^{2m} \tilde{x}}{dt^{2m}} - \lambda \left[p_1 \frac{d^{2m-1} \tilde{x}}{dt^{2m-1}} + \dots + p_{2m} \tilde{x} \right] \right\}_{t=t_j} = y(t_j). \quad (4)$$

Для применения общей теории, изложенной в § 2, будем рассматривать дифференциальное уравнение (1) как функциональное в пространстве $X = C^{(2m)}[a, b]$ $2m$ -непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (2). Определение нормы в пространстве X будет дано ниже.

За X примем множество функций вида (3). Далее, в качестве Y рассмотрим пространство $C[a, b]$ непрерывных в промежутке $[a, b]$ функций с обычным определением нормы. Наконец, за $\tilde{Y}$ примем множество полиномов $(n-1)$ -й степени. Отображение Φ пространства Y на $\tilde{Y}$ определим, принимая в качестве $\tilde{y} = \Phi(y)$ интерполяционный полином $(n-1)$ -й степени, имеющий в узлах $t_1, t_2, \dots, t_n$ те же значения, что и y . Как мы знаем, в случае чебышёвских узлов

$$\|\Phi\| \leq A \ln n + B. \quad (5)$$

Известно также, что в случае гауссовских узлов

$$\|\Phi\| \leq A \sqrt{n}, \quad (6)$$

а если узлы являются корнями n -го ортогонального полинома с ограниченным весом $\omega(t) \geq c > 0$, то

$$\|\Phi\| \leq A n^*. \quad (7)$$

Рассмотренная граничная задача равносильна функциональному уравнению

$$K_1 x \equiv Gx - \lambda Tx = y, \quad (8)$$

где

$$Gx = \frac{d^{2m} x}{dt^{2m}}, \quad z = Tx, \quad z(t) = \sum_{s=1}^{2m} p_s(t) x^{(2m-s)}(t). \quad (9)$$

*) По поводу (5) и (7) см. Натансон—I, с. 539 и 544. Оценка (6) имеется в книге Сёге.

Оператор, обратный G , есть интегральный оператор, ядро которого есть функция Грина дифференциального оператора $\frac{d^{2m}x}{dt^{2m}}$ при условиях (2).

Существование функции Грина следует из того, что дифференциальное уравнение

$$\frac{d^{2m}x}{dt^{2m}} = 0 \quad (10)$$

при условиях (2) имеет единственное, нулевое решение, так как общим решением уравнения (10) является произвольный полином степени $2m-1$, а полином, отличный от нулевого и удовлетворяющий условиям (2), должен иметь множитель $(t-a)^m(b-t)^m$, степень которого $2m$.

Таким образом,

$$x = G^{-1}y, \quad x(s) = \int_a^b g(s, t) y(t) dt, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Функция $g(s, t)$ имеет непрерывные производные до порядка $2m-2$, а $(2m-1)$ -я производная ее имеет скачок при $s=t$. Отсюда

$$x^{(k)}(s) = \int_a^b \frac{\partial^k}{\partial s^k} g(s, t) y(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1,$$

а потому

$$\max_t |x^{(k)}(s)| \leq A_k \|y\|_Y, \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1. \quad (11)$$

Если принять $A_{2m} = 1$, то (11) будет верно и при $k = 2m$.

Желая согласовать норму в X с нормой в Y так, чтобы оператор G осуществлял изометрию между этими пространствами, мы должны положить

$$\|x\|_X = \|Gx\|_Y = \max_t |x^{(2m)}(t)|.$$

При этом (11) дает возможность оценить любую производную функции x через норму элемента x в пространстве X :

$$\max_t |x^{(k)}(t)| \leq A_k \|x\|_X, \quad k = 0, 1, \dots, 2m. \quad (12)$$

Отметим, что оператор G переводит элементы пространства X в элементы пространства Y — полиномы степени не выше $n-1$.

Оценим норму T как оператора из пространства $C^{(2m)}[a, b]$ в $C[a, b]$. С помощью (12) имеем

$$\|Tx\| = \max_t \left| \sum_{s=1}^{2m} p_s(t) x^{(2m-s)}(t) \right| \leq \left[\sum_{s=1}^{2m} B_s A_{2m-s} \right] \|x\|_X$$

где $B_s = \max_t |p_s(t)|$ ($s = 1, 2, \dots, 2m$). Таким образом,

$$\|T\| \leq \sum_{s=1}^{2m} B_s A_{2m-s}. \quad (13)$$

Аналогичным образом, если известна функция Грина уравнения (1) при условиях (2), можно оценить норму оператора K_1^{-1} .

Приближенное уравнение — систему (4) — можно, очевидно, записать в виде

$$K_1 \tilde{x} = G\tilde{x} - \lambda \Phi T \tilde{x} = \Phi y, \quad (14)$$

так как система (4) получается подстановкой в уравнение (1) выражения $\tilde{x}$ вида (3) и уравниванием обеих частей в узлах $t_1, t_2, \dots, t_n$, что равносильно уравниванию интерполяционных полиномов, построенных по значениям в этих узлах.

Сравнивая уравнение (14) с уравнением (22) в 2.3, обнаруживаем, что оно построено специальным образом, так что условие Iб выполнено с $\mu = 0$.

Для проверки условия IIб, т. е. установления возможной степени аппроксимации элементов вида Tx элементами из $\hat{Y}$, оценим $\frac{d}{dt}Tx$. Имеем, учитывая (12),

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt}Tx \right\|_C &= \max_t \left| \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^{2m} p_s(t) x^{(2m-s)}(t) \right| = \\ &= \max_t \left| \sum_{s=0}^{2m} (p'_s(t) + p_{s+1}(t)) x^{(2m-s)}(t) \right| \leq M \|x\|, \\ p_0(t) &= p_{2m+1}(t) = 0. \end{aligned}$$

На основании теоремы Джексона существует полином $\tilde{y} \in \hat{Y}$ такой, что

$$\|Tx - \tilde{y}\| \leq \frac{AM \|x\|}{n}.$$

Следовательно, условие IIб выполнено с $\mu_1 = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Что касается условия IIIб, то если правая часть уравнения (1) — функция y — имеет непрерывную производную, то, снова применяя теорему Джексона, получим для μ_2 значение $\mu_2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Отметим еще, что если в уравнении (1) $p_1 = 0$ (этого всегда можно добиться подходящей заменой переменных) и коэффициенты p_s дважды непрерывно дифференцируемы, то, проводя предыдущие рассуждения по отношению к $\frac{d^2}{dt^2}Tx$, мы получили

бы для μ_1 величину $\mu_1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Если же и y — дважды дифференцируемая функция, то и $\mu_2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Используя результаты § 2, учитывая при этом найденные оценки для μ_1 и μ_2 и оценку для $\|\Phi\|$, по теореме 2.16 заключаем, что при достаточно больших n система (4) разрешима.

Используя же теорему 2.36, заключаем о сходимости приближенных решений к точному в случае узлов Чебышёва или Гаусса. При этом

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad \|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

соответственно для узлов Чебышёва и Гаусса.

В упомянутом же случае, когда $p_1 = 0$, мы получаем разрешимость системы (4) и тогда, когда в качестве узлов рассматриваются корни n -го ортогонального полинома по весу $\omega(t) \geq c > 0$. Оценка погрешности приближенного решения в этом случае имеет вид

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

При условии большей гладкости коэффициентов может быть установлена большая быстрота сходимости. Предположим, что $p_1, p_2, \dots, p_m$ и y дифференцируемы r раз и их r -е производные удовлетворяют условию Липшица с показателем α . Воспользуемся замечанием к теореме 1.3, согласно которому быстрота сходимости определяется равенством

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O(\varepsilon \|P\|), \quad P = G^{-1}\Phi G, \quad \|P\| = \|\Phi\|, \quad (15)$$

где ε характеризует возможность аппроксимации решения x^* элементом $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Так как

$$\|x^* - \tilde{x}\|_X = \|G(x^* - \tilde{x})\|_Y = \left\| \frac{d^{2m}x^*}{dt^{2m}} - \tilde{y} \right\|_Y, \quad \tilde{y} = \tilde{G}x \in \tilde{Y},$$

то ε определяется степенью аппроксимации $2m$ -й производной решения полиномом степени $n-1$. Но, как легко устанавливается индукцией по r , функция $\frac{d^{2m}x^*}{dt^{2m}}$ имеет r -ю производную, удовлетворяющую условию Липшица с показателем α . Поэтому на основании теоремы Джексона существует полином $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ такой, что

$$\left\| \frac{d^{2m}x^*}{dt^{2m}} - \tilde{y} \right\| \leq \frac{D}{n^{r+\alpha}}.$$

Таким образом, ε имеет порядок $n^{-r-\alpha}$, а тогда согласно (15)

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad \|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-\frac{1}{2}}}\right), \quad \|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right)$$

соответственно для узлов Чебышёва, Гаусса и корней ортогонального полинома по ограниченному (спизу) весу.

Замечание 1. Не меняя существенно хода рассуждений, можно установить сходимость данного метода не только в случае граничной задачи, но и в случае задачи Коши. Характер рассуждений не изменится, если рассматривать не одно дифференциальное уравнение, а систему.

Замечание 2. Теорему о сходимости данного приближенного метода можно рассматривать как теорему о сходимости некоторого интерполяционного процесса — полином $\tilde{x}_n^*(t)$ можно рассматривать как интерполяционный полином для решения $x^*(t)$, который строится по граничным условиям и заданным значениям дифференциального оператора Kx^* в узлах $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Замечание 3. Любопытно отметить, что для равноотстоящих узлов сходимость рассмотренного процесса не имеет места даже для простейшего уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} = y$, что без труда получается, если учесть факт возможной расходимости обычного интерполяционного процесса при равноотстоящих узлах (см. Натансон — I, с. 519).

5.2. Рассмотрим теперь применение общей теории к исследованию сходимости метода Галёркина и метода моментов *).

Пусть имеется дифференциальное уравнение (1) и однородные граничные условия

$$M(x) = 0 \quad (16)$$

на концах промежутка. Метод моментов состоит в том, что, взяв систему функций $\{\omega_k\}$, удовлетворяющих граничным условиям (16), ищут приближенное решение в виде

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \omega_k(t), \quad (17)$$

причем c_k определяют из условия, чтобы результат подстановки $\tilde{x}$ в уравнение (1) (точнее, невязка, получающаяся при этом) был

* Сходимость метода Галёркина в общей форме впервые установлена в работе М. В. Келдыша [1]. Частный случай метода Галёркина — метод Рунге — и метод моментов рассмотрен ранее в работах Н. М. Крылова и И. И. Боголюбова (см. Крылов, а также Михлин — II).

ортогонален первым n функциям некоторой системы $\{\zeta_j\}$:

$$\int_a^b L \left(\sum_{k=1}^n c_k \omega_k \right) \zeta_j(t) dt = \int_a^b y(t) \zeta_j(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где через $L(x)$ обозначено дифференциальное выражение

$$L(x) = \frac{d^{2m}x}{dt^{2m}} - \lambda \sum_{s=1}^{2m} p_s \frac{d^{2m-s}x}{dt^{2m-s}}.$$

Если при этом $\zeta_j = \omega_j$, то получаем метод Галёркина.

5.3. Рассмотрим, в частности, уравнение

$$x''(t) - \lambda[p_1(t)x'(t) + p_2(t)x(t)] = y(t), \quad |t| \leq 1, \quad (18)$$

при условиях

$$x(-1) = x(1) = 0. \quad (19)$$

При этом в качестве функций ω_k рассмотрим функции

$$\omega_k(t) = t^{k-1}(1-t^2), \quad k = 1, 2, \dots$$

Уравнение (18) можно записать в виде

$$Gx - \lambda Tx = y, \quad (20)$$

где $Gx = x''$. В качестве X возьмем унитарное пространство (неполное) дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничному условию (19), в котором

$$\|x\|_X = \left[\int_{-1}^1 |x''(t)|^2 dt \right]^{1/2}, \quad (x_1, x_2)_X = \int_{-1}^1 x_1''(t) x_2''(t) dt.$$

В Y , которое в данном случае состоит из всех непрерывных функций, введем метрику, согласованную с метрикой пространства X при помощи оператора G :

$$\|y\|_Y = \|G^{-1}y\|_X = \left[\int_{-1}^1 |y(t)|^2 dt \right]^{1/2}, \quad (y_1, y_2)_Y = \int_{-1}^1 y_1(t) y_2(t) dt.$$

В качестве X берем подпространство функций вида (17), а пространство Y определяем как $G(X)$, что, как легко видеть, дает совокупность всех полиномов степени $n-1$. Наконец, оператор Φ определим как оператор ортогонального проектирования Y на Y . При этом, если $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ — система линейно независимых элементов из Y , то равенство $\Phi y = 0$ равносильно системе равенств $(y, \zeta_j) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

При сделанных предположениях уравнение метода моментов равносильно функциональному уравнению

$$G\tilde{x} - \lambda \Phi T\tilde{x} = \Phi y, \quad (21)$$

т. е. приближенное уравнение построено специальным образом в соответствии с 2.3. Следовательно, условие Иб выполнено с $\mu = 0$.

Для проверки условия Иб нужно показать возможность аппроксимации элемента Tx элементами из Y . Отметим предварительно, что для функции из X через ее норму могут быть оценены максимум ее самой и ее первой производной:

$$\begin{aligned} |x'(t)| &= \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 [x'(t) - x'(\tau)] d\tau \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 \left[\int_{\tau}^t x''(u) du \right] d\tau \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\int_{\tau}^t |x''(u)|^2 du \right]^{1/2} \left[\int_{\tau}^t du \right]^{1/2} d\tau \leq A \|x\|, \\ |x(t)| &\leq \int_{-1}^1 |x'(\tau)| d\tau \leq B \|x\|. \end{aligned}$$

В таком случае можно, предполагая непрерывную дифференцируемость коэффициентов уравнения (18), написать

$$\left\| \frac{d}{dt} Tx \right\|_Y = \|p_1 x'' + (p_1 + p_2') x' + p_2 x\|_Y \leq C \|x\|.$$

Отсюда легко получается, что функция Tx удовлетворяет условию Липшица с показателем $1/2$:

$$|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} Tx dt \right| \leq \left\| \frac{d}{dt} Tx \right\|_Y |t_2 - t_1|^{1/2},$$

а потому может быть аппроксимирована полиномом $y \in Y$ так, что

$$\|Tx - \tilde{y}\| \leq \frac{D \|x\|}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, можно считать $\mu_1 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Аналогичные рассуждения приводят к значению для $\mu_2 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (в предположении, что производная правой части суммируема с квадратом). Если $p_1 = 0$, то таким же образом можно оценить $\frac{d^2}{dt^2} Tx$ и получить для μ_1 значение $\mu_1 = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Применение теоремы 2.3б дает порядок быстроты сходимости последовательности приближенных решений к точному

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Если же $p_1 = 0$, а y'' суммируема с квадратом, то

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Если p_1 , p_2 и y имеют производные более высоких порядков, то можно установить и более высокий порядок убывания погрешности приближенных решений, так как в этом случае x^* многократно дифференцируема и допускает в связи с этим более точную аппроксимацию полиномами.

Сходимость приближенных решений к точному во всех случаях имеет место в пространстве X , т. е. сами приближенные решения и их первые производные сходятся равномерно к точному решению и его первой производной соответственно. Вторые производные приближенных решений сходятся к второй производной решения в среднем.

5.4. Рассмотрим то же самое уравнение (18) при других определениях нормы в пространствах X и Y . Именно, примем

$$\|x\|_X = \max_{|t| < 1} |x''(t)|, \quad \|y\|_Y = \max_{|t| < 1} |y(t)|, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Очевидно, при этом нормы согласованы, так что $\|G\| = \|G^{-1}\| = 1$. Определение оператора Φ сохраним прежнее, это позволяет рассматривать приближенное уравнение как построенное специальным образом, следовательно, $\mu = 0$. Оценим норму Φ . Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ — ортогональные по весу единица полиномы (полиномы Лежандра). Проекцию Φ пространства Y на $\tilde{Y}$ можно записать при этом в форме

$$\Phi y = \sum_{k=1}^n (y, \zeta_k) \zeta_k.$$

Но согласно известной оценке отрезка разложения непрерывной функции в ряд по полиномам Лежандра (см., например, Агаханов и Натапсон [1])

$$\max_{|t| < 1} \left| \sum_{k=1}^n (y, \zeta_k) \zeta_k(t) \right| \leq A \sqrt{n}.$$

так что

$$\|\Phi\| \leq A \sqrt{n}. \quad (22)$$

Для аппроксимации элемента Tx полиномом, т. е. элементом из $\tilde{Y}$, воспользуемся тем, что

$$\left\| \frac{d}{dt} Tx \right\|_Y \leq C \|x\|.$$

Поэтому можно найти $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ так, что

$$\|Tx - \tilde{y}\| \leq \frac{D \|x\|}{n}.$$

Следовательно, $\mu_1 = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (если $p_1 = 0$, то можно взять $\mu_1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$). Наконец, $\mu_2 = \frac{E_n(y)}{\|y\|}$. По теореме 2.26, учитывая (22), имеем

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = (\mu_1 + \mu_2) O(\sqrt{n}).$$

Если $E_n(y) \forall n \rightarrow 0$, то имеет место равномерная сходимость приближенных решений к точному вместе с первой и второй производной. Если, кроме того, $p_1 = 0$ и y дважды дифференцируема, то

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right);$$

5.5. В качестве следующего применения рассмотрим решение уравнения

$$L(x) \equiv \frac{d}{dt} \left[p \frac{dx}{dt} \right] - \lambda \left\{ \frac{d}{dt} [qx] + rx \right\} = y \quad (23)$$

при условиях

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (24)$$

При этом будем предполагать функции p и q непрерывно дифференцируемыми и $p(t) > 0$. Кроме того, будем считать λ таким, что указанная граничная задача имеет единственное решение.

Решение по методу Галёркина разыскивается в форме

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \omega_k(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (25)$$

где ω_k ($k = 1, 2, \dots$) — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию (24):

$$\omega_k(0) = \omega_k(1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и такие, что их производные вместе с функцией, равной тождественно единице, образуют полную систему. Будем считать эту систему $\{\omega_k\}$ ортонормальной по весу p :

$$\int_0^1 p(t) \omega_j'(t) \omega_k'(t) dt = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots \quad (26)$$

К этой системе присоединим функцию $\omega_0(t) = \frac{1}{p(t)} \left[\int_0^1 \frac{ds}{p(s)} \right]^{-1/2}$,

тогда соотношение (26) будет иметь место и при $j, k = 0$, а система $\{\omega_k\}$ ($k = 0, 1, \dots$) будет полной ортонормальной системой.

Уравнение (23) вместе с условиями (24) рассматриваем как одно функциональное уравнение

$$Gx - \lambda Tx = y \quad (27)$$

в пространстве X , состоящем из дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничному условию (24). Норму в X определим, полагая

$$\|x\| = \left[\int_0^1 p(t) |x'(t)|^2 dt \right]^{1/2}, \quad (x_1, x_2) = \int_0^1 p(t) x_1'(t) x_2'(t) dt.$$

Пространство Y составим из непрерывных функций; метрику в Y введем из условия согласованности ее с метрикой пространства X :

$$\|y\|_Y = \|G^{-1}y\|_X, \quad (y_1, y_2)_Y = (G^{-1}y_1, G^{-1}y_2)_X.$$

В качестве X рассматривается множество элементов вида (25). За Y принимается множество элементов вида

$$y = \sum_{k=1}^n c_k G \omega_k. \quad (28)$$

Наконец, оператор Φ определяется как оператор ортогонального проектирования Y на X , так что $\|\Phi\| = 1$. Равенство $\Phi y = 0$ равносильно тому, что $(y, G \omega_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а это в силу определения скалярного произведения в Y эквивалентно соотношениям

$$(G^{-1}y, \omega_k)_X = \int_0^1 p(t) \frac{d}{dt} (G^{-1}y) \omega_k'(t) dt = - \int_0^1 y(t) \omega_k(t) dt = 0.$$

Уравнение метода Галёркина

$$\int_0^1 [L(x)(t) - y(t)] \omega_j(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

означает поэтому не что иное, как

$$\Phi[\dot{G}x - \lambda T x] = \Phi y,$$

т. е. специальным образом (2.3) построенное приближенное уравнение.

Для применения результатов § 2 имеем $\mu = 0$. Оценим μ_1 , для чего воспользуемся замечанием в 2.1 (неравенство (6)), т. е. будем приближать элемент $z = G^{-1}Tx$ с $\|x\| < 1$ элементом из X в метрике X . Имеем $Gz = Tx$ или

$$\frac{d}{dt} \left[p \frac{dz}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [p x] + r x.$$

*) Элемент $x = G^{-1}y$ есть решение уравнения $\frac{d}{dt} \left(p \frac{dx}{dt} \right) = y$, удовлетворяющее условиям (24).

Проинтегрировав это равенство от 0 до $u \leq 1$, найдем

$$\begin{aligned} p(u) x'(u) &= q(u) x(u) + \int_0^u r(t) x(t) dt + C = \\ &= q(u) \int_0^u x'(t) dt + \int_0^u \left(\int_t^u r(\tau) d\tau \right) x'(t) dt + C = \int_0^1 h(u, t) x'(t) dt + C, \end{aligned}$$

где

$$h(u, t) = \begin{cases} q(u) + \int_t^u r(\tau) d\tau, & t \leq u, \\ 0, & t > u. \end{cases}$$

Чтобы исключить C , проинтегрируем полученное равенство, разделив предварительно обе части на $p(u)$:

$$0 = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{1}{p(u)} h(t, u) du \right] x'(t) dt + C \int_0^1 \frac{du}{p(u)}.$$

Определяя отсюда C и подставляя в предыдущее равенство, получим

$$x'(u) = \int_0^1 K(u, t) x'(t) dt,$$

где

$$K(u, t) = \frac{1}{p(u)} h(u, t) - \frac{1}{p(u) \int_0^1 \frac{ds}{p(s)}} \int_0^1 \frac{1}{p(s)} h(s, t) ds.$$

Отметим, что, очевидно,

$$\int_0^1 K(u, t) du = 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ядро $K(u, t)$ допускает аппроксимацию отрезком ряда Фурье по $\{\omega_j'(u)\}$ ($j = 1, 2, \dots$):

$$K_n(u, t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \omega_j'(u), \quad \alpha_j(t) = \int_0^1 p(u) K(u, t) \omega_j'(u) du,$$

так как к функции $1/p(u)$ ядро ортогонально и система $\{\omega_j'\}$ ($j = 0, 1, \dots$) полная. Таким образом, монотонно убывая с возрастанием n ,

$$\int_0^1 p(u) [K(u, t) - K_n(u, t)]^2 du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (29)$$

Определяя $\tilde{x}$ из равенства

$$\tilde{x}'(u) = \int_0^1 K_n(u, t) x'(t) dt = \sum_{j=1}^n c_j \omega_j(u), \quad c_j = \int_0^1 \alpha_j(t) x'(t) dt,$$

мы получим нужное приближение. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \|z - \tilde{x}\|^2 &= \int_0^1 p(u) |z'(u) - \tilde{x}'(u)|^2 du = \\ &= \int_0^1 p(u) \left| \int_0^1 [K(u, t) - K_n(u, t)] x'(t) dt \right|^2 du \leq \\ &\leq \int_0^1 p(t) |x'(t)|^2 dt \int_0^1 \left[\int_0^1 |K(u, t) - K_n(u, t)|^2 p(u) du \right] \frac{dt}{p(t)} = \eta_n^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

где

$$\eta_n^2 = \int_0^1 \frac{dt}{p(t)} \int_0^1 [K(u, t) - K_n(u, t)]^2 p(u) du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Аналогичным образом устанавливается малость μ_n . Нужно доказать аппроксимируемость элемента $z = G^{-1}y$ элементом из X . Имеем

$$\frac{d}{dt} \left(p \frac{dz}{dt} \right) = y, \quad p \frac{dz}{dt} = \int y dt = F,$$

при этом F выбирается так, чтобы $\int_0^1 \frac{F(t)}{p(t)} dt = 0$, а тогда $\frac{dz}{dt} = \frac{F}{p}$

может быть аппроксимирована с помощью суммы вида $\sum_{k=1}^n c_k \omega_k$.

В случае, когда в качестве ω_k фигурируют тригонометрические функции, может быть оценен порядок приближения. Именно, пусть

$$\omega_k(t) = \sin k\pi t, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ядро $K(u, t)$ при этом нужно аппроксимировать суммами вида

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(t) \cos k\pi u,$$

где

$$\alpha_k(t) = 2 \int_0^1 K(u, t) \cos k\pi u du,$$

являясь коэффициентами Фурье функции ограниченной вариации,

имеют порядок $1/k$, а отклонение

$$\int_0^1 [K(u, t) - K_n(u, t)]^2 du = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k(t)|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому $\mu_1 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Так же легко проверить, что и $\mu_2 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае теорема 2.36 приводит к оценке

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

т. е. имеет место сходимость приближенных решений к точному в метрике пространства X , что, в частности, обеспечивает и равномерную сходимость с той же быстротой.

Если дифференциальное выражение $L(x)$ самосопряженное, т. е. если $q=0$, то метод Галёркина совпадает с методом Рунца. Предполагая в этом случае, что функция $p(u)K(u, t)$ имеет первую производную по u , являющуюся функцией ограниченной вариации (это выполняется, если аналогичным свойством обладают функции p и r), получим для коэффициентов Фурье порядок $1/k^2$, что приводит к оценке

$$\mu_1 = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

и соответствующей оценке быстроты сходимости приближенных решений к точному.

Использование замечания 1 к теореме 1.3 в случае, когда возможна хорошая аппроксимируемость решения функциями системы, позволяет получить еще более высокую быстроту сходимости приближенных решений.

§ 6. Применение к граничным задачам для уравнений эллиптического типа

6.1. Мы рассмотрим здесь применение общей теории приближенных методов при приближенном решении граничных задач для некоторых уравнений эллиптического типа. В частности, рассмотрим граничную задачу для уравнения

$$\Delta u + \lambda u = v \quad (1)$$

в области D , ограниченной кривой Γ , с граничным условием

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (2)$$

для случая m ($=2, 3$) измерений. При этом рассмотрении наряду с предложениями общей теории нам придется использовать и

некоторые факты из математической физики и теории аппроксимации, которые мы приводим без доказательства.

Теорема Гюнтера — Корна. Если u есть решение уравнения

$$\Delta u = f, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где Γ — гладкий контур и функция f удовлетворяет условию Липшица с показателем β и постоянной M ($f \in \text{Lip}_M \beta$), то $u(x, y)$ имеет вторые частные производные, удовлетворяющие условию Липшица с любым показателем $\beta' < \beta$, при этом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in \text{Lip}_{M'} \beta', \quad M' \leq CM, \quad C = C(\beta, \beta')^*).$$

Как известно, для случая функций одной переменной наличие тех или иных дифференциальных свойств функции обеспечивает возможность ее аппроксимации одновременно с производными алгебраическими или тригонометрическими полиномами. При этом, если функция обращается в нуль на концах промежутка $[a, b]$, то можно добиться того, чтобы аппроксимирующие функции также обращались на концах промежутка в нуль, в частности, в случае аппроксимации алгебраическими полиномами можно потребовать, чтобы они содержали множитель $(t-a)(b-t)$.

Аналогичного характера теоремы имеют место и по отношению к функциям многих переменных. Мы приведем формулировки двух таких теорем: одной, устанавливающей полноту соответствующей системы функций, и другой, дающей характеристику точности аппроксимации.

Теорема о полноте).** Пусть имеется область D , ограниченная контуром Γ , который определяется уравнением

$$\omega(x, y) = 0,$$

где ω — кусочно непрерывно дифференцируемая функция, и при этом

$$\omega(x, y) > 0, \quad (x, y) \in D; \quad \text{grad } \omega(x, y) \neq 0, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (4)$$

Тогда система функций вида

$$\psi(x, y) = \omega(x, y)P(x, y), \quad P — \text{полином},$$

полна в пространстве $\dot{W}_2^{(1)}$ (т. е. в пространстве функций из $W_2^{(1)}$, обращающихся в нуль на Γ).

Теорема Харрик*).** Пусть функция ω удовлетворяет условиям теоремы о полноте, но при этом k раз непрерывно дифференцируема и ее k -е производные удовлетворяют условию

*) См. Гюнтер [1].

**) См. Канторович, Крылов, с. 296.

***) См. Харрик [2].

Липшица. Тогда, если функция u k раз дифференцируема и ее k -е производные удовлетворяют условию Липшица с показателем α , то существует последовательность полиномов P_n не выше n -й степени таких, что функции ωP_n аппроксимируют и вместе с ее производными, точнее говоря,

$$\|u - \omega P_n\|_{C(r)} = O\left(\frac{1}{n^{k+\alpha-1}}\right), \quad (5)$$

где

$$\|u\|_{C(r)} = \sum_{i=0}^r \sum_{v_1+v_2=i} \max_D \left| \frac{\partial^i u}{\partial x^{v_1} \partial y^{v_2}} \right|. \quad (6)$$

6.2. Рассмотрим теперь поставленную в начале параграфа граничную задачу. Приближенное решение ее будем искать в виде

$$\tilde{u}(x, y) = \omega(x, y)P(x, y), \quad (7)$$

где P — полином степени не выше n , а ω удовлетворяет условиям теоремы Харрик при $k=1$. Коэффициенты полинома P (в числе N) определяются из системы уравнений

$$\iint_D (\Delta \tilde{u} + \lambda \tilde{u}) \zeta_k dx dy = \iint_D v \zeta_k dx dy, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

(о выборе ζ_k будет сказано несколько ниже).

Введем пространство U функций u дважды непрерывно дифференцируемых и обращающихся в нуль на Γ с метрикой и скалярным произведением, определяемым по формулам

$$\|u\| = \left[\iint_D |\Delta u|^2 dx dy \right]^{1/2}, \quad (u_1, u_2) = \iint_D \Delta u_1 \Delta u_2 dx dy.$$

За подпространство $\tilde{U}$ возьмем множество функций вида $\tilde{u}$. В качестве пространства V примем пространство функций вида $v = \Delta u$ ($u \in U$), иначе говоря, таких v , для которых имеется решение уравнения $\Delta u = v$, принадлежащее U . В пространстве V примем метрику гильбертова пространства $L^2(D)$. За $\tilde{V}$, наконец, возьмем совокупность функций вида $\tilde{v} = \Delta \tilde{u}$ ($\tilde{u} \in \tilde{U}$).

При таких определениях данную граничную задачу можно рассматривать как функциональное уравнение вида

$$Gu + \lambda Tu = v, \quad Gu = \Delta u, \quad Tu = au. \quad (9)$$

При этом метрики в пространствах U и V согласованы так, что G осуществляет изометрическое отображение U на V .

В качестве $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ может быть взята любая линейно независимая система функций в $\tilde{V}$, например,

$$\xi_{ij} = \Delta[\omega(x, y)x^i y^j], \quad i+j \leq n.$$

Тогда, если под преобразованием Φ понимать ортогональную проекцию V на $\tilde{V}$, то равенство $\Phi v = 0$ эквивалентно системе

уравнений

$$(v, \zeta_k) = \int_D v \zeta_k dx dy = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому система (8) может быть в новых обозначениях записана в виде

$$\Phi G \tilde{u} - \Phi T \tilde{u} = \Phi v, \quad (10)$$

т. е. приближенное уравнение построено специальным образом в соответствии с 2.3 и, таким образом, условие Iб удовлетворено при $\mu = 0$.

Для проверки условия IIб покажем, что для $u \in U$ будет $Tu = au \in \text{Lip } \beta$, где $\beta < 1$ в случае $m = 2$ и $\beta < 1/2$, если $m = 3$.

Действительно, так как $u \in U$, то $u \in W_2^{(2)}$. В таком случае по замечанию к теореме вложения (XI.4.4) $u \in \text{Lip } \beta$, где

$$\beta < 1, \quad m = 2, \quad \beta < 1/2, \quad m = 3.$$

Отсюда следует по теореме Гюнтера — Корна, что $z = G^{-1}Tu = \Delta^{-1}au$ имеет вторые производные, принадлежащие $\text{Lip } \beta'$, где $\beta' < \beta$, т. е. опять $\beta' < 1$ для $m = 2$ и $\beta' < 1/2$ для $m = 3$. При этом

$$\left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right\|_{\text{Lip } \beta'} \leq C \|u\|.$$

В таком случае по теореме Харрик функция z допускает аппроксимацию вместе со вторыми производными посредством функций вида $\tilde{u}$ порядка $1/n^{\beta'}$, а это обеспечивает оценку

$$\|G^{-1}Tu - \tilde{u}\| \leq \frac{C_1}{n^{\beta'}}.$$

Таким образом, условие IIб выполнено с $\mu = O(1/n^{\beta'})$.

Точно так же, если v принадлежит $\text{Lip } \beta$, в частности, если $v \in W_2^{(2)}$, то то же самое рассуждение показывает, что $\mu_2 = O(1/n^{\beta'})$. Все сказанное позволяет заключить о сходимости в данном случае метода моментов с основными функциями указанных видов, причем сходимость имеет место в метрике U_1 .

$$\|u^* - \tilde{u}_n^*\|_U = O\left(\frac{1}{n^{\beta'}}\right).$$

Отсюда легко заключить о равномерной сходимости функций. Действительно, используя представление u с помощью функции Грина, имеем

$$\begin{aligned} |u^*(x, y) - \tilde{u}_n^*(x, y)| &= \left| \int_D g(x, y) \Delta(u^* - \tilde{u}_n^*) dx dy \right| \leq \\ &\leq \left[\int_D |g(x, y)|^2 dx dy \right]^{1/2} \|u^* - \tilde{u}_n^*\| = O\left(\frac{1}{n^{\beta'}}\right). \end{aligned}$$

Отметим, что если известны большие данные о дифференциальных свойствах решения, то может быть установлена и большая быстрота сходимости.

6.3. Без указания точного порядка быстроты сходимости сам факт сходимости метода Галёркина может быть установлен в значительно более общих условиях, чем рассмотренного в 6.2 метода моментов.

Рассмотрим граничную задачу для уравнения

$$\Delta u + \lambda \left(au + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} \right) = v \quad (11)$$

при условии

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (12)$$

Будем предполагать коэффициенты a, b, c непрерывно дифференцируемыми функциями.

Разыскиваем решение в той же форме, что и выше, в 6.2. Коэффициенты определяем из системы метода Галеркина

$$\int_D \left[\Delta \tilde{u} + \lambda \left(\tilde{a} \tilde{u} + b \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) \right] \zeta_k dx dy = \int_D v \zeta_k dx dy, \\ k = 1, 2, \dots, N.$$

На этот раз функции ζ_k имеют вид $\zeta_k = \omega(x, y) P_k(x, y)$, где $P_k(x, y)$ — полиномы степени не выше n . Метрику в U в данном случае введем иным образом:

$$(u_1, u_2) = - \iint_D u_1 \Delta u_2 dx dy = \iint_D \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] dx dy, \\ \|u\|^2 = - \iint_D u \Delta u dx dy = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

В V вводим метрику соответствующим образом, т. е.

$$(v_1, v_2)_V = (G^{-1}v_1, G^{-1}v_2)_U, \quad \|v\|_V = \|G^{-1}v\|_U,$$

т. е. если u_1 и u_2 — решения уравнений $\Delta u = v_1$ и $\Delta u = v_2$, принадлежащие U , то принимаем

$$(v_1, v_2) = - \iint_D u_1 v_2 dx dy = - \iint_D u_2 v_1 dx dy, \\ \|v_1\|^2 = - \iint_D u_1 v_1 dx dy.$$

Рассматриваемая граничная задача по-прежнему может быть записана в форме одного функционального уравнения в пространстве U :

$$Gu + \lambda Tu = v, \quad Gu = \Delta u, \quad Tu = au + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y},$$

а приближенное уравнение принимает вид

$$G\tilde{u} + \lambda \Phi T\tilde{u} = \Phi v.$$

Имея в виду использовать теорему 1.6, проверим компактность оператора $G^{-1}T$.

Легко видеть, что пространство U линейно изометрично плотной части пространства $\dot{W}_2^{(1)}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно в качестве одной из возможных метрик в $\dot{W}_2^{(1)}$ взять метрику, определяемую функционалом $\int_{\Gamma} u(x, y) d\Gamma$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\dot{W}_2^{(1)}} &= \left| \int_{\Gamma} u(x, y) d\Gamma \right| + \left\{ \int_D |\operatorname{grad} u|^2 dx dy \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\}^{1/2} = \|u\|_U, \end{aligned}$$

поэтому оператор T можно рассматривать как непрерывный линейный оператор, отображающий пространство $\dot{W}_2^{(1)}$ в L^2 . В силу неравенства Бернштейна — Ладыженской обратный оператор Δ^{-1} , рассматриваемый как оператор из L^2 в $\dot{W}_2^{(2)}$, непрерывен (см. Ладыженская, гл. II, § 6). Следовательно, $\Delta^{-1}T \in B(\dot{W}_2^{(1)}, \dot{W}_2^{(2)})$. Оператор вложения $\dot{W}_2^{(2)}$ в $\dot{W}_2^{(1)}$ компактен (XI.3.5), следовательно, $\Delta^{-1}T$, рассматриваемый как оператор из $\dot{W}_2^{(1)}$ в $\dot{W}_2^{(1)}$, также компактен.

По теореме о полноте последовательность проекций $P_n = G^{-1}\Phi G$ сходится к тождественному оператору на U . Таким образом, применима теорема 1.6, на основании которой и можно заключить о сходимости метода Галёркина в пространстве U . Отсюда может быть получена и равномерная сходимость приближенных решений к точному.

Отметим, что приведенные рассуждения без каких-либо дополнительных соображений могут быть использованы и для случая, когда число независимых переменных задачи более двух. Изложенные в этом параграфе применения общей теории даны И. К. Даугаветом [4].

В заключение укажем, что другие интересные приложения методов, развитых в этой главе, имеются в ряде работ: см., в частности: Каландия [1, 2], Владимиров [1], Филиппов, Рябенский.

МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Метод наискорейшего спуска является в настоящее время одним из наиболее распространенных методов решения безусловных экстремальных задач. Первоначально он рассматривался как вариационный метод решения линейных функциональных уравнений и отыскания собственных чисел линейных операторов. Как и во всяком вариационном методе, задача о решении уравнения (отыскания собственного числа) сводится к задаче о нахождении экстремума некоторого функционала специального вида, заданного на всем пространстве. Оказалось, однако, что метод пригоден для минимизации функционалов гораздо более общего вида, чем те, о которых шла речь выше. За небольшое число шагов он приводит в достаточно малую окрестность стационарной точки (если функционал выпуклый, то в окрестность точки минимума).

Схема метода заключается в следующем: строится последовательность приближений к минимуму такого рода, что переход от одного приближения к следующему осуществляется по направлению наискорейшего убывания данного функционала. Отсюда и происходит название метода.

Идея метода наискорейшего спуска восходит еще к Коши, который рассмотрел метод в случае конечномерного пространства. В общем случае метод наискорейшего спуска для квадратичных функционалов разработан Л. В. Канторовичем (см. Канторович [7, 9]). При доказательстве общих теорем, приводимых ниже (§§ 1 и 2), использованы работы М. Ш. Бирмана [4, 2]. Некоторые видоизменения метода наискорейшего спуска и применения его к различным задачам см. Вайнберг; Красносельский и др.; Любич и Майстровский [1]. Применение метода наискорейшего спуска к решению эллиптических дифференциальных уравнений (§ 3) разработано в диссертации Л. Цаха (1955 г.). В § 4 использован подход, примененный ранее к исследованию метода условного градиента см. Демьянов, Рубинов.

§ 1. Решение линейных уравнений

1.1. Пусть Φ — вещественный (нелинейный) функционал, заданный на нормированном (вещественном или комплексном) пространстве X . Предположим, что функционал Φ ограничен снизу на X , и поставим задачу об отыскании элемента $x^* \in X$ (если такой существует), доставляющего наименьшее значение этому

функционалу:

$$\Phi(x) \geq \Phi(x^*), \quad x \in X.$$

Обычно для решения этой задачи поступают следующим образом: тем или иным способом строят последовательность $\{x_n\}$ «минимизирующую» функционал Φ в том смысле, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = \inf_{x \in X} \Phi(x).$$

В некоторых случаях указанную последовательность $\{x_n\}$ удастся построить так, что она сходится к некоторому элементу x^* . Если предполагать непрерывность Φ , то этот элемент и является решением задачи.

Метод наискорейшего спуска представляет собой способ построения последовательности $\{x_n\}$, которая для достаточно широкого класса функционалов является минимизирующей. Этот метод может быть сформулирован для функционалов Φ , дифференцируемых по направлениям. Введем соответствующее определение.

Пусть x — фиксированный элемент из X . Рассмотрим луч, исходящий из точки x в направлении z , т. е. совокупность элементов вида $x + \alpha z$, где α — вещественное неотрицательное число, а $z \neq 0$ — элемент из X , характеризующий направление луча^{*}). Сужение функционала Φ на указанный луч представляет собой функцию вещественного переменного; эта функция обозначается в дальнейшем через $\varphi(\alpha; x, z)$. Точнее говоря,

$$\varphi(\alpha; x, z) = \Phi(x + \alpha z), \quad \alpha \geq 0.$$

Производной функционала Φ по направлению z (в точке x) естественно при этом назвать выражение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x) = \frac{1}{\|z\|} \varphi'(\alpha; x, z) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{\|z\|} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\Phi(x + hz) - \Phi(x)}{h}.$$

Считая, что производная $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x)$ существует для каждого направления, предположим, кроме того, что имеется направление, по которому эта производная наименьшая. Указанное направление называется направлением наискорейшего спуска функционала Φ в точке x .

Перейдем к описанию метода наискорейшего спуска. Пусть функционал Φ дифференцируем в каждой точке x по всем направлениям, причем для каждого $x \in X$ существует направление наискорейшего спуска. Выберем произвольным образом элемент $x_0 \in X$ (нулевое приближение к минимуму). Пусть уже найдено x_k .

^{*}) Два ненулевых элемента z_1 и z_2 задают одно направление в том и только в том случае, когда они положительно пропорциональны (т. е. $z_1 = \lambda z_2$ при некотором $\lambda > 0$), или, что то же самое, z_1 и z_2 лежат на одном луче, исходящем из нуля. Обычно направление задается указанием какого-либо вектора, лежащего на этом луче.

Следующее приближение, точку x_{k+1} , естественно искать в виде

$$x_{k+1} = x_k + \epsilon_{k+1} z_{k+1}.$$

Здесь z_{k+1} — направление наискорейшего спуска в точке x_k . Числовой параметр ϵ_{k+1} называется величиной спуска. Он может находиться из разных соображений. Укажем лишь три из них.

1) Предположим, что $\frac{\partial \Phi}{\partial z_{k+1}}(x) < 0$ и производная $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x_k + \alpha z_{k+1})$ непрерывна как функция α . Тогда функция $\varphi(\alpha; x_k, z_{k+1})$ убывает по крайней мере на промежутке $[0, \alpha'_k]$, где α'_k — наименьший положительный корень уравнения $\varphi'(\alpha; x_k, z_{k+1}) = 0$. Этот корень и принимается за величину спуска ϵ_{k+1} .

2) Предположим, что функция $\varphi(\alpha; x_k, z_{k+1})$ достигает минимума на положительной полуоси в некоторой точке. Эту точку и принимают за величину спуска.

В случае, если Φ — строго выпуклый функционал, оба указанных метода совпадают (подробнее об этом см. в 4.4).

3) Зададимся последовательностью положительных чисел $\{\epsilon_k\}$ такой, что $\epsilon_k \rightarrow 0$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k = \infty$ (считаем, что направление z_k нормировано, т. е. $\|z_k\| = 1$). Величину спуска на k -м шаге полагаем равной ϵ_k .

Выбрав определенный способ отыскания величины спуска, в результате получим последовательность $\{x_k\}$, которая в ряде случаев оказывается минимизирующей. Описанная конструкция и составляет принципиальную схему метода наискорейшего спуска.

Аналогичная схема может быть использована и в случае, когда разыскивается наибольшее значение ограниченного сверху функционала. При этом вместо направления наискорейшего спуска надо рассматривать направление наискорейшего подъема.

1.2. Связь задачи о минимуме функционала с задачей решения линейного функционального уравнения устанавливается следующим образом.

Пусть U — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H . Обозначая, как всегда, через m и M границы оператора U (см. IX.4.3), будем предполагать, что $m > 0$; рассмотрим уравнение

$$Ux = y. \quad (1)$$

Так как $\mu = 0$ не принадлежит спектру оператора U , то существует обратный оператор U^{-1} (теорема IX.5.3), поэтому уравнение (1) имеет единственное решение $x^* = U^{-1}y$, каков бы ни был элемент $y \in H$.

Образуем, далее, функционал

$$F(x) = (Ux, x) - [(x, y) + (y, x)], \quad x \in H. \quad (2)$$

Теорема 1. Решение x^* уравнения (1) доставляет минимум функционалу (2). Наоборот, если элемент $\tilde{x}$ обращает в минимум функционал (2), то $\tilde{x}$ есть решение уравнения (1), т. е. $\tilde{x} = x^*$.

Доказательство. Так как $y = Ux^*$, то функционал F можно записать в форме

$$\begin{aligned} F(x) &= (Ux, x) - (x, Ux^*) - (Ux^*, x) = \\ &= (U(x - x^*), x - x^*) - (Ux^*, x^*). \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда

$$F(x) \geq m(x - x^*, x - x^*) - (Ux^*, x^*) \geq -(Ux^*, x^*) = F(x^*),$$

т. е. x^* минимизирует функционал F . Из этого же неравенства вытекает и вторая часть теоремы, так как

$$0 = F(\tilde{x}) - F(x^*) = (U(\tilde{x} - x^*), \tilde{x} - x^*) \geq m(\tilde{x} - x^*, \tilde{x} - x^*)$$

и, следовательно, $\tilde{x} = x^*$.

Замечание. Если существование решения x^* известно, то, как видно из доказательства теоремы, условие $m > 0$ можно заменить более слабым, предполагая лишь, что $(Ux, x) > 0$ для любого $x \neq 0$.

1.3. Применение метода наискорейшего спуска к функционалу (2) приводит к последовательности, сходящейся к x^* — решению уравнения (1), что позволяет рассматривать указанный метод как метод приближенного решения уравнения (1).

Выясним схему метода наискорейшего спуска применительно к функционалу (2). Если $x, z \in H$, то

$$\begin{aligned} F(x+z) &= (U(x+z), x+z) - [(x+z, y) + (y, x+z)] = \\ &= (Ux, x) - [(x, y) + (y, x)] + [(Ux - y, z) + (z, Ux - y)] + (Uz, z) = \\ &= F(x) + [(Ux - y, z) + (z, Ux - y)] + (Uz, z). \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x) = \frac{1}{\|z\|} [(Ux - y, z) + (z, Ux - y)] = \frac{2 \operatorname{Re} (Ux - y, z)}{\|z\|}.$$

Таким образом, направление наискорейшего спуска в точке x дается элементом $(-z_1)$, где

$$z_1 = Ux_0 - y.$$

Для нахождения величины ϵ_1 составим уравнение

$$\varphi'(\alpha; x_0, -z_1) = 0,$$

где в силу (4)

$$\varphi(\alpha; x_0, -z_1) = F(x_0 - \alpha z_1) = F(x_0) - 2\alpha(z_1, z_1) + \alpha^2(Uz_1, z_1).$$

Таким образом,

$$\epsilon_1 = \frac{(z_1, z_1)}{(Uz_1, z_1)}.$$

Окончательно имеем

$$x_1 = x_0 - \varepsilon_1 z_1.$$

Точно так же

$$x_2 = x_1 - \varepsilon_2 z_2, \quad z_2 = Ux_1 - y, \quad \varepsilon_2 = \frac{(z_2, z_2)}{(Uz_2, z_2)},$$

и вообще

$$x_n = x_{n-1} - \varepsilon_n z_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$z_n = Ux_{n-1} - y, \quad \varepsilon_n = \frac{(z_n, z_n)}{(Uz_n, z_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Построенная последовательность $\{x_n\}$ является минимизирующей. Более того, справедлива

Теорема 2. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу x^* . Быстрота сходимости дается неравенством

$$\|x_n - x^*\| \leq C \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n, \quad n = 0, 1, \dots; \quad C = \frac{\|z_1\|}{m}. \quad (5)$$

Доказательство. Преобразуем уравнение (4), записав его

$$x = x - kUx + ky. \quad (6)$$

Числовой множитель $k > 0$ выберем так, чтобы оператор

$$T = I - kU$$

имел возможно меньшую норму. Так как границы оператора T будут $1 - km$ (верхняя) и $1 - kM$ (нижняя), то минимум нормы будет достигнут, если

$$1 - km = -(1 - kM),$$

откуда

$$k = \frac{2}{M+m}.$$

При этом

$$\|T\| = 1 - km = kM - 1 = \frac{M-m}{M+m}. \quad (7)$$

Обозначим

$$\tilde{x}_1 = Tx_0 + ky = x_0 - k(Ux_0 - y) = x_0 - kz_1. \quad (8)$$

Введем теперь оператор $V = U^{1/2}$ (см. теорему V.6.2). Используя (3), можно записать функционал F в форме

$$\begin{aligned} F(x) &= (U(x - x^*), x - x^*) - (Ux^*, x^*) = \\ &= (V(x - x^*), V(x - x^*)) - (Vx^*, Vx^*) = \|V(x - x^*)\|^2 - \|Vx^*\|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Но ввиду очевидного неравенства $F(\tilde{x}_1) \geq F(x_1)$ имеем

$$F(x_1) - F(x^*) \leq F(\tilde{x}_1) - F(x^*),$$

что можно переписать, используя (9), и так:

$$\|V(x_1 - x^*)\| \leq \|V(\tilde{x}_1 - x^*)\|. \quad (10)$$

Уравнение (6) равносильно уравнению (1). Поэтому

$$x^* = Tx^* + ky.$$

Вычитая это из равенства (8), получим

$$\tilde{x}_1 - x^* = T(x_0 - x^*)$$

и, следовательно,

$$V(\tilde{x}_1 - x^*) = TV(x_0 - x^*);$$

откуда

$$\|V(\tilde{x}_1 - x^*)\| \leq \|T\| \|V(x_0 - x^*)\| = \frac{M-m}{M+m} \|V(x_0 - x^*)\|.$$

Сравнивая это с (10), будем иметь

$$\|V(x_1 - x^*)\| \leq \frac{M-m}{M+m} \|V(x_0 - x^*)\|. \quad (M)$$

Проведя аналогичные рассуждения для каждого $n = 1, 2, \dots$, придем к неравенствам

$$\|V(x_n - x^*)\| \leq \frac{M-m}{M+m} \|V(x_{n-1} - x^*)\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

В конце концов получаем

$$\|V(x_n - x^*)\| \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|V(x_0 - x^*)\|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Так как функция $t^{-1/2}$ непрерывна в $[m, M]$ и тем более на спектре оператора U , то существует обратный оператор V^{-1} . При этом (см. теорему IX.5.2)

$$\|V^{-1}\| = \max_{t \in S_U} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Отметим еще, что

$$\|V\| = \max_{t \in S_U} \sqrt{t} = \sqrt{M}.$$

В силу сказанного находим, используя (12),

$$\begin{aligned} \|x_n - x^*\| &= \|V^{-1}V(x_n - x^*)\| \leq \|V^{-1}\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|V(x_0 - x^*)\| \leq \\ &\leq \|V^{-1}\| \|V\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|x_0 - x^*\| = \sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|x_0 - x^*\|. \end{aligned}$$

Полученная оценка неудобна тем, что в правую часть ее входит неизвестный элемент x^* . Чтобы избежать этого, заметим, что

$$\|V(x_0 - x^*)\| = \|V^{-1}U(x_0 - x^*)\| \leq \|V^{-1}\| \|Ux_0 - y\| = \frac{\|z_1\|}{\sqrt{m}}.$$

Это позволяет написать

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\|z_1\|}{m} \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

что совпадает с (5). Теорема доказана.

1.4. Выразим p -е приближение x_p через x_0 и z_1 . Имеем
 $x_2 = x_1 - \varepsilon_2 z_2 = x_1 - \varepsilon_2 (U x_1 - y) = x_0 - \varepsilon_1 z_1 - \varepsilon_2 (U x_0 -$
 $- y - \varepsilon_1 U z_1) = x_0 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) z_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 U z_1 = x_0 + \lambda_1^{(2)} z_1 + \lambda_2^{(2)} U z_1.$

По индукции без труда докажем, что

$$x_p = x_0 + \lambda_1^{(p)} z_1 + \dots + \lambda_p^{(p)} U^{p-1} z_1. \quad (13)$$

Рассмотрим элемент

$$x_{(1)} = x_0 + \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_p U^{p-1} z_1$$

и определим комплексные коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ из условия, что функционал $F(x_{(1)})$ минимален. Так как

$$F(x_{(1)}) = \left(U x_0 + \sum_{j=1}^p \lambda_j U^j z_1, x_0 + \sum_{j=1}^p \lambda_j U^{j-1} z_1 \right) -$$

$$- [(x_{(1)}, y) + (y, x_{(1)})] = F(x_0) + \sum_{j=1}^p (\lambda_j + \bar{\lambda}_j) (U^{j-1} z_1, z_2) +$$

$$+ \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \lambda_j \bar{\lambda}_k (U^j z_1, U^{k-1} z_1),$$

то, обозначая $\lambda_k = \sigma_k + \tau_k i$ ($k = 1, 2, \dots, p$), получим для определения λ_k две системы равенств:

$$\frac{\partial F(x_{(1)})}{\partial \sigma_j} = 0, \quad \frac{\partial F(x_{(1)})}{\partial \tau_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

т. е., в развернутом виде,

$$(U^{j-1} z_1, z_1) + \sum_{k=1}^p \sigma_k (U^j z_1, U^{k-1} z_1) = 0, \quad \sum_{k=1}^p \tau_k (U^j z_1, U^{k-1} z_1) = 0.$$

Умножая второе равенство на i , складывая с первым и принимая во внимание, что $(U^j z_1, U^{k-1} z_1) = (U^{j+k-1} z_1, z_1)$, можем объединить написанные системы в одну:

$$(U^{j-1} z_1, z_2) + \sum_{k=1}^p \lambda_k (U^{j+k-1} z_1, z_1) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (14)$$

Поскольку искомый минимум, очевидно, существует, указавшая система имеет решение *).

Исходя из элемента $x_{(1)}$, строим подобным же образом элемент $x_{(2)}$ и т. д., в результате чего приходим к последовательности $x_{(0)} = x_0, x_{(1)}, \dots$, которая соответствует p -шаговому варианту метода наискорейшего спуска.

*) Хотя это решение может быть не единственно. Следует отметить, однако, что величина $F(x_{(1)})$ не зависит от выбора того или иного решения.

Из способа построения последовательности p -шагового процесса ясно, что сходимость ее к x^* будет по крайней мере в p раз быстрее, чем у последовательности $\{x_n\}$. Действительно, используя доказательство теоремы 2, нетрудно проверить, что

$$\|x_{(n)} - x^*\| \leq \frac{\|z_1\|}{m} \left[\left(\frac{M-m}{M+m} \right)^p \right]^n. \quad (15)$$

Однако, как и следует ожидать, фактически сходимость еще более быстрая.

Теорема 3 (Бирман). *Справедлива оценка*

$$\|x_{(n)} - x^*\| \leq \frac{\|z_1\|}{m} \left[\frac{1}{\vartheta_p \left(\frac{M+m}{M-m} \right)} \right]^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где $\vartheta_p(t)$ — полином Чебышёва степени p :

$$\vartheta_p(t) = \cos p \arccos t \quad (\text{при } t \in [-1, 1]).$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$x = Tx + \tilde{y}, \quad T = I - U\varphi(U), \quad \tilde{y} = \varphi(U)y, \quad (17)$$

где $\varphi(t)$ — полином степени $p-1$. Обозначим

$$\tilde{x}_1 = Tx_0 + \tilde{y} = x_0 - \varphi(U)(Ux_0 - y) =$$

$$= x_0 - \varphi(U)z_1 = x_0 + \sum_{h=1}^p c_h U^{h-1} z_1.$$

Ясно, что $F(\tilde{x}_1) \geq F(x_{(1)})$, а тогда, повторяя рассуждения теоремы 2, получим

$$\|x_{(n)} - x^*\| \leq \frac{\|z_1\|}{m} \|T\|^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Так как

$$\|T\| \leq \max_{t \in [m, M]} |1 - t\varphi(t)|,$$

то естественно определить полином $\varphi(t)$ из условия, что $\max_{t \in [m, M]} |1 - t\varphi(t)|$ минимален. Если обозначить $\psi(t) = 1 - t\varphi(t)$, то $\psi(t)$ будет полиномом p -й степени, наименее уклоняющимся от нуля в промежутке $[m, M]$, причем $\psi(0) = 1$. Как известно *),

$$\psi(t) = \frac{\vartheta_p \left(\frac{2t - M - m}{M - m} \right)}{\vartheta_p \left(\frac{M + m}{M - m} \right)}.$$

Ввиду того, что

$$\max_{t \in [m, M]} \left| \vartheta_p \left(\frac{2t - M - m}{M - m} \right) \right| = \max_{t \in [-1, 1]} |\vartheta_p(t)| = 1,$$

*) См. Гончаров [1], с. 230.

для $\|T\|$ получаем оценку

$$\|T\| \leq \max_{t \in [m, M]} |\psi(t)| = \frac{1}{\vartheta_p \left(\frac{M+m}{M-m} \right)},$$

а это в силу (18) доказывает теорему.

Замечание 1. Пусть $\rho(t)$ — произвольный полином степени p . Тогда справедливо неравенство (Натансон — I, с. 78)

$$|\rho(t_0)| \leq |\vartheta_p(t_0)| \max_{t \in [-1, 1]} |\rho(t)|, \quad |t_0| > 1.$$

Взяв здесь $\rho(t) = t^p$, $t_0 = \frac{M+m}{M-m}$, будем иметь.

$$\frac{1}{\vartheta_p \left(\frac{M+m}{M-m} \right)} \leq \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^p.$$

Таким образом, (15) является следствием оценки (16).

Замечание 2. Так как

$$\frac{\vartheta_p(t)}{t^p} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{p-1}},$$

то, если $\frac{M+m}{M-m}$ достаточно велико, оценка (16) отличается от оценки (15) множителем, близким к $(1/2^{p-1})^n$.

В работе Самокиша [1] при некоторых дополнительных предположениях о спектре оператора U получена более точная по сравнению с (16) оценка.

Замечание 3. В случае $m=0$ можно показать, что если решение уравнения (1) существует (не обязательно единственное), то метод наискорейшего спуска сходится к решению x^* , ближайшему к x_0 (Фридман [1]). При этом справедлива оценка $F(x_n) - F(x^*) = O(1/n)$, однако скорость сходимости x_n к x^* может быть сколь угодно медленной.

§ 2. Нахождение собственных значений компактных операторов

2.1. Рассмотрим теперь компактный самосопряженный оператор U . Будем предполагать, не умаляя общности, что $M > |m| \geq 0$ (см. IX.4.3). Тогда

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Ux, x) = \sup_{x \neq 0} \frac{(Ux, x)}{(x, x)} = \frac{(Ux^*, x^*)}{(x^*, x^*)},$$

где x^* — собственный элемент, отвечающий наибольшему собственному значению $\lambda_1 = M$. Таким образом, λ_1 есть наибольшее значение функционала

$$L(x) = \frac{(Ux, x)}{(x, x)},$$

и согласно IX.4.3 каждый элемент, реализующий максимум, является собственным элементом.

Для нахождения максимума функционала L применим метод наискорейшего спуска *). Возьмем произвольный нормированный элемент $x_0 \in H$. Так как

$$L(x_0 + \alpha z) = \frac{(Ux_0, x_0) + \alpha(Ux_0, z) + \alpha(z, Ux_0) + \alpha^2(Uz, z)}{1 + \alpha(x_0, z) + \alpha(z, x_0) + \alpha^2(z, z)}, \quad (1)$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z}(x_0) &= \frac{[(Ux_0, z) + (z, Ux_0)] - [(x_0, z) + (z, x_0)](Ux_0, x_0)}{\|z\|} = \\ &= \frac{(Ux_0 - \mu_0 x_0, z) + (z, Ux_0 - \mu_0 x_0)}{\|z\|}, \end{aligned}$$

где через μ_0 обозначена величина

$$\mu_0 = L(x_0) = (Ux_0, x_0).$$

Из выражения $\frac{\partial L}{\partial z}(x_0)$ ясно, что направление «градиента» дается элементом $z_1 = Ux_0 - \mu_0 x_0$ (считаем $z_1 \neq 0$).

Таким образом, ε_1 определится из уравнения

$$\varphi'(\alpha; x_0, z_1) = 0, \quad (2)$$

где

$$\varphi(\alpha; x_0, z_1) = L(x_0 + \alpha z_1).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} (x_0, z_1) &= (x_0, Ux_0 - \mu_0 x_0) = (x_0, Ux_0) - \mu_0(x_0, x_0) = 0, \\ (Ux_0, z_1) &= (\mu_0 x_0 + z_1, z_1) = \mu_0(x_0, z_1) + (z_1, z_1) = (z_1, z_1), \end{aligned}$$

после элементарных преобразований запишем уравнение (2) в виде

$$\frac{2[(z_1, z_1) + [(Uz_1, z_1) - \mu_0(z_1, z_1)]\alpha - (z_1, z_1)^2 \alpha^2]}{[1 + \alpha^2(z_1, z_1)]^2} = 0.$$

Итак, ε_1 есть положительный корень уравнения

$$(z_1, z_1)^2 \alpha^2 - [(Uz_1, z_1) - \mu_0(z_1, z_1)]\alpha - (z_1, z_1) = 0,$$

т. е.

$$\varepsilon_1 = \frac{[(Uz_1, z_1) - \mu_0(z_1, z_1)] + \sqrt{[(Uz_1, z_1) - \mu_0(z_1, z_1)]^2 + 4(z_1, z_1)^3}}{2(z_1, z_1)^2}.$$

Полагая

$$x^{(1)} = x_0 + \varepsilon_1 z_1,$$

мы в качестве следующего приближения берем элемент

$$x_1 = \frac{x^{(1)}}{\|x^{(1)}\|} = \frac{x_0 + \varepsilon_1 z_1}{\|x_0 + \varepsilon_1 z_1\|}.$$

*) Точнее говоря, метод «наискорейшего подъема».

Проделявая с элементом x_1 те же операции и продолжая так дальше, получим последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$:

$$x_n = \frac{x^{(n)}}{\|x^{(n)}\|}, \quad x^{(n)} = x_{n-1} + \varepsilon_n z_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

где

$$z_n = Ux_{n-1} - \mu_{n-1}x_{n-1}, \quad \mu_{n-1} = L(x_{n-1}) = (Ux_{n-1}, x_{n-1}),$$

$$\varepsilon_n = \frac{[(Uz_n, z_n) - \mu_{n-1}(z_n, z_n)] + \sqrt{[(Uz_n, z_n) - \mu_{n-1}(z_n, z_n)]^2 + 4(z_n, z_n)^3}}{2(z_n, z_n)^2},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

2.2. Относительно сходимости последовательности $\{\mu_n\}$ к λ_1 и последовательности $\{x_n\}$ к соответствующему собственному элементу имеет место

Теорема 1. Если элемент x_0 не ортогонален собственному подпространству, отвечающему наибольшему собственному значению $\lambda_1 = M$, то $\mu_n \rightarrow \lambda_1$ и $x_n \rightarrow x^*$, где x^* — собственный элемент, принадлежащий собственному значению λ_1 .

Доказательство. Обозначим через λ_k ($k = 1, 2, \dots$) различные собственные значения оператора U , через $H_{\lambda_k} = H_k$ соответствующие собственные подпространства и через P_k проекторы на эти подпространства. Положим, далее,

$$x_k^* = \frac{P_k x_0}{\|P_k x_0\|} (*).$$

Имеем, согласно IX.4.5,

$$x_0 = \sum_k P_k x_0 = \sum_k \|P_k x_0\| x_k^* = \sum_k c_{0k} x_k^*, \quad c_{0k} = \|P_k x_0\|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Ясно, что $c_{0k} \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots$) и по условию теоремы $c_{01} > 0$. Поскольку слагаемые в правой части (3) попарно ортогональны, а $\|x_k^*\| = 1$, то

$$\sum_k c_{0k}^2 = \|x_0\|^2 = 1$$

и, наконец,

$$\mu_0 = (Ux_0, x_0) = \sum_k \lambda_k c_{0k}^2, \quad \mu_0 \leq \lambda_1.$$

Элемент x_1 также можно выразить через элементы $x_1^*, x_2^*, \dots$. Действительно,

$$x_1 = \frac{x^{(1)}}{\|x^{(1)}\|} = \frac{x_0 + \varepsilon_1 z_1}{\|x^{(1)}\|} = \frac{x_0 + \varepsilon_1 (Ux_0 - \mu_0 x_0)}{\|x^{(1)}\|}.$$

) Если $P_k x_0 = 0$, то $x_k^ = 0$.

А так как

$$Ux_0 = \sum \lambda_k c_{0k} x_k^*,$$

то

$$x_1 = \sum_k c_{1k} x_k^*, \quad c_{1k} = \frac{[1 + \varepsilon_1 (\lambda_k - \mu_0)] c_{0k}}{\|x^{(1)}\|}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Так же, как и выше,

$$\sum_k c_{1k}^2 = 1, \quad \mu_1 = \sum_k \lambda_k c_{1k}^2, \quad c_{11} > 0.$$

Вообще

$$x_n = \sum_k c_{nk} x_k^*, \quad c_{nk} = \frac{[1 + \varepsilon_n (\lambda_k - \mu_{n-1})] c_{n-1,k}}{\|x^{(n)}\|}; \quad k, n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

причем

$$\sum_k c_{nk}^2 = 1, \quad \mu_n = \sum_k \lambda_k c_{nk}^2, \quad c_{n1} > 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Выразим μ_n через μ_{n-1} . В соответствии с формулой (1) имеем

$$\begin{aligned} \mu_n = L(x_n) = L(x^{(n)}) &= L(x_{n-1} + \varepsilon_n z_n) = \\ &= \frac{(Ux_{n-1}, x_{n-1}) + 2\varepsilon_n (Ux_{n-1}, z_n) + \varepsilon_n^2 (Uz_n, z_n)}{1 + 2\varepsilon_n (x_{n-1}, z_n) + \varepsilon_n^2 (z_n, z_n)}. \end{aligned}$$

Но

$$(x_{n-1}, z_n) = (x_{n-1}, Ux_{n-1} - \mu_{n-1} x_{n-1}) = 0,$$

$$(Ux_{n-1}, z_n) = (\mu_{n-1} x_{n-1} + z_n, z_n) = (z_n, z_n).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{\mu_{n-1} + 2\varepsilon_n (z_n, z_n) + \varepsilon_n^2 (Uz_n, z_n)}{1 + \varepsilon_n^2 (z_n, z_n)} = \\ &= \mu_{n-1} + \frac{2\varepsilon_n (z_n, z_n) + \varepsilon_n^2 [(Uz_n, z_n) - \mu_{n-1} (z_n, z)]}{1 + \varepsilon_n^2 (z_n, z_n)}. \end{aligned}$$

При этом ε_n удовлетворяет уравнению

$$(z_n, z_n)^2 \varepsilon_n^2 - [(Uz_n, z_n) - \mu_{n-1} (z_n, z_n)] \varepsilon_n - (z_n, z_n) = 0, \quad (6)$$

так что

$$\varepsilon_n^2 [(Uz_n, z_n) - \mu_{n-1} (z_n, z_n)] = \varepsilon_n^3 (z_n, z_n)^2 - \varepsilon_n (z_n, z_n).$$

учитывая это, получаем

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \frac{2\varepsilon_n (z_n, z_n) + \varepsilon_n^2 (z_n, z_n)^2 - \varepsilon_n (z_n, z_n)}{1 + \varepsilon_n^2 (z_n, z_n)},$$

откуда окончательно

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \varepsilon_n (z_n, z_n). \quad (7)$$

Поскольку $\varepsilon_n > 0$, то $\mu_n > \mu_{n-1}$ и, следовательно, ввиду ограниченности последовательности $\{\mu_n\}$ ($\mu_n \leq \lambda_1$) она имеет предел, который мы обозначим через μ :

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n.$$

Из (7) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(z_n, z_n) = 0, \quad (8)$$

а вследствие соотношения

$$|\varepsilon_n(Uz_n, z_n)| \leq \|U\| \varepsilon_n(z_n, z_n)$$

имеем также

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(Uz_n, z_n) = 0. \quad (9)$$

Учитывая (8) и (9), получим, переходя к пределу в уравнении (6),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n, z_n) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [Ux_n - \mu_n x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = 0. \quad (10)$$

Поскольку оператор U компактен, а последовательность $\{x_n\}$ ограничена, существует подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$ такая, что $\{Ux_{n_j}\}$ сходится. Из соотношения (10) вытекает, что последовательность $\{x_{n_j}\}$ сходящаяся. Пусть $x_{n_j} \rightarrow \tilde{x}$. Переходя к пределу в равенстве

$$Ux_{n_j} - \mu_{n_j} x_{n_j} = z_{n_j+1},$$

найдем

$$U\tilde{x} - \mu\tilde{x} = 0.$$

Таким образом, μ является собственным значением, а $\tilde{x}$ — соответствующим собственным элементом. Покажем, что $\mu = \lambda_s$, а $\tilde{x} = x_s^*$. Предположим, что $\mu = \lambda_s$ ($s > 1$). Учитывая (4), будем иметь

$$\tilde{x} = \sum_k c_k x_k^*, \quad c_k = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j k}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Но $(\tilde{x}, x_k^*) = 0$ ($k \neq s$), поэтому $\tilde{x} = c_s x_s^*$, причем $|c_s| = 1$. Поскольку $c_{ns} > 0$, то окончательно находим $c_s = 1$ и $\tilde{x} = x_s^*$.

Рассмотрим отношение c_{ns}/c_{n1} . В соответствии с (4) имеем

$$\frac{c_{ns}}{c_{n1}} = \frac{1 + \varepsilon_n(\lambda_s - \mu_{n-1})}{1 + \varepsilon_n(\lambda_1 - \mu_{n-1})} \frac{c_{n-1,s}}{c_{n-1,1}} < \frac{c_{n-1,s}}{c_{n-1,1}},$$

т. е. рассмотренное отношение убывает с увеличением n . Но

$\lim_{j \rightarrow \infty} c_{nj^2} = c_s = 1$, и поэтому $\lim_{j \rightarrow \infty} c_{nj1} = c_1 = 0$, вследствие чего

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{c_{nj^2}}{c_{nj1}} = \infty,$$

что противоречит установленному выше. Таким образом, $\mu = \lambda_1$, $\tilde{x} = x_1^*$.

Докажем теперь сходимость всей последовательности $\{x_n\}$ к x_1^* . Пусть d — расстояние от точки λ_1 до остальной части спектра оператора U . Имеем

$$\begin{aligned} \|x_n - x_1^*\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|x_1^*\|^2 - (x_n, x_1^*) - (x_1^*, x_n) = \\ &= 2(1 - c_{n1}) \leq 2(1 - c_{n1}^2) = 2 \sum_{k \geq 2} c_{nk}^2 \leq \frac{2}{d} \sum_k (\lambda_1 - \lambda_k) c_{nk}^2. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (23)

$$\sum_k (\lambda_1 - \lambda_k) c_{nk}^2 = \lambda_1 \sum_k c_{nk}^2 - \sum_k \lambda_k c_{nk}^2 = \lambda_1 - \mu_n,$$

то

$$\|x_n - x_1^*\| \leq \frac{2}{d} (\lambda_1 - \mu_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Если принять во внимание, что $\mu_n \rightarrow \lambda_1$, то отсюда и следует, что $x_n \rightarrow x_1^*$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Относительно быстроты сходимости $\mu_n \rightarrow \lambda_1$ может быть установлен следующий факт:

$$\lambda_1 - \mu_n \leq q^2(1 + \alpha_n)(\lambda_1 - \mu_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$q = \frac{M - m - d}{M - m + d},$$

а последовательность $\{\alpha_n\}$, монотонно убывая, стремится к нулю.

Таким образом, если n настолько велико, что $q(1 + \alpha_n) < 1$, быстрота сходимости характеризуется геометрической прогрессией. С помощью оценки (11) можно охарактеризовать и быстроту сходимости $x_n \rightarrow x_1^*$.

По поводу применения метода наискорейшего спуска к разысканию собственных значений см. Самокиш [2].

§ 3. Применение к эллиптическим дифференциальным уравнениям

3.1. Рассмотрим применение метода наискорейшего спуска к решению эллиптического дифференциального уравнения. Для простоты рассмотрим граничную задачу для самосопряженного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными для случая замкнутого круга D (с центром в начале координат),

ограниченного окружностью S :

$$Lx = -\frac{\partial}{\partial s} \left(a \frac{\partial x}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(b \frac{\partial x}{\partial t} \right) + cx = \varphi, \quad x|_S = 0; \quad (1)$$

коэффициенты a и b данного уравнения предполагаются непрерывно дифференцируемыми функциями; функции c и φ — непрерывными; кроме того, будем считать, что $a, b > 0$; $c \geq 0$ в круге D .

Применим к обоим частям рассматриваемого уравнения оператор $-\Delta^{-1}$. Получим новое уравнение

$$Ux = -\Delta^{-1}Lx = \psi, \quad \psi = -\Delta^{-1}\varphi, \quad (2)$$

которое будем решать в подпространстве $\dot{W}_2^{(1)}$ функций из $W_2^{(1)}$, обращающихся в нуль на S . Как отмечено в XIV.6.3, оператор Δ^{-1} является непрерывным линейным оператором, отображающим пространство L^2 на $\dot{W}_2^{(2)}$, так что $\psi \in \dot{W}_2^{(2)}$.

Проверим, что для оператора $U = -\Delta^{-1}L$ выполнены условия § 1. Пусть x — дважды непрерывно дифференцируемая функция из $\dot{W}_2^{(1)}$. Так как Lx есть непрерывная функция, то $y = Ux = -\Delta^{-1}Lx \in \dot{W}_2^{(2)} \subset \dot{W}_2^{(1)}$. Применяя два раза формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} (Ux, x) &= (-\Delta^{-1}Lx, x) = (y, x) = \iint_D \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t} \right) ds dt = \\ &= - \iint_D x \left[\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] ds dt = - \iint_D x \Delta y ds dt = \\ &= \iint_D x \left[-\frac{\partial}{\partial s} \left(a \frac{\partial x}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(b \frac{\partial x}{\partial t} \right) + cx \right] ds dt = \\ &= \iint_D \left[a \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + b \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + cx^2 \right] ds dt. \quad (3) \end{aligned}$$

Это соотношение дает

$$(Ux, x) \geq \alpha \iint_D \left[\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \right] ds dt = \alpha (x, x), \quad (4)$$

где

$$\alpha = \min [\min a(s, t), \min b(s, t)], \quad (s, t) \in D.$$

Так как на основании теоремы вложения (теорема XI.4.3)

$$\iint_D |x(s, t)|^2 ds dt \leq A \|x\|_{\dot{W}_2^{(1)}}^2,$$

то, используя это в (3), найдем

$$(Ux, x) \leq \beta \int_D \left[\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \right] ds dt = \beta(x, x), \quad (5)$$

где

$$\beta = 2 \max [\max a(s, t), \max b(s, t), A \max c(s, t)], \quad (s, t) \in D.$$

Далее, рассуждая так же, как и при выводе (3), приходим к равенству

$$(Ux, y) = (x, Uy), \quad (6)$$

справедливому для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций $x, y \in \dot{W}_2^{(1)}$. Сопоставляя (4), (5) и (6), получаем, что оператор U , рассматриваемый на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций из $\dot{W}_2^{(1)}$, ограничен, а тогда, поскольку указанное множество функций плотно в $\dot{W}_2^{(1)}$, он будет ограниченным и в $\dot{W}_2^{(1)}$. Соотношения (4), (5) и (6) распространяются при этом на все пространство $\dot{W}_2^{(1)}$. Таким образом, U является самосопряженным оператором, причем для его границ m и M имеем оценки

$$m \geq \alpha > 0, \quad M \leq \beta. \quad (7)$$

Применим к уравнению (2) метод наискорейшего спуска. Если $x_0 \in \dot{W}_2^{(1)}$ — начальное приближение, то последовательные приближения x_n находятся по формулам из XV.1.3

$$x_n = x_{n-1} - \varepsilon_n z_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$z_n = Ux_{n-1} - \psi = \Delta^{-1}(Lx_{n-1} - \varphi),$$

т. е. z_n находится из уравнения

$$\Delta z = Lx_{n-1} - \varphi, \quad z|_S = 0.$$

Для ε_n на основании (3) находим выражение

$$\varepsilon_n = \frac{(z_n, z_n)}{(Uz_n, z_n)} = \frac{\int_D \left[\left(\frac{\partial z_n}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_n}{\partial t} \right)^2 \right] ds dt}{\int_D \left[a \left(\frac{\partial z_n}{\partial s} \right)^2 + b \left(\frac{\partial z_n}{\partial t} \right)^2 + c z_n^2 \right] ds dt}.$$

Что касается сходимости процесса, то на основании теоремы 1.2. вследствие (7) имеем

$$\|x_n - x^*\| \leq C \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n \leq C \left(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} \right)^n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где x^* — решение уравнения (2) или, что то же, решение граничной задачи (1).

3.2. Построенный процесс последовательных приближений оказывается особенно эффективным, если коэффициенты данного уравнения функции a , b , c и его правая часть φ — полиномы. В этом случае, беря в качестве x_0 также полином, мы получим для определения z_1 уравнение

$$\Delta z = p, \quad (9)$$

где p есть полином. Нетрудно видеть, что решение этого уравнения (лежащее в $\dot{W}_2^{(1)}$) также является полиномом, степень которого на две единицы выше степени полинома p . Действительно, запишем z в виде

$$z(s, t) = (s^2 + t^2 - 1)\pi(s, t), \quad (10)$$

где π — полином с неопределенными коэффициентами той же степени, что и p . Подставляя выражение (10) в уравнение (9) и приравнявая коэффициенты в левой и правой частях, получим для определения коэффициентов полинома π систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, равным числу уравнений. При этом матрица указанной системы, очевидно, не зависит от p . Поскольку полиномиальное решение уравнения (9), если оно существует, единственно, то определитель рассматриваемой системы отличен от нуля, что обеспечивает существование полиномиального решения уравнения (9), каков бы ни был полином p *).

Итак, функция z_1 является полиномом, тем самым $x_1 = x_0 - \varepsilon_1 z$ также является полиномом и, следовательно, все приближения x_n оказываются в этом случае полиномами.

Отмеченное обстоятельство дает возможность в предположении известной правильности уравнения (1) установить наличие не только обобщенного решения, но и решения в классическом понимании слова. Для этого нам нужны будут некоторые факты из конструктивной теории функций.

3.3. Прежде всего отметим двумерный аналог неравенств Бернштейна и А. А. Маркова. Пусть p — полином степени n , причем

$$|p(s, t)| \leq M, \quad s, t \in D,$$

где D — произвольная ограниченная область с гладким контуром. Тогда в области D

$$\left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial s} \right| \leq An^2 M, \quad \left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial t} \right| \leq An^2 M, \quad (11)$$

*) Для фактического решения уравнения (9) проще сначала найти решение, не заботясь о граничном условии, а затем перейти к решению с нулевыми граничными значениями, вычитая решение уравнения Лапласа с теми же граничными значениями, что и у найденного перед этим полинома. Последнее особенно просто находится с помощью разложения решения в ряд Фурье.

а в любой внутренней подобласти D_1 области D

$$\left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial s} \right| \leq BnM, \quad \left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial t} \right| \leq BnM, \quad (12)$$

где A и B — постоянные, зависящие только от D и D_1 .

Неравенства (11) и (12) очевидным образом получаются из соответствующих неравенств для одномерного случая (см. Натансон — I, с. 169, 174).

Лемма 1. Если u — полином степени не выше n , то справедливы неравенства

$$\|u\|_{C(D)} \leq A_1 n^2 \|u\|_{L^2(D)}, \quad \|u\|_{C(D_1)} \leq B_1 n \|u\|_{L^2(D)}, \quad (13)$$

$$\|u\|_{C^{(1)}(D)} \leq A_2 n^2 \|u\|_{W_2^{(2)}(D)}, \quad \|u\|_{C^{(1)}(D_1)} \leq B_1 n \|u\|_{W_2^{(1)}(D)}, \quad (14)$$

где D_1 означает внутреннюю подобласть области D , а через $C^{(1)}$ обозначено пространство непрерывно дифференцируемых функций.

Доказательство. Ограничимся случаем, когда область D — круг с центром в начале координат (общий случай требует небольших дополнительных рассуждений). Полагая

$$\varphi(s, t) = \int_0^s \int_0^t p^2(s, t) ds dt,$$

имеем

$$|\varphi(s, t)| \leq \|p\|_{L^2}^2, \quad (s, t) \in D,$$

а на основании двукратного применения неравенства (11)

$$\begin{aligned} |p(s, t)|^2 &= \left| \frac{\partial^2 \varphi(s, t)}{\partial s \partial t} \right| \leq \\ &\leq A^2 (2n+2)^2 (2n+1)^2 \max |\varphi(s, t)| \leq A_1^2 n^4 \|p\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

откуда получается первое из неравенств (13). Второе неравенство устанавливается аналогично, надо только вместо (11) использовать (12).

Применяя установленное неравенство к производной, будем иметь

$$\left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial s} \right| \leq A_1 n^2 \left\| \frac{\partial p}{\partial s} \right\|_{L^2} \leq A_1 n^2 \|p\|_{W_2^{(1)}};$$

аналогичное неравенство верно и для производной $\partial p / \partial t$. Наконец, в силу (11) и на основании теоремы вложения

$$|p(s, t)| \leq A n^2 \|p\|_{L^2} \leq C A n^2 \|p\|_{W_2^{(1)}}.$$

Сопоставляя все это, приходим к первому из неравенств (14):

$$\|p\|_{C(1)(D)} = \max_D |p(s, t)| + \max_D \left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial s} \right| + \max_D \left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial t} \right| \leqslant A_2 n^2 \|p\|_{W_2^{(1)}}.$$

Второе неравенство получается аналогично.

3.4. Вернемся к уравнению (1). Будем сначала считать, что коэффициенты a, b, c и правая часть φ суть полиномы. Как было показано в 3.2, если начальное приближение x_0 — полином, все следующие приближения x_n ($n = 1, 2, \dots$) также будут полиномами. При этом, если степень полиномов a, b, c, φ не выше m , а x_0 — полином степени N , то Lx_0 будет полиномом степени не выше $m + N$, а z_1 — степени не выше $m + N + 2$. В частности, если $x_0 = 0$, то z_1 и, следовательно, x_1 — полиномы степени не выше $m + 2$. Повторяя эти рассуждения, находим, что x_n является полиномом степени не выше $(m + 2)n$.

Учитывая оценку (8), получаем

$$\|x_k - x_{k-1}\|_{W_2^{(1)}} \leqslant \|x_k - x^*\| + \|x_{k-1} - x^*\| \leqslant 2C \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^{k-1},$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Так как разность $x_k - x_{k-1}$ — полином степени не выше $(m + 2)k$, то в силу леммы

$$\|x_k - x_{k-1}\|_{C(1)(D)} \leqslant A_3 (m + 2)^2 k^2 q, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$q = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}.$$

Отсюда, применяя несколько раз неравенство (11), получаем оценку

$$\|x_k - x_{k-1}\|_{C(p)(D)} \leqslant A_4 [(m + 2)k]^{2p} q^k, \quad k, p = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Таким образом, ряд

$$x^*(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k(s, t) - x_{k-1}(s, t)] \quad (16)$$

можно почленно дифференцировать p раз. Иначе говоря, решение уравнения (1) имеет производные любого порядка, причем

$$\|x^* - x_n\|_{C(p)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k - x_{k-1}\| \leqslant A_5 [(m + 2)n]^{2p} q^n, \quad (17)$$

$$n = 0, 1, \dots,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ приближений, полученных по методу наискорейшего спуска, сходится к решению x^* равномерно вместе со всеми производными.

В связи с изложенным целесообразно отметить, что если использовать теорему Бернштейна об аппроксимации аналитической функции полиномами (Натансон — I, с. 228), то можно получить и аналитичность решения x^* .

Переходим теперь к случаю, когда коэффициенты уравнения (1) и его правая часть — произвольные дифференцируемые несколько раз функции. Именно, будем предполагать, что функции a и b имеют производные до $(\nu+1)$ -го порядка, а функции c и φ до ν -го порядка, причем производные $(\nu+1)$ -го порядка функций a и b и производные ν -го порядка функций c и φ удовлетворяют условию Липшица с показателем $\alpha > 0$. На основании теоремы Джексона (см., например, Харрик [1]) могут быть найдены полиномы a_n , b_n , c_n и φ_n степени не выше n такие, что

$$|a(s, t) - a_n(s, t)| \leq \frac{K}{n^{\nu+1+\alpha}},$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} [a(s, t) - a_n(s, t)] \right| \leq \frac{K}{n^{\nu+\alpha}},$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} [a(s, t) - a_n(s, t)] \right| \leq \frac{K}{n^{\nu+\alpha}},$$

$$|b(s, t) - b_n(s, t)| \leq \frac{K}{n^{\nu+1+\alpha}},$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} [b(s, t) - b_n(s, t)] \right| \leq \frac{K}{n^{\nu+\alpha}},$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} [b(s, t) - b_n(s, t)] \right| \leq \frac{K}{n^{\nu+\alpha}},$$

$$|c(s, t) - c_n(s, t)| \leq \frac{K}{n^{\nu+\alpha}},$$

$$|\varphi(s, t) - \varphi_n(s, t)| \leq \frac{K}{n^{\nu+\alpha}}.$$

Обозначим через L_n оператор, получающийся из L заменой коэффициентов a , b , c на a_n , b_n , c_n соответственно. Ясно, что если n достаточно велико, к оператору L_n применим метод наискорейшего спуска, причем можно считать, что величины α и β обслуживают и оператор L_n . Обозначим через $x^{(n)}$ решение уравнения

$$L_n x = \varphi_n, \quad x|_s = 0, \quad (18)$$

и оценим разность двух таких решений:

$$\begin{aligned} \|Lx^{(n)} - L_n x^{(n)}\|_{L^2} &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial s} (a - a_n) \frac{\partial x^{(n)}}{\partial s} \right\| + \left\| (a - a_n) \frac{\partial^2 x^{(n)}}{\partial s^2} \right\| + \\ &+ \left\| \frac{\partial}{\partial t} (b - b_n) \frac{\partial x^{(n)}}{\partial t} \right\| + \left\| (b - b_n) \frac{\partial^2 x^{(n)}}{\partial t^2} \right\| + \|(c - c_n) x^{(n)}\| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{K_1}{n^{\nu+\alpha}} \left[\left\| \frac{\partial x^{(n)}}{\partial s} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial^2 x^{(n)}}{\partial s^2} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial x^{(n)}}{\partial t} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial^2 x^{(n)}}{\partial t^2} \right\|_{L^2} + \|x^{(n)}\|_{L^2} \right] \leq \frac{K_2}{n^{\nu+\alpha}} \|x^{(n)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}}.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \|L(x^{(n)} - x^{(m)})\|_{L^2} &\leq \|(L - L_n)x^{(n)}\| + \|(L - L_m)x^{(m)}\| + \|\varphi_n - \\ &- \varphi_m\| \leq \frac{K_2}{n^{\nu+\alpha}} \|x^{(n)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}} + \frac{K_2}{m^{\nu+\alpha}} \|x^{(m)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}} + \frac{K}{n^{\nu+\alpha}} + \frac{K}{m^{\nu+\alpha}}. \end{aligned}$$

На основании неравенства Бернштейна — Ладыженской (см. Ладыженская, гл. II, § 6) получаем отсюда оценку

$$\begin{aligned} \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}} &\leq K_3 \|L(x^{(n)} - x^{(m)})\|_{L^2} \leq \\ &\leq K_4 \left[\frac{1}{n^{\nu+\alpha}} \|x^{(n)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}} + \frac{1}{m^{\nu+\alpha}} \|x^{(m)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}} + \frac{1}{n^{\nu+\alpha}} + \frac{1}{m^{\nu+\alpha}} \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

Применяя эту оценку к паре $x^{(n_0)}, x^{(m)}$ (n_0 фиксированное, достаточно большое) и заменяя справа $\|x^{(m)}\|$ на большую сумму $\|x^{(n_0)}\| + \|x^{(n_0)} - x^{(m)}\|$, установим ограниченность величины $\|x^{(n_0)} - x^{(m)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}}$ вне зависимости от m и тем самым ограниченность величины $\|x^{(m)}\|$. Считая в (19) $n < m$, перепишем это неравенство, используя доказанную ограниченность, в виде

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}} \leq \frac{K_5}{n^{\nu+\alpha}}. \quad (20)$$

Возьмем число $h > 1$, о выборе которого более подробно сказано ниже, и рассмотрим последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел $n_k = [h^k]$ ($[\gamma]$ — целая часть числа γ , $k = 1, 2, \dots$). К каждой из функций $x^{(n_k)}$ построим k -е приближение $x_k^{(n_k)}$ по методу наискорейшего спуска (начальные приближения берем нулевые). Как было показано выше, $x_k^{(n_k)}$ — полином степени не выше $(n_k + 2)k$. Оценим разность двух таких полиномов. Во-первых,

$$\begin{aligned} \|x_k^{(n_k)} - x_{k-1}^{(n_{k-1})}\| &\leq \\ &\leq \|x_k^{(n_k)} - x^{(n_k)}\| + \|x_{k-1}^{(n_{k-1})} - x^{(n_{k-1})}\| + \|x^{(n_k)} - x^{(n_{k-1})}\|. \end{aligned}$$

Вследствие (20) имеем

$$\|x^{(n_k)} - x^{(n_{k-1})}\|_{\dot{W}_2^{(2)}} \leq \frac{K_5}{n_k^{\nu+\alpha}} \leq \frac{K_6}{n_{k-1}^{\nu+\alpha}}. \quad (21)$$

Далее, на основании оценки (17)

$$\|x^{(n_k)} - x_k^{(n_k)}\|_{\dot{C}^{(2)}} \leq A_5 [(n_k + 2)k]^4 q^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Таким образом,

$$\|x_h^{(n_k)} - x_{h-1}^{(n_k-1)}\|_{W_2} \leq K_7 [(n_k + 2)k]^4 q^4 + \frac{K_8}{n_k^{v+\alpha}}.$$

Так как под знаком нормы стоит полином степени не выше $(n_k + 2)k$, то на основании леммы с помощью неравенства (11) получим

$$\begin{aligned} \|x_h^{(n_k)} - x_{h-1}^{(n_k-1)}\|_{C^{(p)}} &\leq \\ &\leq K_8 [(n_k + 2)k]^{2p-2} \left\{ K_7 [(n_k + 2)k]^4 q^4 + \frac{K_8}{n_k^{v+\alpha}} \right\} = \varepsilon_h. \end{aligned}$$

Поскольку $n_k \leq h^k$, ясно, что если $v + \alpha > 2p - 2$, а h выбрано так, что $h^{2p+2}q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ сходится, и потому последовательность $\{x_h^{(n_k)}\}$ сходится в пространстве $C^{(p)}$ и ее предел есть элемент из $C^{(p)}$, т. е. p раз непрерывно дифференцируемая функция

$$x(s, t) = \lim_{h \rightarrow \infty} x_h^{(n_k)}(s, t).$$

Если $p \geq 2$, то, используя те же оценки, нетрудно проверить, что x удовлетворяет уравнению (1), т. е. представляет классическое решение граничной задачи. Таким образом, классическое решение имеется, если $v + \alpha > 2$, в частности, при $v = 2$, т. е. если коэффициенты a и b имеют третьи, а c и φ вторые производные, удовлетворяющие условию Липшица с некоторым показателем $\alpha > 0$.

Аналогичным образом, используя оценки для внутренних под областей, мы получим, что решение дважды непрерывно дифференцируемо внутри области уже при $v = 1$.

В заключение отметим, что тот же метод может быть применен для исследования более сложных задач. Случай некрутовой области сводится к рассмотренному, если данная область может быть гладко преобразована в круг. С незначительными изменениями метод может быть использован и для уравнений высших порядков с числом независимых переменных, большим двух.

§ 4. Минимизация дифференцируемых выпуклых функционалов

4.1. Здесь изучается применение метода наискорейшего спуска к минимизации дифференцируемых функционалов. Функционал Φ , определенный в B -пространстве X , называется *дифференцируемым* в точке $x \in X$, если найдется линейный функционал f такой, что для $h \in X$ справедливо равенство

$$\Phi(x + h) = \Phi(x) + f(h) + o(h),$$

где $o(h)/\|h\| \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Функционал f называется *производной* (Фреше) функционала Φ в точке x и обозначается через $\Phi'(x)$. (Подробнее о дифференцировании см. в гл. XVII).

Пусть X — B -пространство. С точки зрения экстремальных задач удобнее считать (в отличие от предыдущих параграфов), что X вещественно. Рассмотрим функционал Φ , определенный и дифференцируемый на X , и выясним, каким образом определяется направление наискорейшего спуска в некоторой точке $x \in X$. Так как Φ дифференцируем, то производная этого функционала в точке x по направлению z может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{1}{\alpha} (\Phi(x + \alpha z) - \Phi(x)) = \\ &= \frac{1}{\|z\|} \Phi'(x)(z) = \Phi'(x) \left(\frac{z}{\|z\|} \right). \end{aligned}$$

Из сказанного следует, что вектор y , имеющий единичную норму и задающий направление наискорейшего спуска функционала Φ в точке x , совпадает с точкой минимума линейного функционала $\Phi'(x)$ на единичной сфере, т. е. находится из условия

$$\Phi'(x)(y) = \inf_{\|z\|=1} \Phi'(x)(z). \quad (1)$$

Так как линейный функционал не обязан достигать минимума на единичной сфере, то направление наискорейшего спуска может и не существовать. Нетрудно, однако, указать условия, когда в формуле (1) реализуется минимум. Это можно гарантировать, например, в случае, когда X — пространство, сопряженное к некоторому банахову пространству Y , а функционалы $\Phi'(x)$ ($x \in X$) входят в Y . (Точнее, в образ Y при каноническом вложении Y в $Y^{**} = X^*$.) Действительно, единичный шар в $X = Y^*$ компактен в $(*)$ -слабой топологии, и потому $\Phi'(x)$ достигает минимума на этом шаре, а следовательно и на сфере. В частности, если пространство X рефлексивно, то направление наискорейшего спуска заведомо существует.

В дальнейшем, не оговаривая этого особо, считаем, что пространство X и функционал Φ таковы, что направление наискорейшего спуска существует.

Если пространство X строго выпукло*), то, как следует из (1), направление наискорейшего спуска единственно. В общем случае это, конечно, не так.

*) B -пространство X называется *строго выпуклым*, если в неравенстве треугольника равенство достигается только на положительно пропорциональных элементах, т. е. из соотношения $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ следует, что $x = \lambda y$ при некотором $\lambda > 0$. Если X строго выпукло, $x, y \in X$ и $\|x\| = \|y\| = \frac{1}{2} \|x + y\| = 1$, то $x = y$. Примером строго выпуклого пространства может служить $L^p(a, b)$ ($1 < p < +\infty$).

Формула (1) показывает, что направление наискорейшего спуска (а следовательно и реализация метода) существенно зависит не только от функционала, но и от нормировки пространства. Переход к другой норме, хотя бы и эквивалентной исходной, может существенно изменить это направление. Из (1) и равенства

$$\inf_{\|z\|=1} \Phi'(x)(z) = - \sup_{\|z\|=1} (-\Phi'(x)(z)) = -\|\Phi'(x)\|$$

следует, что направление y ($\|y\| = 1$) является направлением наискорейшего спуска тогда и только тогда, когда

$$\Phi'(x)(y) = -\|\Phi'(x)\|. \quad (2)$$

Для любого $z \in X$ выполняется неравенство

$$-\Phi'(x)(z) \leq \|\Phi'(x)\| \|z\|.$$

Направление наискорейшего спуска характеризуется тем, что на нем в написанном соотношении реализуется равенство. Это позволяет в некоторых случаях достаточно просто отыскивать это направление. Приведем примеры.

1) Пусть X — гильбертово пространство. Равенство $-\Phi'(x)(z) = \|\Phi'(x)\| \|z\|$, или, что то же самое, $(-\Phi'(x), z) = \|-\Phi'(x)\| \|z\|$, показывает, что для векторов $-\Phi'(x)$ и z в неравенстве Коши — Буняковского достигается равенство. Это означает положительную пропорциональность указанных векторов: существует $\lambda > 0$, при котором $-\Phi'(x) = \lambda z$. Таким образом, направление наискорейшего спуска задается вектором $-\Phi'(x)$.

З а м е ч а н и е. Если X — гильбертово пространство, то производную $\Phi'(x)$ можно рассматривать как элемент самого пространства X ; этот элемент обычно называют *градиентом* Φ в точке x . В связи с этим направление наискорейшего спуска в данной ситуации называют направлением *антиградиента*.

2) Пусть $X = L^p(a, b)$ ($1 < p < \infty$). Анализируя условия достижимости равенства в неравенстве Гёльдера, нетрудно проверить, что направление наискорейшего спуска z в точке x дается формулой

$$z(t) = -\{\text{sign } y(t)\} |y(t)|^{q-1},$$

где $1/p + 1/q = 1$, а y — элемент пространства $L^q(a, b)$ такой, что $\Phi'(x)(u) = \int_a^b y(t) u(t) dt$ для всех $u \in L^p(a, b)$. Как и в предыдущем случае, направление наискорейшего спуска здесь единственно.

3) Пусть $X = L^\infty(a, b)$, а функционалы $\Phi'(x)$ ($x \in L^\infty(a, b)$) входят в $L^1(a, b)$ (т. е. $\Phi'(x)(u) = \int_a^b y(t) u(t) dt$), где $y \in L^1(a, b)$.

Здесь направление наискорейшего спуска, вообще говоря, не единственно. Любое такое направление задается измеримой функцией z такой, что $\text{vrai sup } |z(t)| = 1$ и $z(t) = -\text{sign } y(t)$, если $y(t) \neq 0$. (Если множество $\{t: y(t) = 0\}$ имеет пулевую меру, то это направление единственно.)

4.2. Прежде чем перейти к исследованию метода наискорейшего спуска, введем некоторые определения.

Точка $x \in X$ называется *точкой локального минимума* функционала Φ , если для элементов z из некоторого шара с центром в этой точке выполняется неравенство $\Phi(z) \geq \Phi(x)$. Если $\Phi(z) \geq \Phi(x)$ для всех $z \in X$, то x называется *точкой глобального минимума*. Точка $x \in X$ называется *стационарной точкой* дифференцируемого функционала Φ , если $\Phi'(x) = 0$.

При исследовании на минимум важную роль играют функции вещественного переменного $\varphi(\alpha; x, z) = \Phi(x + \alpha z)$, рассматривавшиеся в 1.1.

Нетрудно проверить, что дифференцируемость функционала Φ влечет дифференцируемость (по α) функции $\varphi(\alpha; x, z)$ при любых x и z , причем $\varphi'(\alpha; x, z) = \Phi'(x + \alpha z)(z)$. Используя это обстоятельство, покажем, что точка локального минимума стационарна. Если в точке x достигается локальный минимум, то при любом $z \in X$ функция $\varphi(\alpha; x, z)$ достигает локального минимума на вещественной прямой в нуле; поэтому $\varphi'(0; x, z) = \Phi'(x)(z) = 0$, а это и означает стационарность точки x .

Обратное утверждение, разумеется, неверно. Однако, если Φ — выпуклый функционал, то стационарные точки совпадают с точками глобального минимума.

Функционал Φ , заданный на линейном пространстве X , называется *выпуклым*, если для любых элементов $z_1, z_2 \in X$ и чисел $t_1, t_2 \geq 0$ таких, что $t_1 + t_2 = 1$, выполняется

$$\Phi(t_1 z_1 + t_2 z_2) \leq t_1 \Phi(z_1) + t_2 \Phi(z_2).$$

Если Φ выпуклый функционал, то при любых x и z функция $\varphi(\alpha; x, z)$ выпукла на вещественной прямой, т. е.

$$\varphi(t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2; x, z) \leq t_1 \varphi(\alpha_1; x, z) + t_2 \varphi(\alpha_2; x, z);$$

здесь $t_1, t_2, \alpha_1, \alpha_2$ — вещественные числа; $t_1, t_2 \geq 0, t_1 + t_2 = 1$. Из выпуклости $\varphi(\alpha; x, z)$ следует, что производная этой функции не убывает.

Лемма 1. Пусть Φ — выпуклый дифференцируемый функционал. Тогда каждая стационарная точка Φ является точкой глобального минимума этого функционала.

Доказательство. Пусть x — стационарная точка, z — произвольный элемент из X . Так как производная функции $\varphi(\alpha; x, z)$ не убывает, то, используя формулу Лагранжа, имеем при неко-

тором $\theta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}\Phi(x+z) - \Phi(z) &= \varphi(1; x, z) - \varphi(0; x, z) = \\ &= \varphi'(\theta; x, z) \geq \varphi'(0; x, z) = \Phi'(x)(z) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, $\Phi(x+z) \geq \Phi(x)$ для всех $z \in X$, что и доказывает лемму.

В дальнейшем речь будет идти о сходимости метода наискорейшего спуска к стационарным точкам функционала Φ (тем самым, в случае выпуклого функционала, к точкам его глобального минимума).

Основные результаты о сходимости имеют место лишь в случае, когда производная функционала Φ удовлетворяет в некотором шаре условию Липшица, т. е. существует число L такое, что для x, z из этого шара выполняется

$$\|\Phi'(x) - \Phi'(z)\| \leq L\|x - z\|, \quad (3)$$

При этом используется следующая лемма.

Лемма 2. Пусть для производной Φ' выполнено условие Липшица (3) в шаре $B_{a+b}(0)$ радиуса $a+b$ с центром в нуле. Тогда, если $\|x\| \leq a$, то при $\|z\| \leq b$

$$\Phi(x+z) \leq \Phi(z) + \Phi'(x)(z) + \frac{L}{2}\|z\|^2.$$

Доказательство. Используя дифференцируемость функции $\varphi(\alpha; x, z)$ и выражение для ее производной, имеем

$$\begin{aligned}\Phi(x+z) &= \varphi(1; x, z) = \varphi(0; x, z) + \int_0^1 \varphi'(\alpha; x, z) d\alpha = \\ &= \Phi(x) + \int_0^1 \Phi'(x + \alpha z)(z) d\alpha = \\ &= \Phi(x) + \Phi'(x)(z) + \int_0^1 (\Phi'(x + \alpha z) - \Phi'(x))(z) d\alpha \leq \\ &\leq \Phi(x) + \Phi'(x)(z) + \int_0^1 \|\Phi'(x + \alpha z) - \Phi'(x)\| \|z\| d\alpha \leq \\ &\leq \Phi(x) + \Phi'(x)(z) + L\|z\|^2 \int_0^1 \alpha d\alpha = \Phi(x) + \Phi'(x)(z) + (L/2)\|z\|^2.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

4.3. Применим метод наискорейшего спуска для минимизации функционала Φ , точнее говоря, изучим поведение последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, где

$$x_n = x_{n-1} + \varepsilon_n z_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

z_n — направление наискорейшего спуска в точке x_{n-1} (если таких направлений несколько, то z_n — произвольное из них); ε_n находится из условия

$$\Phi(x_{n-1} + \varepsilon_n z_n) = \min_{\alpha \geq 0} \Phi(x_{n-1} + \alpha z_n).$$

Таким образом, величина спуска выбирается вторым способом из указанных в 1.1. Заметим, впрочем, что если Φ — строго выпуклый функционал, то первые два указанных там способа совпадают. (Строгая выпуклость Φ означает, что $\Phi(t_1 x_1 + t_2 x_2) < t_1 \Phi(x_1) + t_2 \Phi(x_2)$ для $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$; $t_1, t_2 > 0$, $t_1 + t_2 = 1$; из строгой выпуклости Φ следует, что производная $\Phi'(\alpha; x, z)$ функции $\Phi(\alpha; x, z)$ строго возрастает, и потому может обращаться в нуль лишь в одной точке; отсюда и следует эквивалентность упомянутых способов.)

Ниже предполагается без специальных оговорок, что начальная точка $x_0 \in X$ такова, что лебегово множество $\Omega_0 = \{x \in X: \Phi(x) \leq \Phi(x_0)\}$ ограничено. Заметим, что $x_n \in \Omega_0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Условимся также считать, что $\|z_n\| = 1$ при всех n .

Теорема 1. Пусть производная функционала Φ удовлетворяет условию Липшица (3) в шаре с центром в нуле и радиуса R' , где $R' > R = \sup_{x \in \Omega_0} \|x\|$. Тогда для последовательности $\{x_n\}$, построенной по формуле (4), справедливо соотношение $\Phi'(x_n) \rightarrow 0$.

Доказательство. Пусть $0 < \alpha \leq R' - R$. Тогда по определению величины спуска ε_n выполняется $\Phi(x_{n-1} + \alpha z_n) \geq \Phi(x_n)$. Используя лемму 2, получим

$$\Phi(x_n) \leq \Phi(x_{n-1} + \alpha z_n) \leq \Phi(x_{n-1}) - \alpha \Phi'(x_{n-1})(z_n) + \frac{1}{2} L \alpha^2$$

(где L — константа, фигурирующая в условии Липшица). Из этого неравенства и (2) следует, что

$$\|\Phi'(x_n)\| \leq \frac{\Phi(x_{n-1}) - \Phi(x_n)}{\alpha} + \frac{1}{2} L \alpha.$$

Пусть ε — произвольное положительное число и $\alpha < \min(\varepsilon, R' - R)$. Из ограниченности Ω_0 и условия Липшица вытекает, что функционал Φ ограничен снизу. Так как последовательность $\Phi(x_n)$ убывает (по построению) и ограничена, то она сходится, и потому для достаточно больших номеров n выполняется неравенство $\frac{1}{\alpha} (\Phi(x_{n-1}) - \Phi(x_n)) < \varepsilon$. Для этих номеров имеем

$$\|\Phi'(x_n)\| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} L\right),$$

что и доказывает теорему.

Следствие. Предельные точки последовательности (4) (если они существуют) стационарны.

В некоторых случаях, основываясь на соображениях компактности, можно показать сходимость к стационарной точке для функционалов, производная которых лишь непрерывна. Приведем один из результатов такого рода (Карри [1]).

Теорема 2. Пусть пространство X конечномерно, а функционал Φ непрерывно дифференцируем. Тогда предельные точки последовательности $\{x_n\}$ стационарны.

Доказательство. Отметим прежде всего, что из конечности X и ограниченности Ω_0 вытекает существование предельных точек последовательности x_n . Пусть y — одна из этих точек, $y = \lim x_{n_k}$. Не умаляя общности, считаем, что существует $\lim z_{n_k+1} = \tilde{y}$. Положим для положительных α

$$w_{n_k}(\alpha) = \frac{1}{\alpha} (\Phi(x_{n_k} + \alpha z_{n_k+1}) - \Phi(x_{n_k})) - \Phi'(x_{n_k})(z_{n_k+1}). \quad (5)$$

Из условий теоремы следует, что существует $\lim_{k \rightarrow \infty} w_{n_k}(\alpha) = w(\alpha)$, причем

$$w(\alpha) = \frac{1}{\alpha} (\Phi(y + \alpha \tilde{y}) - \Phi(y)) - \Phi'(y)(\tilde{y}).$$

Поскольку Φ дифференцируем в точке y , то $\lim_{\alpha \rightarrow 0} w(\alpha) = 0$. В силу выбора величины спуска

$$\Phi(x_{n_k+1}) = \Phi(x_{n_k} + \varepsilon_{n_k+1} z_{n_k+1}) \leq \Phi(x_{n_k} + \alpha z_{n_k+1}),$$

и потому, используя (5), имеем

$$\Phi(x_{n_k+1}) \leq \Phi(x_{n_k}) + \alpha \Phi'(x_{n_k})(z_{n_k+1}) + \alpha w_{n_k}(\alpha).$$

Так как $\alpha > 0$, то

$$-\Phi'(x_{n_k})(z_{n_k+1}) \leq \frac{1}{\alpha} (\Phi(x_{n_k}) - \Phi(x_{n_k+1})) + w_{n_k}(\alpha). \quad (6)$$

Переходя в (6) к пределу при $k \rightarrow \infty$, учитывая $\lim (\Phi(x_{n_k}) - \Phi(x_{n_k+1})) = 0$ и используя (2), получим

$$\|\Phi'(y)\| = -\Phi'(y)\tilde{y} \leq w(\alpha).$$

Утверждение теоремы вытекает теперь из соотношения $w(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$.

4.4. Существенно больше о сходимости метода наискорейшего спуска можно сказать, если Φ — выпуклый функционал.

Лемма 3. Пусть Φ — выпуклый функционал, ограниченный снизу на X , и $Q = \inf_{x \in X} \Phi(x)$. Тогда существует число $c > 0$ та-

кое, что

$$\Phi(x_n) - Q \leq c \|\Phi'(x_n)\|.$$

Доказательство. Так как множество $\Omega_0 = \{z \in X: \Phi(z) \leq \Phi(x_0)\}$ по предположению ограничено, то множество $\Omega_0 - \Omega_0 = \{z: z_1 = z_1 - z_2, z_1, z_2 \in \Omega_0\}$ также ограничено. Покажем, что в качестве c можно выбрать радиус шара B с центром в нуле, содержащего $\Omega_0 - \Omega_0$. Учитывая, что производная $\Phi'(\alpha; x_n, z)$ функции $\Phi(\alpha; x_n, z)$ не возрастает (в силу выпуклости Φ), и используя формулу Лагранжа, имеем

$$\begin{aligned}\Phi(x_n + z) - \Phi(x_n) &= \Phi(1; x_n, z) - \Phi(0; x_n, z) = \\ &= \Phi'(\theta, x_n, z) \geq \Phi'(0; x_n, z) = \Phi'(x_n)(z)\end{aligned}$$

(здесь $\theta \in (0, 1)$). Отсюда

$$\min_{\|z\| < c} \Phi(x_n + z) - \Phi(x_n) \geq \min_{\|z\| < c} \Phi'(x_n)(z). \quad (7)$$

Так как $x_n \in \Omega_0$, то $B \supset \Omega_0 - \Omega_0 \supset \Omega_0 - x_n$, т. е. $x_n + B \supset \Omega_0$. Поэтому

$$Q = \inf_{x \in X} \Phi(x) \leq \inf_{\|z\| < c} \Phi(x_n + z) \leq \inf_{x \in \Omega_0} \Phi(x).$$

Из определения Ω_0 легко следует, что $Q = \inf_{x \in \Omega_0} \Phi(x)$. Кроме того, $\inf_{\|z\| < c} \Phi'(x_n)(z) = c \inf_{\|z\| \leq 1} \Phi'(x_n)(z) = -c \|\Phi'(x_n)\|$. Из полученных соотношений и (7) вытекает

$$Q - \Phi(x_n) \geq -c \|\Phi'(x_n)\|.$$

Лемма доказана.

Следствие. Если выполнены условия леммы 3 и одной из теорем 1 или 2, то последовательность x_n является минимизирующей.

В предположении, что производная $\Phi'(x)$ удовлетворяет условию Липшица, можно дать оценку скорости сходимости последовательности $\{\Phi(x_n)\}$.

Теорема 3. Пусть Φ — выпуклый функционал, ограниченный снизу на X , причем производная $\Phi'(x)$ удовлетворяет на X условию Липшица (3). Тогда $\Phi(x_n) - Q = O(1/n)$ (здесь $Q = \inf_{x \in X} \Phi(x)$).

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 4. Пусть числа $\lambda_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) таковы, что при некотором $\mu > 0$ и при всех n выполняется неравенство $\lambda_n - \lambda_{n+1} \geq \mu \lambda_n^2$. Тогда $\lambda_n = O(1/n)$.

Доказательство. Так как последовательность λ_n убывает, то

$$\lambda_n - \lambda_{n+1} = \lambda_{n+1} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} - 1 \right) \geq \mu \lambda_{n+1}^2$$

откуда следует $\lambda_n / \lambda_{n+1} - 1 \geq \mu \lambda_{n+1}$.

Полагая $v_n = \lambda_n n$, получим из последнего неравенства после простых преобразований

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \geq \frac{n}{n+1} \left(1 + \mu \frac{v_{n+1}}{n+1} \right). \quad (8)$$

Если $v_{n+1} \geq 2/\mu$ при некотором n , то, как следует из (8), $v_{n+1} \leq v_n$. Таким образом, $v_{n+1} \leq \max(2/\mu, v_n)$, откуда вытекает, что $v_n \leq \max(2/\mu, v_1)$ при всех n . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Положим $\lambda_n = \Phi(x_n) - Q$. Считаем, что $\lambda_n > 0$ при всех n . Покажем, что последовательность λ_n удовлетворяет условиям леммы 4 (при некотором $\mu > 0$). С этой целью оценим прежде всего величину $\lambda_n - \lambda_{n+1} = \Phi(x_n) - \Phi(x_{n+1})$. Из леммы 2 вытекает, что при всех вещественных α

$$\Phi(x_n + \alpha z_{n+1}) \leq \Phi(x_n) + \alpha \Phi'(x_n)(z_{n+1}) + \frac{\alpha^2}{2} L \|z_{n+1}\|^2.$$

Так как $\|z_{n+1}\| = 1$ и $\Phi'(x_n)(z_{n+1}) = -\|\Phi'(x_n)\|$, то

$$\Phi(x_n + \alpha z_{n+1}) \leq \Phi(x_n) - \alpha \|\Phi'(x_n)\| + \frac{\alpha^2}{2} L. \quad (9)$$

Пусть $\tilde{\alpha} = \frac{1}{L} \|\Phi'(x_n)\|$. (В этой точке достигает минимума квадратный трехчлен, стоящий в правой части (9).) Привлекая (9), имеем

$$\begin{aligned} \lambda_n - \lambda_{n+1} = \Phi(x_n) - \Phi(x_{n+1}) &\geq \Phi(x_n) - \Phi(x_n + \tilde{\alpha} z_{n+1}) \geq \\ &\geq \tilde{\alpha} \|\Phi'(x_n)\| + \frac{\tilde{\alpha}^2}{2} L = \frac{L}{2} \|\Phi'(x_n)\|^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу леммы 3, при некотором $c > 0$ выполняется

$$\lambda_n = \Phi(x_n) - Q \leq c \|\Phi'(x_n)\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, при всех n

$$\lambda_n - \lambda_{n+1} \geq \frac{L}{2c^2} \lambda_n^2.$$

Доказательство завершается ссылкой на лемму 4.

Для широкого класса функционалов, рассматривавшихся в теореме 3, оценку сходимости вряд ли можно улучшить. Однако для «хороших» функционалов метод сходится существенно быстрее. Дважды дифференцируемый функционал Φ , определенный в гильбертовом пространстве H , называется *сильно выпуклым*, если существуют положительные числа M и m такие, что

$$m \|z\|^2 \leq (\Phi''(x)(z), z) \leq M \|z\|^2 \quad (10)$$

для всех $x, z \in H$. Здесь *) $\Phi''(x)$ — вторая производная функционала Φ в точке x . Нетрудно проверить, что сильная выпуклость Φ влечет его выпуклость. Неравенства (10) означают, по сути дела, что операторы $\Phi''(x)$ положительно определены для всех $x \in H$ и границы этих операторов равномерно ограничены положительными константами. В частности, квадратичный функционал F , рассмотренный в § 1, является сильно выпуклым (для этого функционала $F''(x) = U$ для всех x).

Результаты, относящиеся к методу наискорейшего спуска для сильно выпуклого функционала, во многом аналогичны результатам, полученным в § 1 для квадратичного функционала. Можно показать, что при любом $x_0 \in H$ множество $\Omega_0 = \{x \in H, \Phi(x) \leq \Phi(x_0)\}$ ограничено и функционал Φ достигает минимума на этом множестве (а, стало быть, и на всем пространстве); при этом точка минимума x^* единственна. Как и для квадратичного функционала, справедлива следующая оценка сходимости:

$$\|x_n - x^*\| \leq C \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^n,$$

где C — некоторая константа, зависящая от начальной точки x и функционала Φ .

4.5. Идея наискорейшего спуска оказывается весьма плодотворной и при решении задач на условный экстремум. Одна из реализаций этой идеи в указанной ситуации приводит к так называемому *методу условного градиента*.

Пусть Ω — выпуклое слабо компактное множество в банаховом пространстве X . Предполагается, что структура Ω достаточно проста в том смысле, что известно решение задачи о минимизации на Ω линейного функционала. Пусть, далее, Φ — дифференцируемый (нелинейный) функционал, заданный в некоторой открытой области, содержащей Ω . Требуется найти минимум Φ на Ω . Метод условного градиента позволяет построить последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, которая в ряде случаев оказывается минимизирующей. В качестве x_0 берется произвольный элемент из Ω . Если элемент x_n уже известен, то x_{n+1} определяется по формуле

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n (z_n - x_n),$$

где $z_n \in \Omega$ выбирается из условия $\Phi'(x_n)(z_n) = \min_{z \in \Omega} \Phi'(x_n)(z)$,

а величина спуска ε_n находится из равенства $\Phi(x_{n+1}) = \min_{\alpha \in [0,1]} \Phi(x_n + \alpha(z_n - x_n))$. Возможны и другие способы определения величины спуска, но мы на них не останавливаемся.) Та-

) $\Phi''(x)$ — это линейный оператор, действующий из $X = H$ в X^ и определяемый соотношением $\Phi'(x+h) = \Phi'(x) + \Phi''(x)(h) + o(h)$, где $\frac{o(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$. Подробнее см. гл. XVII.

ким образом, если в методе наискорейшего спуска направление спуска находится минимизацией производной $\Phi'(x)$ на единичной сфере (сфере направлений), а величина спуска — минимизацией функционала на луче, то в методе условного градиента направление спуска отыскивается минимизацией производной на заданном множестве, а величина спуска — минимизацией функционала на отрезке. Грубо говоря, метод условного градиента представляет собой модификацию метода наискорейшего спуска для отыскания экстремума при ограничениях.

Для метода условного градиента верны аналоги теорем 1, 2 и 3. При этом точка $y \in \Omega$ называется стационарной точкой функционала Φ на множестве Ω , если $\Phi'(y)(y) = \min_{z \in \Omega} \Phi'(y)(z)$. Легко проверить, что точки локального минимума Φ на Ω стационарны, а если Φ — выпуклый функционал, то стационарные точки Φ на Ω — это точки глобального минимума. Если X — гильбертово пространство, Φ — выпуклый функционал; $\inf_{x \in \Omega} \|\Phi'(x)\| > 0$, а Ω — сильно выпуклое множество (т. е. существует $\gamma > 0$ такое, что с каждым своим элементом z , x это множество содержит и элементы $\frac{x+z}{2} + \gamma u$, где $\|u\| \leq \|x - z\|^2$), то последовательность, построенная с помощью метода условного градиента, сходится к единственной точке минимума Φ на Ω со скоростью геометрической прогрессии. Подробное изложение метода условного градиента см. Демьянов, Рубинов.

§ 5. Минимизация выпуклых функционалов в конечномерных пространствах

5.1. В § 4 рассматривался метод наискорейшего спуска в задаче минимизации непрерывно дифференцируемого функционала. Ниже изучается задача минимизации выпуклого функционала на конечномерном евклидовом пространстве R^n .

Пусть Φ — произвольный выпуклый функционал*). Хорошо известно (см., например Рокафеллар), что выпуклый функционал, заданный на R^n , непрерывен.

Вектор $v \in R^n$ называется субградиентом функционала Φ в точке x , если

$$\Phi(z) \geq \Phi(x) + (v, z - x) \quad (1)$$

для всех $z \in R^n$.

Множество субградиентов непусто, выпукло, замкнуто и ограничено. Оно называется субдифференциалом функции Φ в точке x и обозначается через $\partial\Phi(x)$. Субдифференциал — многозначное отображение, о которых подробнее речь пойдет в гл. XVI, § 5. Здесь заметим лишь, что отображение $\partial\Phi(x)$ является полунепре-

*) Определение выпуклого функционала см. в п. 4.2.

рывным сверху, т. е. если $x_h \rightarrow x$, $v_h \rightarrow v$, причем $v_h \in \partial\Phi(x_h)$, то $v \in \partial\Phi(x)$.

Выпуклый функционал Φ является дифференцируемым по направлениям, т. е. для любых $x \in R^n$ и $y \in R^n$ существует

$$\frac{1}{\|y\|} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha} [\Phi(x + \alpha y) - \Phi(x)] \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x),$$

причем

$$\|y\| \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x) = \max_{v \in \partial\Phi(x)} (v, y). \quad (2)$$

Направление $y(x)$, $\|y(x)\| = 1$, называется направлением наискорейшего спуска функционала Φ в точке x , если (ср. (4.1))

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x) = \inf_{\|y\|=1} \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x).$$

Из (2) можно усмотреть, что если $\inf_{\|y\|=1} \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x) < 0$, то направление наискорейшего спуска существует, единственно и может быть найдено по формуле (ср. с примером 1 в п. 4.1)

$$y(x) = - \frac{z(x)}{\|z(x)\|}, \quad (3)$$

где

$$\|z(x)\| = \min_{z \in \partial\Phi(x)} \|z\| \equiv \rho(x).$$

Лемма 1. Для того чтобы выпуклый функционал Φ в точке x достигал минимального на R^n значения, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{\|y\|=1} \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x) \geq 0. \quad (4)$$

Доказательство. Необходимость условия (4) очевидна. Докажем достаточность. Пусть выполнено (4). Утверждается, что тогда точка x — точка минимума. Допустим противное. Пусть существует точка z такая, что $\Phi(z) < \Phi(x)$. Рассмотрим направление $y = \frac{z-x}{\|z-x\|}$. По определению выпуклого функционала тогда при малых α

$$\Phi(x + \alpha y) =$$

$$= \Phi\left(\left(1 - \frac{\alpha}{\|z-x\|}\right)x + \frac{\alpha}{\|z-x\|}z\right) \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\|z-x\|}\right)\Phi(x) + \frac{\alpha}{\|z-x\|}\Phi(z),$$

и потому

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha} [\Phi(x + \alpha y) - \Phi(x)] \leq \frac{1}{\|z-x\|} (\Phi(z) - \Phi(x)) < 0,$$

что противоречит (4).

Геометрически условие (4) эквивалентно тому, что

$$0 \in \partial\Phi(x), \quad (5)$$

Условие (5) является обобщением необходимого условия минимума непрерывно дифференцируемых функционалов: $\Phi'_x = 0$.

Приведем пример. Пусть

$$\Phi(x) = \max_{z \in G} F(x, z), \quad (6)$$

где G — компакт, функционал $F(x, z)$ непрерывен вместе с $F'_x(x, z)$ по совокупности переменных на $R^n \times G$ и является выпуклым по x при каждом фиксированном $z \in G$. Тогда Φ — выпуклый функционал, причем

$$\partial\Phi(x) = \text{co} \{F'_x(x, z): z \in R(x)\},$$

где

$$R(x) = \{z \in G: F(x, z) = \Phi(x)\},$$

co A — выпуклая оболочка множества A .

З а м е ч а н и е. Функционал (6) является, вообще говоря, дифференцируемым по направлениям и тогда, когда F не является выпуклым по x . Более того, справедлива формула (2), хотя $\partial\Phi(x)$ уже не является субдифференциалом.

Пусть $\varepsilon > 0$. Вектор v называется ε -субградиентом функционала Φ в точке x , если

$$\Phi(z) \geq \Phi(x) + (v, z - x) - \varepsilon \quad (7)$$

для всех $z \in R^n$.

Множество всех ε -субградиентов обозначим через $\partial_\varepsilon\Phi(x)$. Это множество замкнуто, выпукло и ограничено. Точка x называется ε -стационарной точкой функционала Φ , если

$$0 \in \partial_\varepsilon\Phi(x). \quad (8)$$

Из (7) легко усмотреть тогда, что

$$0 \leq \Phi(x) - \min_{z \in R^n} \Phi(z) \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Если $0 \notin \partial_\varepsilon\Phi(x)$, то направление $y_\varepsilon(x) = -\frac{z_\varepsilon(x)}{\|z_\varepsilon(x)\|}$, где $\|z_\varepsilon(x)\| = \min_{z \in \partial_\varepsilon\Phi(x)} \|z\| \equiv \rho_\varepsilon(x)$, называется направлением ε -наискорейшего спуска функционала Φ в точке x . Отображение $\partial_\varepsilon\Phi(x)$ является тоже полунепрерывным сверху.

Пусть $v \in \partial\Phi(x)$. Тогда из (1)

$$\begin{aligned} \Phi(z) &\geq \Phi(x) + (z - x, v) = \\ &= \Phi(x_0) + (v, z - x_0) + [\Phi(x) - \Phi(x_0) + (v, x_0 - x)], \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что при x , достаточно близких к x_0 ,

$$\partial\Phi(x) \subset \partial_*\Phi(x_0). \quad (10)$$

5.2. Естественно рассмотреть метод наискорейшего спуска в данной ситуации.

Возьмем произвольное $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть уже найдено $x_k \in \mathbb{R}^n$. Если $0 \in \partial\Phi(x_k)$, то точка x_k — точка минимума, и процесс прекращается. Если же $0 \notin \partial\Phi(x_k)$, то найдем $y_{k+1} = y(x_k)$ (см. (3)). Направление y_{k+1} является направлением наискорейшего спуска функционала Φ в точке x_k . Рассмотрим луч

$$x_{k\alpha} = x_k + \alpha y_{k+1}, \quad \alpha \geq 0,$$

и найдем

$$\min_{\alpha \geq 0} \Phi(x_{k\alpha}) = \Phi(x_{k\alpha_k}).$$

Положим $x_{k+1} = x_{k\alpha_k}$. Очевидно, что $\Phi(x_{k+1}) < \Phi(x_k)$.

Однако только что описанный метод может и не сходиться к точке минимума (эффект «заедания»), что вызвано разрывностью отображения $\partial\Phi(x)$ (соответствующий пример см. в книге Демьянов, Малоземов).

5.3. Пусть $\varepsilon > 0$. Для нахождения ε -стационарных точек можно применить следующий метод. Возьмем произвольное $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что множество $\Omega_0 = \{x : \Phi(x) \leq \Phi(x_0)\}$ ограничено. Пусть уже найдено $x_k \in \mathbb{R}^n$. Если $0 \in \partial_*\Phi(x_k)$, то точка x_k — ε -стационарная, и процесс прекращается. Если же $0 \notin \partial_*\Phi(x_k)$, то найдем $y_{k+1} = y_\varepsilon(x_k)$ и рассмотрим луч $x_{k\alpha} = x_k + \alpha y_{k+1}$ ($\alpha \geq 0$). Найдем $\min_{\alpha \geq 0} \Phi(x_{k\alpha}) = \Phi(x_{k\alpha_k})$. Положим $x_{k+1} = x_{k\alpha_k}$. Ясно, что $\Phi(x_{k+1}) < \Phi(x_k)$.

Далее продолжаем аналогично. В результате построим последовательность точек $\{x_k\}$. Если эта последовательность содержит конечное число точек, то последняя построенная точка является ε -стационарной. Если же эта последовательность бесконечна, то справедлива

Теорема 1. *Всякая предельная точка последовательности $\{x_k\}$ является ε -стационарной точкой функционала Φ .*

Доказательство. Пусть $x_{k_s} \rightarrow \tilde{x}$. Требуется доказать, что $0 \in \partial_*\Phi(\tilde{x})$. Допустим противное. Пусть $\rho_\varepsilon(\tilde{x}) = a > 0$. Из полунепрерывности сверху отображения $\partial_*\Phi(x)$ следует существование $\delta > 0$ такого, что $\rho_\varepsilon(x) \geq a/2$ для всех

$$x \in S_\delta(\tilde{x}) = \{x : \|x - \tilde{x}\| \leq \delta\}.$$

Значит, при достаточно больших k , будет

$$\rho_\varepsilon(x_{k_s}) \geq a/2. \quad (11)$$

Из (10) заключаем, что существует $\delta_1 > 0$ такое, что $\partial\Phi(x) \subset \subset \partial_*\Phi(x_{k_s})$ для всех $x \in S_{\delta_1}(x_{k_s})$ (и достаточно больших k_s). Итак,

на луче $x_{h,s}$ функционал Φ убывает со скоростью, по абсолютной величине не меньшей, чем $a/2$, и на расстоянии не меньше δ_1 . Таким образом,

$$\Phi(x_{h,s+1}) \leq \Phi(x_{h,s}) - \delta_1 \frac{a}{2}.$$

Отсюда $\Phi(x_k) \rightarrow -\infty$, что противоречит предположенной ограниченности множества Ω_0 .

5.4. Для нахождения точек минимума функционала Φ можно теперь поступить так: возьмем произвольные $\varepsilon_0 > 0$, $\rho_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть уже найдены $\varepsilon_k > 0$, $\rho_k > 0$, $x_k \in \mathbb{R}^n$. Если $0 \in \partial\Phi(x_k)$, то x_k — точка минимума. В противном случае, применяя описанный в пункте 5.3 метод (и взяв в качестве начальной точки точку x_k), в конечное число шагов получим точку x_{k+1} такую, что $\rho_{\varepsilon_k}(x_{k+1}) \leq \rho_k$. Теперь полагаем $\varepsilon_{k+1} = \beta \varepsilon_k$, $\rho_{k+1} = \beta \rho_k$, где $\beta \in (0, 1)$ и не зависит от k . В результате строим последовательность $\{x_k\}$. Без труда доказывается (см., например, доказательство теоремы III.7.2 в книге Демьянов, Малоземов) следующая

Теорема 2. *Всякая предельная точка последовательности $\{x_k\}$ является точкой минимума функционала Φ .*

Замечание. Выше описаны «принципиальные» схемы алгоритмов. При их практическом применении решение ряда вспомогательных задач (нахождение направления спуска, минимизация на луче) проводится приближенно.

5.5. Рассмотрим теперь метод обобщенного градиента (см. Ермольев, Шор [1]). Пусть Φ — выпуклый на $\mathbb{R}^n$ функционал, достигающий там минимума, M — множество точек минимума, $\rho(x) = \min_{z \in M} \|z - x\|$. Через M_ε обозначим ε -окрестность множества M :

$$M_\varepsilon = \{x: \rho(x) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть $\partial\Phi(x)$ — субдифференциал функционала Φ в точке x :

$$\partial\Phi(x) = \{z \in \mathbb{R}^n: \Phi(y) - \Phi(x) \geq (z, y - x) \text{ для любого } y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Выберем $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и последовательность положительных чисел $\{\lambda_k\}$ такую, что $\lambda_k \rightarrow 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$.

Построим последовательность $\{x_k\}$ по формулам

$$-x_{k+1} = x_k - \lambda_k y_{k+1}, \quad y_{k+1} = z_{k+1} / \|z_{k+1}\|,$$

где z_{k+1} — произвольный вектор из $\partial\Phi(x_k)$. Если на некотором шаге $z_k = 0$, то $x_k \in M$, и процесс заканчивается.

Пусть теперь последовательность $\{x_k\}$ бесконечна.

Теорема 3. *Если множество M ограничено, то*

$$\rho(x_k) \rightarrow 0, \quad \Phi(x_k) \rightarrow \tilde{\Phi} \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^n} \Phi(x).$$

Доказательство. Пусть $\Omega(x) = \{y: \Phi(y) \leq \Phi(x)\}$. Так как M ограничено, то $\Omega(x)$ тоже ограничено для любого $x \in R^n$ (см. Рокафеллар). Положим

$$T(x) = \{y: \Phi(y) = \Phi(x)\}, \quad b(x) = \min_{v \in T(x)} \rho(y).$$

Нетрудно показать, что

$$M_{b(x)} \subset \Omega(x). \quad (12)$$

Пусть $x \notin M$. Тогда $b(x) > 0$. Возьмем произвольное направление $y = z/\|z\|$, $z \in \partial\Phi(x)$. Для всех $v \in \Omega(x)$ имеем

$$(y, v - x) \leq \frac{1}{\|z\|} (\Phi(v) - \Phi(x)) \leq 0.$$

В частности, для всех $z \in M$ в силу (12)

$$0 \geq (y, z + b(x)y - x).$$

Отсюда без труда получаем, что в направлении $-y$ функционал ρ убывает и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b(x_k) = 0. \quad (13)$$

Из (13) следует, что существует подпоследовательность $\{x_{k_s}\}$, для которой $b(x_{k_s}) \rightarrow 0$. Тогда и $\rho(x_{k_s}) \rightarrow 0$. В действительности можно показать, что и вся последовательность $\rho(x_k)$ сходится к нулю, т. е. $\Phi(x_k) \rightarrow \tilde{\Phi}$.

З а м е ч а н и е. В случае, если функционал Φ непрерывно дифференцируем, его субдифференциал состоит из единственной точки (его градиента). Тогда метод наискорейшего спуска (пункт 5.4) совпадает с методом наискорейшего спуска, рассмотренным в § 4, при условии, что величина спуска выбирается вторым методом, указанным в пункте 1.1. Метод обобщенного градиента (пункт 5.5) совпадает с методом наискорейшего спуска при условии, что величина спуска выбирается третьим способом из пункта 1.1.

Метод наискорейшего спуска подробно описан в книге Демьянов, Малоземов, а метод обобщенного градиента можно найти, например, в работе Ермольева, Шора [1].

Описанные в настоящем параграфе методы распространены и на случай минимизации при наличии ограничений. Это распространение основано на необходимых условиях минимума (см., например, Дубовицкий, Милютин [1] и монографию Пшеничных).

Г л а в а XVI

ПРИНЦИП НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

§ 1. Принцип Каччопполи — Банаха

В этой и следующей главах мы будем рассматривать главным образом нелинейные операторы и уравнения.

1.1. Исследование нелинейных уравнений мы начнем с простейшего случая, обобщающего теорему Банаха об обратном операторе (V.4.5).

Рассмотрим полное метрическое пространство X (не обязательно линейное) и в нем замкнутое множество Ω . Предположим, что на Ω задано отображение P , переводящее Ω в себя. Точка $x^* \in \Omega$ называется неподвижной точкой отображения P , если

$$x^* = P(x^*).$$

Таким образом, неподвижные точки отображения P суть решения уравнения

$$x = P(x). \quad (1)$$

Отображение P может и не иметь неподвижных точек; так, например, будет, если $X = \Omega$ — векторное метрическое пространство и

$$P(x) = x + x_0, \quad x_0 \neq 0.$$

Будем говорить, что отображение P есть оператор сжатия, если существует число $\alpha < 1$ такое, что

$$\rho(P(x), P(x')) \leq \alpha \rho(x, x') \quad (2)$$

для всех $x, x' \in \Omega$. Оказывается, что если P — оператор сжатия, то можно гарантировать существование, и притом только одной, неподвижной точки. Именно, справедлива

Теорема 1. Если P есть оператор сжатия, то в Ω существует единственное решение x^* уравнения (1). При этом x^* может быть получено как предел последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_{n+1} = P(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

а x_0 — произвольный элемент из Ω .

Быстрота сходимости последовательности $\{x_n\}$ к решению дается неравенством

$$\rho(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Доказательство. Так как

$$x_{n+1} = P(x_n), \quad x_n = P(x_{n-1}),$$

то согласно (2)

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha \rho(x_n, x_{n-1}).$$

Последовательно используя аналогичное неравенство, получим

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n \rho(x_1, x_0).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+p}, x_n) &\leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq (\alpha^{n+p-1} + \dots + \alpha^n) \rho(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку $\alpha^n \rightarrow 0$, полученная оценка показывает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе и, следовательно, в силу полноты пространства X сходится к некоторому элементу $x^* \in X$. Так как каждый $x_n \in \Omega$, то вследствие замкнутости Ω и $x^* \in \Omega$, так что имеет смысл $P(x^*)$. Опять, используя (2), имеем

$$\rho(x_{n+1}, P(x^*)) = \rho(P(x_n), P(x^*)) \leq \alpha \rho(x_n, x^*), \quad n = 0, 1, \dots,$$

и, поскольку правая часть здесь стремится к нулю,

$$x_{n+1} \rightarrow P(x^*),$$

откуда

$$x^* = P(x^*).$$

Единственность решения также вытекает из (2). Действительно, если бы существовало еще решение $\tilde{x} \in \Omega$, то было бы

$$\rho(\tilde{x}, x^*) = \rho(P(\tilde{x}), P(x^*)) \leq \alpha \rho(\tilde{x}, x^*),$$

а это возможно лишь в случае, когда $\rho(\tilde{x}, x^*) = 0$, т. е. $\tilde{x} = x^*$. Оценка (3) получается, если перейти в (4) к пределу при $p \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е. Неравенство (3) дает область возможного расположения решения уравнения (1). В частности, при $n = 0$

$$\rho(x^*, x_0) \leq \frac{1}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0). \quad (5)$$

1.2. Условие (2) нельзя, вообще говоря, заменить на более слабое:

$$\rho(P(x), P(x')) < \rho(x, x'), \quad x, x' \in \Omega, \quad x \neq x'. \quad (6)$$

Действительно, пусть $X = \mathbb{R}^1$ — множество вещественных чисел, $\Omega = X$, а отображение P определено следующим образом:

$$P(x) = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x.$$

Нетрудно видеть, что неподвижных точек у отображения P нет, между тем

$$\begin{aligned} \rho(P(x), P(x')) &= |P(x) - P(x')| = \\ &= |P'(\xi)| |x - x'| = \left| \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} \right| |x - x'| < \rho(x, x') \end{aligned}$$

(ξ — точка, лежащая между x и x').

Теорема 2. Если отображение P переводит замкнутое множество $\Delta \subset \Omega$ в относительно компактное множество $\Delta \subset \Omega$ и если выполнено условие (6), то существует единственная неподвижная точка отображения P .

Доказательство. Рассмотрим P на компакте $\bar{\Delta} \subset \Omega$. Так как отображение P , очевидно, непрерывно, то непрерывная функция $\varphi(x) = \rho(x, P(x))$. Функция φ на компакте $\bar{\Delta}$ принимает свое наименьшее значение в точке $x_0 \in \bar{\Delta}$:

$$\rho(x_0, P(x_0)) = \min_{x \in \bar{\Delta}} \rho(x, P(x)).$$

Предположим, что $\rho(x_0, P(x_0)) > 0$. В силу (6) имеем

$$\rho(P(x_0), P^2(x_0)) < \rho(x_0, P(x_0)) = \min_{x \in \bar{\Delta}} \rho(x, P(x)). \quad (7)$$

Однако $P(x_0) \in \bar{\Delta}$, и тем самым неравенство (7) противоречиво. Следовательно, $\rho(x_0, P(x_0)) = 0$ и $x_0 = P(x_0)$.

Если $\tilde{x} \in \Omega$ — некоторая другая неподвижная точка оператора P , то

$$\rho(\tilde{x}, x_0) = \rho(P(\tilde{x}), P(x_0)) < \rho(\tilde{x}, x_0),$$

что приводит к противоречию. Теорема доказана.

1.3. Нередко случается, что отображение P зависит от числового или иного параметра. Тогда решение уравнения (1) также будет зависеть от этого параметра. Можно показать, что непрерывная зависимость P от параметра влечет непрерывную зависимость от параметра решения. Дадим более точные формулировки.

Пусть, кроме пространства X , имеется другое метрическое пространство Y . Предположим, что каждому $y \in Y$ соотнесено отображение P_y , отображающее $\Omega \subset X$ в себя. Мы говорим, что P_y непрерывно по y в точке $y_0 \in Y_0$, если, какова бы ни была последовательность $\{y_n\} \subset Y_0$, $y_n \rightarrow y_0$,

$$P_{y_n}(x) \rightarrow P_{y_0}(x) \quad \text{при каждом } x \in \Omega. \quad (8)$$

Рассмотрим уравнение (точнее, семейство уравнений)

$$x = P_y(x). \quad (9)$$

Предположим, что при каждом $y \in Y$ оно имеет единственное решение, которое, очевидно, будет зависеть от y , так что его естественно обозначить через x_y^* . Будем говорить, что решение уравнения (9) непрерывно зависит от y при $y = y_0$, если, какова бы ни была последовательность $\{y_n\} \subset Y$, $y_n \rightarrow y_0$, будет $x_{y_n}^* \rightarrow x_{y_0}^*$.

В случае, когда при каждом $y \in Y_0$ отображение P_y является оператором сжатия, из непрерывности P_y вытекает непрерывность решения уравнения (9). Точнее говоря, имеет место

Теорема 3. Если при каждом $y \in Y_0$ отображение P_y удовлетворяет условию (2) с α , не зависящим от y , и если в точке $y_0 \in Y_0$ отображение P_y непрерывно по y , то при $y = y_0$ решение уравнения (9) непрерывно зависит от y .

Доказательство. Пусть y — произвольный элемент из Y_0 . Решение x_y^* уравнения (9) построим как предел $\{x_n\}$:

$$x_{n+1} = P_y(x_n), \quad n = 0, 1, \dots; \quad x_0 = x_{y_0}^*.$$

Поскольку $x_{y_0}^* = P_{y_0}(x_{y_0}^*)$, в силу (5) находим

$$\rho(x_y^*, x_{y_0}^*) \leq \frac{1}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0) = \frac{1}{1-\alpha} \rho(P_y(x_{y_0}^*), P_{y_0}(x_{y_0}^*)).$$

Требуемая непрерывность x_y^* при $y = y_0$ отсюда легко усматривается с помощью (8).

Замечание. Совокупность отображений P_y можно трактовать как одно отображение P , сопоставляющее каждой паре (x, y) элементов $x \in \Omega$, $y \in Y_0$ элемент $P(x, y) = P_y(x)$. Точно так же решение x_y^* уравнения (9) можно рассматривать как отображение F , сопоставляющее элементу $y \in Y_0$ элемент $F(y) = x_y^*$.

Доказанную теорему можно поэтому сформулировать так:

Если при каждом $y \in Y_0$

$$\rho(P(x, y), P(x', y)) \leq \alpha \rho(x, x'), \quad x, x' \in \Omega$$

($\alpha < 1$ не зависит от y) и при каждом $x \in \Omega$ отображение P непрерывно по y в точке $y_0 \in Y_0$, то отображение F также непрерывно в точке y_0 .

В приведенной форме принцип неподвижной точки установлен Банахом [1] и Каччопполи. Относительно обобщений на многозначные отображения см.: Иоффе, Тихомиров.

§ 2. Теорема Брауэра

В этом и следующем параграфе будут сформулированы еще два принципа неподвижной точки. Первый — теорема Брауэра — относится к отображениям, определенным на множествах конечномерного пространства. На нем основано доказательство более общего принципа неподвижной точки, так называемого принципа Шаудера, имеющего дело с отображениями произвольных B -пространств.

Изложение в этом и в большей части следующего параграфа принадлежит В. В. Иванову.

2.1. Условимся об используемых далее обозначениях. Рассмотрим отображение F , определенное на множестве E пространства R^n , значения которого лежат в пространстве R^n , такое, что $F(x)$ при любом $x \in E$ представляет собой n -членный набор чисел; i -ю координату элемента $F(x)$ обозначим через $F_i(x)$. Тем самым возникает определенная на множестве E числовая функция F_i , которая называется i -й координатной функцией отображения F . Ясно, что

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)), \quad x \in E.$$

Отображение F называется *гладким* на открытом множестве $U \subset E$, если для любого $x \in U$ каждая координатная функция имеет всевозможные частные производные всех порядков. При этом одностроковая матрица

$$D_j F(x) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right], \quad x \in U, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

называется *частной производной* (по j -й переменной) отображения F в точке x , а $(n \times m)$ -матрица

$$DF(x) = (D_1 F(x), D_2 F(x), \dots, D_m F(x)), \quad x \in U, \quad (2)$$

составленная из столбцов (1), — *производной* отображения F в точке x . Таким образом, элемент матрицы $DF(x)$, находящийся в i -й строке и j -м столбце — это частная производная (в точке x) $D_j F_i(x) = \partial F_i / \partial x_j$, i -й координатной функции отображения F по j -й переменной. Фиксируя стандартные базисы в пространствах R^m и R^n , можно интерпретировать матрицу (2) как линейный оператор из пространства R^m в пространство R^n (см. V.2.8). Если $m = n + 1$, то под $D^k F(x)$ мы будем понимать квадратную матрицу (порядка n), которая получается из матрицы $DF(x)$ вычеркиванием k -го столбца. При этом $\det D^k F(x)$ будет обозначать определитель матрицы $D^k F(x)$.

Лемма 1. Пусть F — гладкое отображение открытого множества W в пространстве R^{n+1} в пространство R^n φ — также

гладкая числовая функция, заданная на R^n . Имеет место формула

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i D_i [(\varphi(F(x)) \det D^i F(x))] = 0, \quad x \in W. \quad (3)$$

Доказательство. Соотношение (3) есть очевидное следствие равенств

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i D_i \det D^i F(x) = 0, \quad x \in W, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i D_i (\varphi(F(x)) \det D^i F(x)) = 0, \quad x \in W. \quad (5)$$

Убедимся сначала в справедливости формулы (4). По правилу дифференцирования определителей *) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i D_i (\det D^i F(x)) &= \sum_{(i,k) \in C} (-1)^i A_{ik}(x) = \\ &= \sum_{(i,k) \in C^+} [(-1)^i A_{ik}(x) + (-1)^k A_{ki}(x)], \end{aligned} \quad (6)$$

где: C — множество всех таких пар (i, k) , что $i, k = 1, 2, \dots, n+1$ и $i \neq k$; C^+ — множество всех пар $(i, k) \in C$, для которых $i < k$; и, наконец, $A_{ik}(x)$ ($i, k \in C, x \in W$) — определитель матрицы, которая получается из матрицы $D^i F(x)$ заменой столбца $D_k F(x)$ столбцом $D_i F(x) = D_i(D_k F(x)) = D_{ki} F(x)$, состоящим из смешанных частных производных координатных функций по i -й и k -й переменным.

Пусть $(i, k) \in C^+$. Чтобы получить определитель $A_{ki}(x)$, надо $(k-1)$ -й столбец определителя $A_{ik}(x)$ поместить между $(i-1)$ -м и i -м столбцами этого определителя **). Тем самым $A_{ki}(x) = (-1)^{i-k+1} A_{ik}(x)$, т. е.

$$(-1)^i A_{ik}(x) + (-1)^k A_{ki}(x) = 0.$$

Подставляя это в (6), убеждаемся в справедливости равенства (4).

*) Вот это правило. Пусть f_{ik} ($i = 1, 2, \dots, n$) — функции, заданные на некотором множестве числовой прямой и дифференцируемые в какой-либо точке t . Составленный из указанных функций определитель Λ также будет дифференцируемой в точке t функцией, причем

$$\Lambda'(t) = \sum_{k=1}^n \Lambda_k(t),$$

где $\Lambda_k(t)$ — определитель, который получается из определителя $\Lambda(t)$ заменой в нем k -го столбца столбцом $(f_{ik}(t))$ ($i = 1, 2, \dots, n$) производных в точке t функций, составляющих k -й столбец определителя Λ .

**) При $i = 1$ $(k-1)$ -й столбец определителя $A_{ik}(x)$ становится первым столбцом определителя $A_{ki}(x)$.

Приступим к доказательству соотношения (5). Поскольку для любого $i = 1, 2, \dots, n+1$

$$D_i \varphi(F(x)) = \sum_{k=1}^n (D_k \varphi)(F(x)) D_i F_k(x),$$

то левую часть равенства (5) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^n (D_k \varphi)(F(x)) \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i D_i F_k(x) \det D^i F(x). \quad (7)$$

Для $k = 1, 2, \dots, n$ и $x \in W$ положим

$$\Gamma^k(x) = (F_k(x), F_1(x), \dots, F_n(x)).$$

Производная $D\Gamma^k(x)$ представляет собой квадратную (порядка $n+1$) матрицу, которая имеет две одинаковые строки — первую и $(k+1)$ -ю. Поэтому определитель этой матрицы $\det D\Gamma^k(x) = 0$. С другой стороны, очевидно,

$$\det D\Gamma^k(x) = - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i D_i F_k(x) \det D^i F(x).$$

С учетом (7) получаем отсюда формулу (5). Этим и завершается доказательство леммы.

Доказанную лемму удобнее использовать в «интегральной» форме. Рассмотрим открытое множество U в пространстве $\mathbb{R}^n$, открытый промежуток Δ числовой прямой и отображение F множества $W = \Delta \times U$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Предположим, что отображение F гладко на множестве W и что имеются компактное множество $K \subset U$ и заданная на $\mathbb{R}^n$ гладкая числовая функция φ такие, что φ обращается в нуль на образе $F(\Delta \times (U \setminus K))$. Для $(t, x) \in W$ через $D_x F(t, x)$ обозначим (не вполне, впрочем, корректно) производную в точке x отображения $F(t, \cdot)^*$. Так как при каждом $t \in \Delta$ функция $h = \varphi(F(t, \cdot))$ может иметь отличные от нуля значения лишь на компактном множестве K , мера Лебега которого конечна, и функция h , будучи гладкой, непрерывна и, стало быть, измерима и ограничена на K , интеграл

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_K \varphi(F(t, x)) \det D_x F(t, x) dx = \\ &= \int_U \varphi(F(t, x)) \det D_x F(t, x) dx, \quad t \in \Delta, \end{aligned} \quad (8)$$

определяет на промежутке Δ конечную функцию d .

*) Отображение $F(t, \cdot)$ сопоставляет точке $x \in U$ значение $F(t, x)$, так что $F(t, \cdot)$ отображает множество U в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, отображение $F(t, \cdot)$ гладко на U .

Лемма 2. *Функция d постоянна на промежутке Δ .*

Доказательство. Символом D_i обозначим дифференцирование по переменной t , а под D_i будем по-прежнему понимать дифференцирование по x_i . Кроме того, для $i = 1, 2, \dots, n$ и $(t, x) \in W$ положим

$$\Phi_i(t, x) = (-1)^{i+1} D_i [\varphi(F(t, x)) \det D^{i+1} F(t, x)].$$

При этих обозначениях на основании леммы 1 будет

$$D_i [\varphi(F(t, x)) \det D_x F(t, x)] = \sum_{t=1}^n \Phi_i(t, x),$$

так что, дифференцируя под знаком интеграла, выводим из (8)

$$\begin{aligned} d'(t) &= \int_U D_i [\varphi(F(t, x)) \det D_x F(t, x)] dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_U \Phi_i(t, x) dx, \quad t \in \Delta. \end{aligned} \quad (9)$$

Если $i = 1, 2, \dots, n$ и $x \in \mathbb{R}^n$, то под x^i будем понимать точку пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ с координатами $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Для $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ через $U_i(y)$ обозначим сечение множества U вдоль i -й оси — множество i -х координат всех таких точек $x \in U$, что $x^i = y$. Согласно теореме Фубини для любого $i = 1, 2, \dots, n$

$$\int_U \Phi_i(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{U_i(x^i)} \Phi(t, x) dx_i \right) dx^i. \quad (10)$$

Но при любом $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ сечение $U_i(y)$ является открытым множеством на числовой прямой, и поэтому, коль скоро оно непусто, представляет собой объединение конечного или счетного множества попарно не пересекающихся открытых промежутков. Так как вследствие компактности множества K вблизи концов каждого такого промежутка $\varphi(F(t, x)) = 0$, то внутренний интеграл формулы (10) по теореме Ньютона — Лейбница равен нулю. Это обстоятельство, разумеется, имеет место и для тех $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $U_i(x^i) = \emptyset$. Таким образом, $d'(t) = 0$ для каждого $t \in \Delta$, что и означает постоянство функции d на промежутке Δ .

2.2. Лемма 2 лежит в основе доказательства теоремы Брауэра для гладких отображений.

Фиксируя в пространстве $\mathbb{R}^n$ какую-либо норму*), обозначим через B единичный замкнутый шар, а через S — его топологическую границу, которая, очевидно, совпадает с множеством всех таких $x \in \mathbb{R}^n$, что $\|x\| = 1$.

*) До сих пор в этом не было необходимости, поскольку в силу теоремы 2 (IV, 1.6) любые две нормы в конечномерном пространстве эквивалентны, т. е. определяют одну и ту же топологию.

Лемма 3. Если f — гладкое (на R^n) отображение пространства R^n в себя и $f(S) \subset B$, то в шаре B существует по крайней мере одна неподвижная точка отображения f .

Доказательство. Предположим, что в шаре B отсутствуют неподвижные точки отображения f . Тогда можно подобрать такие числа $\varepsilon \in (0, 1)$ и $r > 1$, что для точек x замкнутого шара B_r радиуса r будет выполняться соотношение

$$\|x - f(x)\| \geq \varepsilon, \quad x \in B_r. \quad (11)$$

Определим теперь отображение F пространства R^{n+1} в пространство R^n , полагая для $t \in R$ и $x \in R^n$

$$F(t, x) = (t-1)f(x) + x = (1-t)(x - f(x)) + tx, \quad (12)$$

и докажем, что для любых $t \in [0, 1]$ и $x \in S$ значение $F(t, x)$ отлично от нуля. Действительно, если бы существовала такая пара $(t_0, x_0) \in [0, 1] \times S$, что $F(t_0, x_0) = 0$, т. е. что

$$x_0 = (1-t_0)f(x_0), \quad (13)$$

то, поскольку $\|x_0\| = 1$ и по условию $\|f(x_0)\| \leq 1$, было бы справедливо соотношение

$$1 = \|x_0\| = (1-t_0)\|f(x_0)\| \leq 1-t_0 \leq 1,$$

из которого следует равенство $t_0 = 0$; так что в соответствии с (13) было бы $x_0 = f(x_0)$, т. е. x_0 оказалась бы неподвижной точкой отображения f , что противоречило бы предположению об отсутствии в шаре B и, в частности, на его границе S неподвижных точек отображения f . Так как F — гладкое и, следовательно, непрерывное отображение, из доказанного вытекает, что, уменьшив, если необходимо, числа ε и r (сохраняя, однако, условия $\varepsilon > 0$ и $r > 1$), можно подобрать открытый промежуток $\Delta \supset [0, 1]$ и число $p \in (0, 1)$ так, что

$$\|F(t, x)\| \geq \varepsilon, \quad t \in \Delta, \quad x \in R^n, \quad p \leq \|x\| \leq r. \quad (14)$$

В лемме 2 примем за U внутренность B_r° шара B_r , за K — замкнутый шар B_p радиуса p , компактность которого обеспечивается следствием 2 из теоремы 2 (IV.1.6), и, наконец, в качестве φ возьмем такую гладкую на R^n функцию, что

$$\varphi(y) = 0, \quad y \in R^n, \quad \|y\| \geq \varepsilon, \quad \int_{R^n} \varphi(y) dy = \int_U \varphi(x) dx = 1. \quad (15)$$

Так как множество $U \setminus K$ состоит из всех $x \in R^n$, для которых $p < \|x\| < r$, в силу (14) и (15) для каждого $t \in \Delta$ функция $\varphi(F(t, \cdot))$ на $U \setminus K$ обращается в нуль. Таким образом, множества U и K , отображение F и функция φ удовлетворяют условиям леммы 2. Стало быть, функция d , определенная формулой (8), постоянна на Δ . В частности, $d(0) = d(1)$. Но согласно (12) и

(11) $\|F(0, x)\| \geq \varepsilon$ для $x \in U$. Тем самым на основании (15) $\Phi(F(0, x)) = 0$ и, значит, $d(0) = 0$. С другой стороны, ввиду (12) $F(1, x) = x$ ($x \in U$). Следовательно, $D_x F(1, x)$ — диагональная единичная матрица, определитель которой, очевидно, равен единице. Поэтому на основании (15) $d(1) = \int_U \varphi(x) dx = 1$. По-

скольку оказалось $d(0) \neq d(1)$, предположение о том, что f не имеет в шаре B неподвижных точек, неверно.

Имея в виду перенести результат леммы 3 на отображения, которые лишь непрерывны и определены только на шаре B , убедимся в возможности аппроксимации таких отображений отображениями, удовлетворяющими всем условиям леммы 3.

Лемма 4. *Каково бы ни было непрерывное отображение f шара B в пространстве R^n , если удовлетворено условие $f(S) \subset B$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое гладкое на R^n отображение $\tilde{f}$ пространства R^n в себя, что*

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| \leq \varepsilon, \quad x \in B, \quad \tilde{f}(S) \subset B. \quad (16)$$

Доказательство. Поскольку отображение f непрерывно, а, как отмечалось, множество B компактно, образ $f(B)$ также будет компактным и тем более ограниченным множеством. Поэтому можно подобрать такое число $\alpha \in (0, 1)$, что

$$\|f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)}, \quad x \in B. \quad (17)$$

Применяя к каждой координатной функции отображения αf теорему Вейерштрасса, можно сколь угодно точно аппроксимировать на шаре B любую из этих функций полиномом от переменных x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Используя эти соображения, можно подобрать такое определенное на всем R^n отображение $\tilde{f}$ в R^n , что все его координатные функции являются полиномами (так что $\tilde{f}$ гладко на R^n) и

$$\|\tilde{f}(x) - \alpha f(x)\| \leq \min(\varepsilon/2, 1 - \alpha), \quad x \in B. \quad (18)$$

Убедимся, что для отображения $\tilde{f}$ соблюдены соотношения (16). Если $x \in B$, то вследствие (17) и (18) будет

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| \leq (1 - \alpha)\|f(x)\| + \|\tilde{f}(x) - \alpha f(x)\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Если же $x \in S$, то, поскольку при этом по условию $\|f(x)\| \leq 1$, по тем же основаниям должно быть

$$\|\tilde{f}(x)\| \leq \|\tilde{f}(x) - \alpha f(x)\| + \alpha\|f(x)\| \leq (1 - \alpha) + \alpha = 1,$$

так что $\tilde{f}(S) \subset B$.

Сформулируем теперь упоминавшееся обобщение леммы 3.

Лемма 5. *Если f — непрерывное отображение шара B в пространство R^n , причем $f(S) \subset B$, то в B существует по крайней мере одна неподвижная точка отображения f .*

Доказательство. Полагая последовательно $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \dots, \dots, \frac{1}{m}, \dots$, на основании леммы 4 найдем такую последовательность $\{f_m\}$ гладких отображений пространства R^n в себя, что

$$f_m(S) \subset B, \quad \|f(x) - f_m(x)\| \leq 1/m, \quad x \in B, \quad m = 1, 2, \dots \quad (19)$$

В силу леммы 3 для любого $m = 1, 2, \dots$ отображение f_m имеет в шаре B неподвижные точки. Одну из этих точек обозначим через x_m , так что $f_m(x_m) = x_m$ ($m = 1, 2, \dots$). Поскольку шар B — компактное множество, из последовательности $\{x_m\}$ можно извлечь сходящуюся к некоторой точке $x^* \in B$ подпоследовательность. Будем считать, что это уже сделано, т. е. что $x_m \rightarrow x^*$ при $m \rightarrow \infty$. Так как для $m = 1, 2, \dots$

$$f(x^*) - x_m = (f(x^*) - f(x_m)) + (f(x_m) - f_m(x_m))$$

и ввиду непрерывности отображения f первое слагаемое в правой части этого равенства сходится (при $m \rightarrow \infty$) к нулевому элементу, а в силу (19) то же самое справедливо для второго слагаемого, получаем $f(x^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x^*$. Таким образом, x^* — неподвижная точка отображения f .

З а м е ч а н и е. Результат доказанной леммы справедлив и в том случае, когда под B понимается единичный замкнутый шар в произвольном конечномерном (размерности n) нормированном пространстве X , а под f — отображение шара B в пространстве X . Действительно, выбрав и зафиксировав в пространстве X какой-либо базис и сопоставляя элементу $x \in X$ элемент $y = Q(x) \in \mathbb{R}^n$, координаты которого (в $\mathbb{R}^n$) совпадают с координатами элемента x (в выбранном базисе), мы получим линейный оператор Q , взаимно однозначно отображающий пространство X на пространство $\mathbb{R}^n$. Понятно, что можно нормировать пространство $\mathbb{R}^n$ так, что оператор Q будет изометрическим. Ясно, что при этом образ $Q(B)$ окажется замкнутым единичным шаром $\mathbb{R}^n$, а отображение $\tilde{f} = Q^{-1}fQ$ будет удовлетворять всем условиям леммы 5. Не составляет труда убедиться, что если $y^* \in Q(B)$ — неподвижная точка отображения $\tilde{f}$, то $x^* = Q^{-1}(y^*)$ — неподвижная точка отображения f , принадлежащая шару B .

2.4. Теорема Брауэра отличается от леммы 5 (точнее, от замечания к ней) тем, что вместо шара B в конечномерном пространстве рассматривается конечномерное компактное выпуклое множество Ω в произвольном (не обязательно конечномерном) нормированном пространстве X^* , но зато от отображения f ,

*) Множество Ω в нормированном пространстве X называется *конечномерным*, если линейная оболочка $\mathcal{L}(\Omega)$ представляет собой конечномерное подпространство пространства X .

кроме непрерывности, требуется, чтобы $f(\Omega) \subset \Omega$. Указанные изменения в условиях леммы 5 возможны благодаря следующей лемме.

Лемма 6. Пусть X — нормированное пространство, B_x — замкнутый единичный шар в X , Ω — замкнутое ограниченное выпуклое множество в X , имеющее внутренние точки. Существует гомеоморфизм T пространства X на себя такой, что $T(\Omega) = B_x$.

Доказательство. Комбинируя сдвиг с гомотетией, можно добиться того, что 0 окажется внутренней точкой множества Ω и что $B_x \subset \Omega$. Первое из этих условий позволяет говорить о функционале Минковского множества Ω (см. II.3.2), который мы обозначим через p . Функционал p непрерывен на X и ввиду замкнутости множества Ω

$$\Omega = \{x \in X: p(x) \leq 1\} \quad (20)$$

(см. III.2.1). Если $x \in X$ и $x \neq 0$, то $x/\|x\| \in B_x \subset \Omega$. Стало быть, согласно (20) $p(x/\|x\|) \leq 1$, т. е.

$$\Omega(x) \leq \|x\|. \quad (21)$$

Понятно, что соотношение (21) имеет место и при $x=0$. Поскольку множество Ω ограничено, найдется открытый шар K , радиуса r , содержащий множество Ω . Взяв опять отличный от нулевого элемент $x \in X$, будем иметь $rx/\|x\| \notin K$, так что в силу (20) $p(rx/\|x\|) > 1$. Следовательно, поскольку $p(0) = 0$,

$$p(x) \geq \frac{1}{r} \|x\|, \quad x \in X. \quad (22)$$

Из (22) вытекает, что $p(x) = 0$ только при $x = 0$.

Определим теперь отображения T и Θ пространства X в себя, полагая $T(0) = \Theta(0) = 0$, а для $x \neq 0$

$$T(x) = \frac{p(x)}{\|x\|} x, \quad \Theta(x) = \frac{\|x\|}{p(x)} x.$$

Ввиду непрерывности и указанного выше свойства функционала p отображения T и Θ непрерывны в каждой точке пространства X , отличной от нулевого элемента, а так как вследствие (21) и (22)

$$\|T(x)\| = p(x) \leq \|x\|, \quad \|\Theta(x)\| \leq r\|x\|, \quad (23)$$

эти отображения непрерывны и в точке 0.

Заметим еще, что для каждого $x \in X$ и $\lambda > 0$ ввиду положительной однородности функционала p и нормы $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ и

$\Theta(\lambda x) = \lambda \Theta(x)$. Поэтому *)

$$T(\Theta(x)) = \frac{\|x\|}{p(x)} T(x) = \frac{\|x\|}{p(x)} \frac{p(x)}{\|x\|} x = x, \quad x \in X,$$

$$\Theta(T(x)) = \frac{p(x)}{\|x\|} \Theta(x) = \frac{p(x)}{\|x\|} \frac{\|x\|}{p(x)} x = x, \quad x \in X.$$

Эти соотношения означают, что отображения T и Θ взаимно однозначно и, как показано, непрерывно отображают пространство X на себя, причем $\Theta = T^{-1}$. Стало быть, T — гомеоморфизм пространства X на себя. Остается заметить, что на основании (20) и (23) $T(\Omega) = B_X$.

С помощью леммы 6 доказывается утверждение, которое можно считать одним из вариантов теоремы Брауэра.

Следствие. Пусть X — конечномерное нормированное пространство, Ω — выпуклое замкнутое ограниченное множество в X , обладающее внутренними точками, f — непрерывное отображение пространства X в себя. Если образ $f(\partial\Omega)$ границы $\partial\Omega$ множества Ω содержится в Ω , то отображение f имеет в Ω неподвижную точку.

Действительно, обозначим через B единичный замкнутый шар пространства X и через T — гомеоморфизм пространства X на себя такой, что $T(\Omega) = B$ (лемма 6). Множество $S = T(\partial\Omega)$ есть, очевидно, граница шара B . Не составляет труда проверить, что отображение $\tilde{f} = TfT^{-1}$ удовлетворяет всем условиям замечания к лемме 5, и, значит, в шаре B существует неподвижная точка y^* отображения $\tilde{f}$. Понятно, что точка $x^* = T^{-1}(y^*)$ будет неподвижной точкой отображения f , принадлежащей множеству Ω .

Докажем, наконец, и саму теорему Брауэра.

Теорема (Брауэр). Пусть Ω — конечномерное выпуклов компактное множество в нормированном пространстве X . Всякое непрерывное отображение множества Ω в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $0 \in \Omega$. Конечномерность множества Ω означает по определению конечномерность линейной оболочки $\mathcal{L}(\Omega)$ этого множества. Заменяя, если нужно, пространство X подпространством $\mathcal{L}(\Omega)$, можно добиться того, что X будет конечномерным нормированным пространством, совпадающим с линейной оболочкой множества Ω . Убедимся, что при всех этих дополнительных предположениях Ω будет иметь внутренние точки. Оставляя в стороне вырожденный случай, когда $\Omega = \{0\}$ **), по индукции можно найти

*) В следующих ниже формулах при $x = 0$ мы принимаем для определенности $\|x\|/p(x) = p(x)/\|x\| = 1$.

**) В этом случае $X = \mathcal{L}(\Omega) = \Omega$, и не только доказываемое утверждение, но и сама теорема верна тривиальным образом.

такое конечное непустое множество $E \subset \Omega$, что его элементы линейно независимы *) и $\Omega \subset \mathcal{P}(E)$. Поскольку при этом $X = \mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{P}(E) \subset X$, имеет место равенство $X = \mathcal{P}(E)$, так что множество E служит базисом пространства X . Обозначая через n число элементов базиса E , а сами его элементы — через $e_1, e_2, \dots, e_n$, примем $u = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n e_k$ и введем множество U всех элементов пространства X , координаты которых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ (в базисе E) удовлетворяют соотношениям

$$\xi_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{k=1}^n \xi_k < 1.$$

Так как каждый линейный функционал в конечномерном пространстве, в частности функционал, сопоставляющий элементу $x \in X$ его k -ю координату ($k = 1, 2, \dots, n$), непрерывен (см. V.2.8), множество U открыто. Принимая $e_0 = 0$ и для элемента $x \in U$ обозначая $\xi_0 = 1 - \sum_{k=1}^n \xi_k$, будем иметь $x = \sum_{k=0}^n \xi_k e_k$. Вви-

ду того, что $\xi_k > 0$, $e_k \in \Omega$ ($k = 0, 1, \dots, n$) и $\sum_{k=0}^n \xi_k = 1$, выпуклость множества Ω влечет за собой включение $x \in \Omega$. Таким образом, $U \subset \Omega$. Но, очевидно, $u \in U$. Следовательно, u — внутренняя точка множества Ω .

Рассмотрим теперь непрерывное отображение множества Ω в себя. Применяя к каждой координатной функции этого отображения теорему Урысона о распространении непрерывной функции, мы построим непрерывное отображение f пространства X в себя, совпадающее с данным в точках множества Ω . Так как $f(\partial\Omega) \subset f(\Omega) \subset \Omega$, мы оказываемся в условиях следствия из леммы 6, применение которого завершает доказательство теоремы.

Доказанная теорема позволяет несколько уточнить результат следствия из леммы 6.

Следствие. Пусть X — конечномерное нормированное пространство и Ω — выпуклое замкнутое ограниченное множество в X . Всякое непрерывное отображение f пространства X в себя, удовлетворяющее условию $f(\partial\Omega) \subset \Omega$, имеет неподвижную точку в множестве Ω .

В самом деле, если у Ω есть внутренние точки, то сформулированное утверждение совпадает со следствием из леммы 6. В случае, когда внутренних точек у Ω нет, это множество, будучи замкнутым, нигде не плотно и, следовательно, совпадает

*) Именно поэтому число элементов множества E не может превышать размерности пространства X .

со своей границей. Стало быть, $f(\Omega) = f(\partial\Omega) \subset \Omega$ и можно воспользоваться теоремой Брауэра.

З а м е ч а н и е. Уже на примерах одномерного пространства можно показать, что все условия как самой теоремы Брауэра, так и следствия из нее существенны.

§ 3. Принцип Шаудера

Доказанная в предыдущем параграфе теорема Брауэра, хотя и является теоремой о неподвижной точке, но, будучи «копечномерной», не пригодна для серьезных применений в функциональном анализе. Оказывается, однако, что теорема Брауэра остается верной, если опустить предположение о копечномерности множества Ω . Это вытекает из принципа неподвижной точки Шаудера, который утверждает существование неподвижной точки у всякого компактного отображения P замкнутого ограниченного множества Ω (в нормированном пространстве X) в себя*). Идея доказательства принципа Шаудера заключается в установлении возможности сколь угодно точно аппроксимировать компактное отображение конечномерным, т. е. отображением, область значений которого лежит в конечномерном подпространстве пространства X .

3.1. Прежде чем осуществлять указанную выше идею, докажем одно вспомогательное утверждение топологического свойства — простейший вариант так называемой теоремы о разложении единицы. С этой целью сделаем сначала небольшое замечание.

Рассмотрим метрическое пространство X (с метрикой ρ), и пусть F — непустое замкнутое множество в X . Для $x \in X$ положим

$$d(x, F) = \inf_{z \in F} \rho(x, z). \quad (1)$$

Неотрицательное число $d(x, F)$ называется *расстоянием от точки x до множества F* (**). Если, кроме x , имеется еще точка $y \in X$, то можно написать

$$\begin{aligned} d(x, F) &\leq \inf_{z \in F} (\rho(x, y) + \rho(y, z)) = \rho(x, y) + \inf_{z \in F} \rho(y, z) = \\ &= \rho(x, y) + d(y, F), \end{aligned}$$

*) Напомним, что отображение P какого-либо множества Ω в нормированном пространстве X в топологическое пространство Y называется *компактным*, если P непрерывно на Ω и образ любого ограниченного подмножества множества Ω относительно компактен в пространстве Y . Понятно, что в рассматриваемой обстановке компактность отображения P означает, кроме его непрерывности, относительную компактность образа $P(\Omega)$.

**) Разумеется, в определении расстояния $d(x, F)$ существенна лишь негустота множества F .

так что $d(x, F) - d(y, F) \leq \rho(x, y)$. По тем же основаниям должно быть $d(y, F) - d(x, F) \leq \rho(y, x) = \rho(x, y)$. Следовательно,

$$|d(x, F) - d(y, F)| \leq \rho(x, y), \quad x, y \in X. \quad (2)$$

Согласно (1) равенство $d(x, F) = 0$ означает, что в множестве F имеются точки, сколь угодно близкие к точке x , т. е. что $x \in \bar{F} = F$. Таким образом,

$$\{x \in X: d(x, F) = 0\} = F. \quad (3)$$

Возьмем точку $z \in X \setminus F$ и, выбрав достаточно большое число k_z , положим $\lambda^z(x) = k_z d(x, F)$ ($x \in X$). Из соотношений (2) и (3) следует, что функция λ^z непрерывна на X , обращается в нуль в точках множества F , причем (за счет выбора k_z) можно добиться соблюдения неравенства $\lambda^z(z) > 1$. Таким образом,

$$\lambda^z(x) \geq 0, \quad x \in X; \quad \lambda^z(x) = 0, \quad x \in F; \quad \lambda^z(z) > 1. \quad (4)$$

О непрерывной на X функции λ^z , удовлетворяющей условиям (4), мы будем говорить, что она *отделяет точку z от* (замкнутого) *множества F* . Ясно, что отделяющая функция существует и тогда, когда $F = \emptyset$.

Лемма 1. Пусть K — компактное множество в метрическом пространстве X , m — натуральное число и $U_1, U_2, \dots, U_m$ — такие открытые множества, что $K \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$. Существуют неотрицательные непрерывные на X функции φ_i ($i = 1, 2, \dots, m$), которые удовлетворяют условиям

$$\varphi_i(x) = 0, \quad x \in F_i = X \setminus U_i; \quad \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) = 1, \quad x \in K. \quad (5)$$

Доказательство. Зафиксируем $i = 1, 2, \dots, m$ и точку $z \in K \cap U_i$ и, понимая, под λ_i^z функцию, отделяющую точку z от множества F_i , обозначим $G_i(z) = \{x \in X: \lambda_i^z(x) > 1\}$. Множество $G_i(z)$ открыто и включает в себя точку z . Кроме того,

$$\bar{G}_i(z) \subset \{x \in X: \lambda_i^z(x) > 0\} \subset X \setminus F_i = U_i. \quad (6)$$

Так как $K \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$, совокупность всех множеств вида $G_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, m; z \in K \cap U_i$) является открытым покрытием компакта K . Следовательно, существуют такие конечные множества *) $A_i \subset K \subset U_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), что $K \subset \bigcup_{i=1}^m \left(\bigcup_{z \in A_i} G_i(z) \right)$. Для

*) Если $A_i = \emptyset$, то принимаем $V_i = \emptyset$, а в качестве φ_i берем функцию, все значения которой равны нулю.

$i = 1, 2, \dots, m$ положим

$$V_i = \bigcup_{z \in A_i} G_i(z), \quad \psi_i = \sum_{z \in A_i} \lambda_i^z.$$

Ввиду (6) открытые множества V_i и неотрицательные непрерывные на X функции ψ_i обладают свойствами

$$\psi_i(x) > 1, \quad x \in V_i, \quad \psi_i(x) = 0, \quad x \in F_i. \quad (7)$$

Тем самым, полагая $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$ и $\psi = \sum_{i=1}^m \psi_i$, можем написать

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m \left(\bigcup_{z \in A_i} G_i(z) \right) = \bigcup_{i=1}^m V_i = V; \quad \psi(x) > 1, \quad x \in V. \quad (8)$$

Так как при $m = 1$, очевидно, $V = V_1$ и $\psi = \psi_1$, функция ψ_1 :

$$\psi_1(x) = \min(1, \psi(x)), \quad x \in X,$$

согласно (7) и (8) решает дело в этом случае.

Предположим, что $m > 1$, и введем множества

$$W = \{x \in X: \psi(x) > 1\}, \quad H = \{x \in X: \psi(x) < 1/2\}.$$

Поскольку функция ψ непрерывна на X , эти множества открыты. Кроме того, ясно, что $H \subset X \setminus W$, а в силу (8) $W \supset K$. Поэтому по доказанному (случай $m = 1$) существует неотрицательная непрерывная на X функция μ , которая в точках компакта K принимает значения, равные единице, а на множестве $X \setminus W$ и, в частности, на множестве H обращается в нуль. Обозначим наконец

$$U = \{x \in X: \psi(x) > 0\}, \quad F = X \setminus U = \{x \in X: \psi(x) = 0\}$$

и для $i = 1, 2, \dots, m$ определим на X функции φ_i :

$$\varphi_i(x) = \frac{\mu(x) \psi_i(x)}{\psi(x)}, \quad x \in U, \quad \varphi_i(x) = 0, \quad x \in F. \quad (9)$$

Так как множество U открыто, каждая из функций φ_i непрерывна в точках множества U . Любая из этих функций, обращаясь в нуль на открытом множестве H , непрерывна и в точках этого множества. Стало быть, функции (9) непрерывны в каждой точке $x \in U \cup H = X$. Из равенства $\mu(x) = 1$ ($x \in K$) и соотношений (7) вытекает, что функции φ_i удовлетворяют и всем остальным требованиям леммы.

З а м е ч а н и е. Доказательство леммы без каких-либо изменений годится и в том случае, когда под X понимается топологическое (T_3^+) — пространство, т. е. такое топологическое пространство, что для любого замкнутого множества $F \subset X$ и каждой точки $z \in X \setminus F$ существует (неотрицательная и непрерывная на X) функция λ^z , отделяющая точку z от множества F (см. (4)). Нетрудно показать, что указанным свойством обладают локально выпуклые пространства и, вообще, топологические векторные пространства.

3.2. Теперь мы можем доказать основную лемму этого параграфа об аппроксимации.

Лемма 2. Пусть Ω — непустое топологическое пространство, X — нормированное пространство, P — такое непрерывное отображение пространства Ω в пространство X , что область значений $P(\Omega)$ относительно компактна в X . Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует конечномерное выпуклое компактное множество $C \subset X$, содержащееся в выпуклой замкнутой оболочке области значений $P(\Omega)$, и такое непрерывное отображение P_ε пространства Ω в пространство X , что

$$P_\varepsilon(\Omega) \subset C; \quad \|P(\omega) - P_\varepsilon(\omega)\| \leq \varepsilon, \quad \omega \in \Omega. \quad (10)$$

Доказательство. Обозначим через K замыкание $\overline{P(\Omega)}$ области значений $P(\Omega)$ и через U — открытый шар радиуса ε с центром в нулевом элементе пространства X . Множество $P(\Omega)$ относительно компактно. Это означает, что его замыкание K компактно. Кроме того, будучи относительно компактным, множество $P(\Omega)$ вполне ограничено. Следовательно, поскольку $P(\Omega) \neq \emptyset$, существует натуральное число m и точки $x_i \in P(\Omega)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) такие, что открытые множества $U_i = x_i + U$ — открытые шары (радиуса ε) с центрами в точках x_i — образуют покрытие компакта K . Применяя к множествам K и U_i лемму 1, найдем неотрицательные непрерывные на X функции φ_i ($i = 1, 2, \dots, m$), для которых соблюдены соотношения (5). Убедимся, что

$$\varphi_i(P(\omega))\|P(\omega) - x_i\| \leq \varepsilon \varphi_i(P(\omega)), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad \omega \in \Omega. \quad (11)$$

Действительно, во всяком случае $P(\omega) \in K$. Поэтому согласно (5) $0 \leq \varphi_i(P(\omega)) \leq 1$. Если, кроме того, $P(\omega) \in F_i = X \setminus U_i$, то также на основании (5) $\varphi_i(P(\omega)) = 0$, и соотношение (11) выполняется тривиальным образом. В случае же, когда $P(\omega) \in U_i$, (11) очевидным образом вытекает из соотношения $\|P(\omega) - x_i\| < \varepsilon$.

Поскольку (см. (5)) $\sum_{i=1}^m \varphi_i(P(\omega)) = 1$ ($\omega \in \Omega$), из (11) следует

$$\begin{aligned} \left\| P(\omega) - \sum_{i=1}^m x_i \varphi_i(P(\omega)) \right\| &\leq \sum_{i=1}^m \varphi_i(P(\omega)) \|P(\omega) - x_i\| \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^m \varphi_i(P(\omega)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Остается приять $P_\varepsilon(\omega) = \sum_{i=1}^m x_i \varphi_i(P(\omega))$ ($\omega \in \Omega$) и в качестве C взять выпуклую замкнутую оболочку множества $\{x_1, \dots, x_m\}$ *). Так как конечномерное подпространство норми-

*) Нетрудно показать, что выпуклая оболочка конечного множества в хаусдорфовом локально выпуклом пространстве замкнута. Поэтому C есть просто выпуклая оболочка множества $\{x_1, \dots, x_m\}$.

рованного пространства замкнуто, $C \subset X_0 = \mathcal{L}(x_1; x_2, \dots, x_m)$. Стало быть, множество C конечномерно. Будучи ограниченным (очевидно, $\|x\| \leq \max(\|x_1\|, \dots, \|x_m\|)$ для любого $x \in C$) и замкнутым, множество C компактно.

З а м е ч а н и е. По той же схеме, но с использованием вместо самой леммы 1 замечания к ней, может быть доказан и более сильный результат, когда в роли X выступает локально выпуклое хаусдорфово пространство. Именно, при этих условиях можно утверждать, что для любой (открытой) окрестности U нулевого элемента пространства X существует конечномерное компактное выпуклое множество $C \subset X$, содержащееся в выпуклой замкнутой оболочке области значений $P(\Omega)$, и непрерывное отображение P_U пространства Ω в пространство X такие, что

$$P_U(\omega) \in C; \quad P(\omega) - P_U(\omega) \in U, \quad \omega \in \Omega.$$

3.3. Теперь все готово, чтобы доказать принципы неподвижной точки Шаудера. Нам удобнее сначала доказать второй принцип.

Теорема (Шаудер). Пусть X — нормированное пространство, Ω — выпуклое замкнутое множество в нем и P — непрерывное отображение множества Ω в себя. Если область значений $P(\Omega)$ относительно компактна в X , то отображение P имеет неподвижные точки.

Доказательство. В лемме 2 положим последовательно $\varepsilon = 1, 1/2, \dots$; в результате этого возникнут последовательность $\{C_n\}$ конечномерных компактных множеств в пространстве X , каждое из которых содержится в выпуклой замкнутой оболочке Ω_0 области значений $P(\Omega)$, и последовательность $\{P_n\}$ непрерывных отображений множества Ω в пространство X такая, что для каждого $n = 1, 2, \dots$

$$P_n(x) \in C_n; \quad \|P(x) - P_n(x)\| \leq 1/n, \quad x \in \Omega. \quad (12)$$

Так как Ω — выпуклое замкнутое множество и $P(\Omega) \subset \Omega$, справедливо соотношение $C_n \subset \Omega_0 \subset \Omega$ ($n = 1, 2, \dots$). Поэтому с учетом (12) должно быть $P_n(C_n) \subset P_n(\Omega) \subset C_n$. Это соотношение позволяет применить к сужению отображения P_n на множество C_n теорему Брауэра (см. XVI.2.4), вследствие чего образуется последовательность $\{x_n\}$ неподвижных точек отображений P_n , так что

$$x_n \in C_n \subset \Omega; \quad P(x_n) = x_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тем самым на основании (12) должно быть $\lim_{n \rightarrow \infty} (P(x_n) - x_n) = 0$.

Рассмотрим последовательность $\{P(x_n)\}$. Так как множество $P(\Omega)$ относительно компактно, указанную последовательность можно разредить так, что получится сходящаяся к некоторой точке $x^* \in \overline{P(\Omega)} \subset \Omega$ последовательность. Считая для простоты, что уже сама последовательность $\{P(x_n)\}$ сходится к x^* , из сказанного выше заключаем, что и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Но тогда

ввиду непрерывности отображения P будем иметь $P(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = x^*$, т. е. x^* — неподвижная точка отображения P .

Доказанная теорема низводит теорему Брауэра до уровня вспомогательного утверждения, поскольку, очевидно, справедливо более сильное высказывание — первый принцип неподвижной точки Шаудера.

Следствие. Пусть Ω — выпуклое компактное множество в нормированном пространстве. Всякое непрерывное отображение множества Ω в себя имеет неподвижные точки.

Для доказательства достаточно заметить, что область значений рассматриваемого отображения, будучи подмножеством компактного множества Ω , относительно компактна.

Замечание 1. Нетрудно понять, что каждое из условий как самой теоремы, так и следствия из нее существенно.

Замечание 2. Несколько усовершенствовав доказательство теоремы (в частности, используя в нем вместо леммы 2 замечание к ней), можно усилить результаты и доказанной теоремы, и следствия из нее, заменяя в их формулировках нормированное пространство произвольным хаусдорфовым локально выпуклым пространством.

Доказанные выше принципы неподвижной точки впервые установлены в статье Шаудера [1], а сформулированный в замечании 2 результат — в статье Лерэ и Шаудера [1], в связи с чем он и называется принципом Лерэ — Шаудера.

§ 4. Применения принципа неподвижной точки

Рассмотрим некоторые применения доказанных выше теорем.

4.1. Пусть имеется функция $\Phi(s, u)$ двух вещественных переменных, определенная в полосе $a \leq s \leq b$, $-\infty < u < \infty$; предположим, что Φ непрерывна и имеет непрерывную производную по u , удовлетворяющую условию

$$0 < m \leq \Phi'_u(s, u) \leq M, \quad a \leq s \leq b, \quad -\infty < u < \infty. \quad (1)$$

При этих условиях существует единственная непрерывная в $[a, b]$ функция $u = x^*(s)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Phi(s, x^*(s)) = 0. \quad (2)$$

Этот результат может быть получен с помощью теоремы 1.1. Для этого рассмотрим в пространстве $X = C[a, b]$ оператор P , определенный следующим образом:

$$y = P(x), \quad y(s) = x(s) - \frac{2}{M+m} \Phi(s, x(s)), \quad s \in [a, b].$$

Без труда проверяется, что P является оператором сжатия.

В самом деле, если $y = P(x)$, $\tilde{y} = P(\tilde{x})$, то для любого $s \in [a, b]$

$$|y(s) - \tilde{y}(s)| = \left| x(s) - \tilde{x}(s) - \frac{2}{M+m} [\Phi(s, x(s)) - \Phi(s, \tilde{x}(s))] \right| =$$

$$= |x(s) - \tilde{x}(s)| \left| 1 - \frac{2}{M+m} \Phi'_u(s, \theta(s)) \right| \leq \alpha \|x - \tilde{x}\|,$$

где

$$\alpha = \frac{M-m}{M+m},$$

и, следовательно, ввиду (1) $\alpha < 1$.

Существует единственная в $C[a, b]$ неподвижная точка x^* оператора P . Остается заметить, что соотношение $x^* = P(x^*)$ равносильно равенству (2).

4.2. Рассмотрим далее систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n; t), \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Если ввести n -мерные векторные функции, понимая под этим упорядоченный набор из n вещественных функций, можно записать систему (3) в виде одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t), \quad (4)$$

где $x(t)$ — вектор с компонентами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, а $\varphi(x, t)$ имеет компоненты $\varphi_1(x_1, \dots, x_n; t), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t)$. При этом производная понимается как векторная функция с компонентами $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$.

Допустим, что требуется найти решение системы (1) в промежутке $[a, b]$, удовлетворяющее начальным условиям

$$x_i(a) = y_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или, в векторной форме,

$$x(a) = y_0. \quad (5)$$

(y_0 — элемент пространства R^n с координатами $y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \dots, y_0^{(n)}$). Решение этой задачи равносильно разысканию решения интегрального уравнения

$$x(t) = y_0 + \int_a^t \varphi(x(\tau), \tau) d\tau. \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть векторная функция $\varphi(y, t)$ определена для

$$y \in R^n, |y - y_0| < \delta, t \in [a, b'], *$$

ограничена для указанных значений y, t , измерима по t при каждом из возможных значений y и удовлетворяет условию Липшица по y :

$$|\varphi(y, t) - \varphi(\tilde{y}, t)| \leq K|y - \tilde{y}|, \quad (7)$$

где K не зависит от t .

Обозначим

$$M = \sup |\varphi(y, t)|, \quad |y - y_0| \leq \delta, \quad t \in [a, b'].$$

Тогда, если промежуток $[a, b] \subset [a, b']$ достаточно мал, именно, если

$$b - a < \min \left[\frac{\delta}{M}, \frac{1}{K} \right], \quad (8)$$

то интегральное уравнение (6), а следовательно, и система дифференциальных уравнений (3) имеет единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. При этом решение непрерывно зависит от начального вектора y_0 *).

Доказательство. Введем пространство $C_n = C([a, b], \mathbb{R}^n)$ вещественных непрерывных n -мерных векторных функций, заданных в $[a, b]$. C_n , естественным образом линеаризованное, становится B -пространством, если положить для $x \in C_n$

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

Имея в виду применение теоремы 1.3 к уравнению (6), положим $X = C_n$, $Y = \mathbb{R}^n$. Уравнение (6) можно записать в виде функционального уравнения

$$x = P_{y_0}(x); \quad (9)$$

здесь P_{y_0} — интегральный оператор

$$z = P_{y_0}(x), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad x \in C_n, \quad z(t) = y + \int_a^t \varphi(x(\tau), \tau) d\tau, \quad (10)$$

определенный на множестве Ω , состоящем из всех $x \in C_n$, удовлетворяющих условию

$$|x(t) - y_0| \leq \delta, \quad t \in [a, b].$$

В качестве Y_0 следует взять совокупность векторов $y \in \mathbb{R}^n$, для которых

$$|y - y_0| < \delta_1 = \delta - M(b - a).$$

Оператор P_{y_0} при каждом $y \in Y_0$ переводит Ω в себя. Действительно,

$$|z(t) - y_0| \leq |y - y_0| + \left| \int_a^t \varphi(x(\tau), \tau) d\tau \right| \leq \delta_1 + M(b - a) = \delta.$$

*) Евклидову длину вектора y мы здесь и в дальнейшем обозначаем через $|y|$.

Проверим еще выполнение условия (2) § 1. Пусть $x, \tilde{x} \in \Omega$; $y \in Y_0$,

$$\|P_y(x) - P_x(\tilde{x})\| = \max_{t \in [a, b]} \left| \int_a^t [\varphi(x(\tau), \tau) - \varphi(\tilde{x}(\tau), \tau)] d\tau \right| \leqslant \\ \leqslant K(b-a)\|x - \tilde{x}\|.$$

Принимая

$$\alpha = K(b-a),$$

имеем согласно (8) $\alpha < 1$.

Непрерывность оператора P_y по y очевидна.

Итак, согласно теореме 1.3 уравнение (9), а следовательно, и интегральное уравнение (6) имеет единственное решение, непрерывно зависящее от y .

З а м е ч а н и е. Непрерывная зависимость решения x_y^* системы (3) от начального вектора y при $y = y_0$ в настоящем случае означает следующее: по каждому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что как только $|y - y_0| < \eta$, так $\|x_y^* - x_{y_0}^*\|_C < \varepsilon$.

4.3. Применение к оператору (9) принципа Шаудера позволяет установить существование решения уравнения (6) и, следовательно, системы (1) при более слабых предположениях относительно функции $\varphi(y, t)$. Однако в этом случае не может быть доказана единственность решения и тем более непрерывная зависимость его от начального вектора.

Теорема 2. Пусть функция φ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, кроме условия (7), которое заменено более слабым требованием: при каждом $t \in [a, b]$ функция $\varphi(y, t)$ непрерывна по y равномерно относительно $t \in [a, b]$.

Тогда, если

$$b - a \leqslant \delta/M,$$

то система (3) имеет по крайней мере одно решение, удовлетворяющее начальному условию (5).

Доказательство. Примем обозначения теоремы 1 и положим $P = P_{y_0}$. Легко видеть, что оператор P переводит Ω в себя. Действительно, при доказательстве этого обстоятельства в теореме 1 было использовано лишь неравенство $M(b-a) \leqslant \delta$, которое выполняется и в настоящем случае.

Также нетрудно проверить, что P — непрерывный оператор. В самом деле, пусть $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in \Omega$, $z_n = P(x_n)$ ($n = 0, 1, \dots$). Поскольку функция $\varphi(y, t)$ непрерывна, по произвольному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что при $|y - y'| < \eta$

$$|\varphi(y, t) - \varphi(y', t)| < \varepsilon, \quad t \in [a, b]. \quad (11)$$

Так как $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$, то при достаточно больших n ($n \geqslant n_0$)

будет $\|x_n - x_0\| < \eta$, и тем более

$$|x_n(t) - x_0(t)| < \eta, \quad t \in [a, b].$$

Принимая во внимание (11), можно написать для указанных n

$$|\varphi(x_n(t), t) - \varphi(x_0(t), t)| < \varepsilon, \quad t \in [a, b].$$

Следовательно, при $n \geq n_0$

$$\|z_n - z_0\| = \max_{t \in [a, b]} |z_n(t) - z_0(t)| \leq$$

$$\leq \max_{t \in [a, b]} \int_a^t |\varphi(x_n(\tau), \tau) - \varphi(x_0(\tau), \tau)| d\tau \leq \varepsilon(b-a).$$

Поэтому $z_n = P(x_n) \rightarrow z_0 = P(x_0)$.

Поскольку ясно, что Ω — выпуклое замкнутое множество, то для применения теоремы 3.2 надо установить лишь относительную компактность множества $P(\Omega)$. Этим завершится доказательство теоремы.

Критерий компактности множества в пространстве C (I.5.4) без труда переносится и на пространство C_n . Таким образом, надо доказать, что функции семейства $P(\Omega)$ равномерно непрерывны (равномерная ограниченность их вытекает из того, что $P(\Omega) \subset \Omega$, а Ω — ограниченное множество). Но это является следствием неравенства

$$|z(t') - z(t)| = \left| \int_t^{t'} \varphi(x(\tau), \tau) d\tau \right| \leq M|t' - t|, \quad x \in \Omega, \quad z = P(x).$$

Теорема доказана.

4.4. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(s) = \lambda \int_a^b \varphi(s, t, x(t)) dt. \quad (12)$$

Применение теоремы 1.1 позволяет доказать, что при достаточных малых λ уравнение (12) имеет единственное решение.

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(s, t, u)$ определена и непрерывна в параллелепипеде

$$a \leq s, \quad t \leq b, \quad |u| \leq h$$

и (при каждом фиксированных s и t) удовлетворяет условию Липшица по u :

$$|\varphi(s, t, u) - \varphi(s, t, u')| \leq K|u - u'|,$$

причем K не зависит от s и t .

Тогда, если обозначить

$$M = \max |\varphi(s, t, u)|, \quad a \leq s, \quad t \leq b, \quad |u| \leq h,$$

то при λ , удовлетворяющих условию

$$|\lambda| < \min \left[\frac{h}{M(b-a)}, \frac{1}{K(b-a)} \right], \quad (13)$$

уравнение (12) имеет единственное непрерывное решение.

Доказательство. В теореме 1.1 положим $X = C[a, b]$, а в качестве Ω возьмем совокупность тех $x \in C$, для которых $\|x\| \leq h$. Оператор P определим так:

$$z = P(x), \quad z(s) = \lambda \int_a^b \varphi(s, t, x(t)) dt.$$

Условие (13) обеспечивает принадлежность $P(x) \in \Omega$. Действительно,

$$\|P(x)\| \leq |\lambda| M(b-a) < h, \quad x \in \Omega.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(x')\| &\leq |\lambda| \max_{s \in [a, b]} \int_a^b |\varphi(s, t, x(t)) - \varphi(s, t, x'(t))| dt \leq \\ &\leq |\lambda| K(b-a) \|x - x'\|. \end{aligned}$$

Следовательно, если положить $\alpha = |\lambda| K(b-a)$, то из (13) получаем $\alpha < 1$, т. е. P есть оператор сжатия.

Поскольку уравнение (12) можно записать в форме

$$x = P(x), \quad (14)$$

то существование и единственность решения уравнения (12) вытекают из теоремы 1.1, все условия которой, как проверено выше, удовлетворены.

Замечание 1. Возьмем произвольную непрерывную функцию x_0 ($\|x_0\| \leq h$) и построим исходя из нее последовательность $\{x_n\}$ функций

$$x_{n+1}(s) = \lambda \int_a^b \varphi(s, t, x_n(t)) dt, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда, как это следует из теоремы 1.1, построенная последовательность равномерно сходится к решению уравнения (12).

Замечание 2. Применение теоремы 1.3 дает возможность установить непрерывную зависимость решения уравнения (12) от λ для λ , удовлетворяющих условию (13).

4.5. Использование принципа Шаудера позволяет в некоторых случаях увеличить границу тех λ , для которых можно утверждать разрешимость уравнения (12).

Предположим, что функция φ имеет вид

$$\varphi(s, t, u) = K(s, t)\psi(t, u), \quad (15)$$

где $K(s, t)$ непрерывна в квадрате $[a, b; a, b]$, а $\psi(t, u)$ непрерывна для $t \in [a, b]$, $|u| \leq h$. Справедлива

Теорема 4. Если в интегральном уравнении (12) функция имеет вид (15) и

$$|\lambda| \leq \frac{h}{M_1 M_2 (b-a)}, \quad (16)$$

где $M_1 = \max_{a \leq b, t \leq b} |K(s, t)|$, $M_2 = \max_{\substack{a \leq t \leq b \\ |u| \leq h}} |\psi(t, u)|$, то уравнение

(12) имеет непрерывное решение.

Доказательство. Сохраняя прежние обозначения, докажем, как и выше, что оператор P переводит множество Ω в себя. Поскольку множество Ω выпукло и замкнуто, а оператор P непрерывен (ср. доказательство теоремы 2), то, как и в теореме 2, достаточно проверить, что $P(\Omega)$ относительно компактно; тогда будет применима теорема 3.2. Так как $P(\Omega)$ есть подмножество пространства $C[a, b]$, то надо доказать, что функции из $P(\Omega)$ равномерно ограничены и равномерно непрерывны. Первое очевидно, а второе является следствием неравенства ($z = P(x)$, $x \in \Omega$)

$$\begin{aligned} |z(s) - z(s')| &= |\lambda| \left| \int_a^b [K(s, t) - K(s', t)] \psi(t, x(t)) dt \right| \leq \\ &\leq |\lambda| M_2 \int_a^b |K(s, t) - K(s', t)| dt. \end{aligned}$$

Трактуя интегральный оператор как оператор в пространстве $L^2[a, b]$, можно с помощью принципа Шаудера установить результат, аналогичный теореме 4.

Теорема 5. Пусть в уравнении (12) функция $\varphi(s, t, u)$ имеет вид (15), причем функция $K(s, t)$ измерима в квадрате $[a, b; a, b]$ и удовлетворяет условию

$$A^2 = \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)|^2 dt < \infty,$$

а функция $\psi(t, u)$ определена в прямоугольнике $[a, b; -h, h]$ и непрерывна там.

Тогда, если

$$|\lambda| \leq \frac{h}{A M_2 \sqrt{b-a}}, \quad (17)$$

то уравнение (12) имеет решение, суммируемое с квадратом на $[a, b]$.

Доказательство. Как и выше, опираемся на теорему 3.2. Но на этот раз мы положим $X = L^2[a, b]$. В качестве Ω

возьмем множество тех $x \in L^2$, для которых

$$|x(t)| \leq h \text{ почти для всех } t \in [a, b],$$

а за P сохраним прежний смысл.

Проверим, что условие (17) обеспечивает включение $P(\Omega) \subset \Omega$. Действительно, если $x \in \Omega$ и $z = P(x)$, то для $s \in [a, b]$ по неравенству Буняковского будем иметь

$$\begin{aligned} |z(s)| &= |\lambda| \left| \int_a^b K(s, t) \psi(t, x(t)) dt \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \left[\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \right]^{1/2} \left[\int_a^b |\psi(t, x(t))|^2 dt \right]^{1/2} \leq |\lambda| AM_2 \sqrt{b-a} \leq h. \end{aligned}$$

Докажем, что оператор P непрерывен. Пусть $x, x' \in \Omega$ и $z = P(x)$, $z' = P(x')$. Имеем

$$\begin{aligned} |z(s) - z'(s)|^2 &\leq |\lambda|^2 \int_a^b |K(s, t)|^2 dt \int_a^b |\psi(t, x(t)) - \psi(t, x'(t))|^2 dt \leq \\ &\leq |\lambda|^2 A^2 \int_a^b |\psi(t, x(t)) - \psi(t, x'(t))|^2 dt. \quad (18) \end{aligned}$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. По непрерывности функции ψ найдем $\eta > 0$ так, что при $|u - u'| < \eta$ будет

$$|\psi(t, u) - \psi(t, u')| < \varepsilon, \quad t \in [a, b].$$

Разобьем далее промежуток $[a, b]$ на два множества, e_1 и e_2 , относя в e_1 те точки, в которых $|x(t) - x'(t)| < \eta$, а в e_2 остальные точки. Обозначая $\|x - x'\| = \gamma$, будем иметь

$$\gamma^2 = \int_a^b |x(t) - x'(t)|^2 dt \geq \int_{e_2} |x(t) - x'(t)|^2 dt \geq \eta^2 \text{mes } e_2,$$

так что

$$\text{mes } e_2 \leq \gamma^2 / \eta^2.$$

Оценим теперь интеграл $I = \int_a^b |\psi(t, x(t)) - \psi(t, x'(t))|^2 dt$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{e_1} + \int_{e_2} |\psi(t, x(t)) - \psi(t, x'(t))|^2 dt \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \text{mes } e_1 + 4M_2^2 \text{mes } e_2 \leq \varepsilon^2 (b-a) + \frac{4M_2^2 \gamma^2}{\eta^2}. \end{aligned}$$

Используя эту оценку, получим из (18)

$$\|z - z'\|^2 = \\ = \int_a^b |z(s) - z'(s)|^2 ds \leq |\lambda|^2 A^2 (b-a) \left[\varepsilon^2 (b-a) + \frac{4M_2^2 \|x - x'\|^2}{\eta^2} \right].$$

Таким образом, z и z' могут быть сделаны сколь угодно близкими, если достаточно близки x и x' .

Поскольку ясно, что Ω — выпуклое и замкнутое множество, остается доказать относительную компактность множества $P(\Omega)$. Для этого воспользуемся теоремой М. Рисса (IX.1.3), на основании которой достаточно проверить, что

$$\int_a^b |z(t+\eta) - z(t)|^2 dt \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$$

равномерно относительно $z \in P(\Omega)^*$.

Пусть $x \in \Omega$, $z = P(x)$. Тогда

$$\int_a^b |z(s+\eta) - z(s)|^2 ds = \\ = \int_a^b \left| \lambda \int_a^b [K(s+\eta, t) - K(s, t)] \psi(t, x(t)) dt \right|^2 ds \leq \\ \leq M_2^2 |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |K(s+\eta, t) - K(s, t)|^2 ds dt.$$

Докажем, что последний интеграл стремится к нулю.

Это очевидно, если функция $K(s, t)$ непрерывна. Если же $K(s, t)$ общего вида, то можно подобрать последовательность $\{K_n(s, t)\}$ непрерывных функций такую, что

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t) - K_n(s, t)|^2 ds dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Имеем

$$\left[\int_a^b \int_a^b |K(s+\eta, t) - K(s, t)|^2 ds dt \right]^{1/2} \leq \\ \leq \left[\int_a^b \int_a^b |K_n(s+\eta, t) - K_n(s, t)|^2 ds dt \right]^{1/2} +$$

*) В теореме М. Рисса имеется еще условие ограниченности норм, о котором мы не упоминаем в тексте, так как оно, очевидно, налицо.

$$+ \left[\int_a^b \int_a^b |K(s + \eta, t) - K_n(s + \eta, t)|^2 ds dt \right]^{1/2} + \\ + \left[\int_a^b \int_a^b |K(s, t) - K_n(s, t)|^2 ds dt \right]^{1/2}.$$

Выбирая n настолько большим, чтобы последние два интеграла в правой части были меньше произвольного $\varepsilon > 0$, и затем η настолько малым, чтобы первый интеграл был также меньше ε , получим требуемый результат в общем случае.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Если функция $\psi(t, u)$ определена в полосе $a \leq t \leq b, -\infty < u < \infty$, и, кроме того,

$$\frac{\psi(t, h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0, \quad (19)$$

то при достаточно большом h условие (16) теоремы 4 и условие (17) теоремы 5 будут выполнены, каковы бы ни были λ, M_1, M_2 и $b - a$. Таким образом, (19) обеспечивает существование решения уравнения (12) для любого λ .

Замечание 2. Теоремы 4 и 5 можно доказать при несколько иных условиях, накладываемых на входящие в уравнения функции. Также не представляет труда сформулировать теоремы, в которых уравнение (12) трактовалось бы в функциональном пространстве, отличном от $C[a, b]$ и $L^2(a, b)$ (например, в $L^1(a, b)$).

О применении принципа неподвижной точки к доказательству существования решения нелинейных уравнений см. Красносельский [1].

Важнейшие применения принципа Шаудера даны им в его работах по эллиптическим дифференциальным уравнениям, а теорем Лерэ — Шаудера — в работах по гиперболическим уравнениям (см. Шаудер [3]).

§ 5. Теорема Какутани

5.1. Излагаемая в этом параграфе теорема Какутани (см. Какутани [2]) является обобщением теоремы Шаудера (3.1). Теорема Какутани имеет многочисленные применения в математической экономике (см. Ник а й д о). Ниже мы приведем приложение этой теоремы к теории игр.

Для формулировки теоремы Какутани нам потребуются некоторые факты о многозначных отображениях. Пусть X и Y суть метрические пространства; через 2^Y обозначим множество всех подмножеств множества Y . Всякое отображение $f: X \rightarrow 2^Y$ мы будем называть *многозначным отображением*. В этом случае каждой точке $x \in X$ сопоставляется некоторое подмножество $f(x)$ множества Y , которое мы далее будем считать непустым.

Графиком многозначного отображения $f: X \rightarrow 2^X$ называется подмножество G_f в $X \times X$, определяемое так: $G_f = \{(x, y): y \in f(x)\}$.

Многозначное отображение $f: X \rightarrow 2^X$ называется *замкнутым* в точке $x \in X$, если из того, что $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ и $y_n \in f(x_n)$, следует $y \in f(x)$. Отображение f называется *замкнутым*, если оно замкнуто в каждой точке $x \in X$. Очевидно, что f замкнуто тогда и только тогда, когда его график G_f замкнут в $X \times X$.

Многозначное отображение $f: X \rightarrow 2^X$ называется *полу непрерывным сверху* в точке $x \in X$, если для любого открытого множества U такого, что $f(x) \subset U$, найдется окрестность V точки x , удовлетворяющая условию $f(V) \subset U$, где $f(V) = \bigcup_{z \in V} f(z)$. Отобра-

жение f называется *полу непрерывным сверху*, если оно полу непрерывно сверху в каждой точке $x \in X$.

Если f — обычное однозначное отображение, то для него полунепрерывность сверху эквивалентна непрерывности, тогда как замкнутое отображение может и не быть непрерывным.

Лемма 1. Если множество Y компактно, то замкнутое отображение f полунепрерывно сверху.

Доказательство. Возьмем $x \in X$ и открытое множество $U \supset f(x)$. Рассмотрим $V = \{z \in X: f(z) \subset U\}$. Так как $x \in V$ и $f(V) \subset U$, то нам достаточно доказать, что V открыто, или что $X \setminus V = \{z \in X: f(z) \cap (Y \setminus U) \neq \emptyset\}$ замкнуто. Если $z_n \rightarrow z \in X$ и $z_n \in X \setminus V$, то найдутся точки $y_n \in f(z_n) \cap (Y \setminus U)$. В силу компактности Y найдется подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ такая, что $y_{n_k} \rightarrow y \in Y \setminus U$. Так как отображение f замкнуто, то отсюда $y \in f(z)$. Следовательно, $y \in f(z) \cap (Y \setminus U)$, откуда $z \in X \setminus V$.

5.2. Точка $x^* \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения $f: X \rightarrow 2^X$, если $x^* \in f(x^*)$. Теперь мы можем сформулировать теорему Какутани.

Теорема 1. Пусть X — B -пространство, K — непустое компактное выпуклое множество в X , а $f: K \rightarrow 2^K$ — многозначное отображение, удовлетворяющее условиям:

- 1) для каждой точки $x \in K$ множество $f(x)$ является непустым выпуклым подмножеством множества K ;
- 2) отображение f замкнуто.

Тогда отображение f имеет неподвижную точку.

Доказательство*). Так как K — компактное множество, то по теореме Хаусдорфа для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε -сеть для K : $x_{\varepsilon 1}, x_{\varepsilon 2}, \dots, x_{\varepsilon n(\varepsilon)}$. Для любого $x \in K$ положим

$$\varphi_{\varepsilon i}(x) = \max(\varepsilon - \|x - x_{\varepsilon i}\|, 0), \quad i = 1, \dots, n(\varepsilon).$$

Очевидно, что $\varphi_{\varepsilon i}$ — непрерывные неотрицательные функции на K . Так как $\{\varphi_{\varepsilon i}\}_{i=1}^{n(\varepsilon)}$ — ε -сеть, то для любого $x \in K$ имеем $\|x - x_{\varepsilon i}\| < \varepsilon$ хотя бы при одном i . Поэтому для этого i имеем

*) В доказательстве теоремы 1 мы следуем Никайдо.

$\varphi_{ei}(x) > 0$. Это рассуждение показывает корректность следующего определения:

$$w_{ei}(x) = \varphi_{ei}(x) \left/ \sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} \varphi_{ej}(x) \right., \quad i = 1, \dots, n(\varepsilon).$$

Зафиксируем теперь произвольную точку $y_{ei} \in f(x_{ei})$ ($i = 1, \dots, n(\varepsilon)$) и определим однозначное непрерывное отображение $f_\varepsilon: K \rightarrow K$, действующее по формуле

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} w_{ei}(x) y_{ei}.$$

Из условий $y_{ei} \in K$, $w_{ei}(x) \geq 0$, $\sum w_{ei}(x) = 1$ и из выпуклости множества K следует $f_\varepsilon(x) \in K$. Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ имеем однозначное непрерывное отображение $f_\varepsilon: K \rightarrow K$. По теореме Шаудера (3.1) у этого отображения имеется неподвижная точка x_ε : $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$.

В силу компактности множества K найдутся последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел и точка $x^* \in K$ такие, что выполнены следующие условия:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0; \quad \text{б) } x_{\varepsilon_n} \rightarrow x^*; \quad \text{в) } f_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}) = x_{\varepsilon_n}.$$

Покажем, что x^* является искомой неподвижной точкой отображения f . Положим $U_\delta = f(x^*) + B_\delta$, где $B_\delta = \{y: \|y\| < \delta\}$, $\delta > 0$. Мы докажем, что $x^* \in U_\delta$ при любом $\delta > 0$, откуда в силу замкнутости $f(x^*)$ и получим требуемое $x^* \in f(x^*)$ (замкнутость $f(x^*)$ следует из замкнутости отображения f).

Очевидно, что U_δ — выпуклое открытое множество и $f(x^*) \subset U_\delta$. В силу леммы 1 по x^* и U_δ можно найти шар $K_\varepsilon = \{x: \|x - x^*\| < \varepsilon\}$ такой, что $f(K_\varepsilon) \subset U_\delta$. В силу условий а) и б) существует число N такое, что при $n \geq N$ имеем $\varepsilon_n < \varepsilon/2$ и $x_{\varepsilon_n} \in K_{\varepsilon/2}$. Если $w_{\varepsilon_n i}(x_{\varepsilon_n}) > 0$, то

$$\|x_{\varepsilon_n i} - x_{\varepsilon_n}\| < \varepsilon_n < \varepsilon/2,$$

$$\|x_{\varepsilon_n i} - x^*\| \leq \|x_{\varepsilon_n i} - x_{\varepsilon_n}\| + \|x_{\varepsilon_n} - x^*\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Следовательно, при $n > N$ имеем $x_{\varepsilon_n i} \in K_\varepsilon$ для всех i , для которых $w_{\varepsilon_n i}(x_{\varepsilon_n}) > 0$. Для этих i получаем

$$y_{\varepsilon_n i} \in f(x_{\varepsilon_n i}) \subset f(K_\varepsilon) \subset U_\delta. \quad (1)$$

Из условия в) выводим

$$x_{\varepsilon_n} = \sum w_{\varepsilon_n i}(x_{\varepsilon_n}) y_{\varepsilon_n i}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем, что при $n \geq N$ точка x_{ε_n} является выпуклой комбинацией только тех точек $y_{\varepsilon_n i}$, которые лежат в U_δ ,

откуда в силу выпуклости U_0 имеем $x_{e_n} \in U_0$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $x^* \in \bar{U}_0 \subset U_{20}$. Как уже отмечалось, отсюда следует, что $x^* \in f(x^*)$. На этом доказательство теоремы Какутани полностью закончено.

5.3. Теперь мы приведем одно приложение теоремы Какутани к теории игр.

Мы рассмотрим игру двух лиц (игрок I и игрок II) с нулевой суммой, что означает, что один участник выигрывает столько, сколько проигрывает другой. *Стратегией* игрока называется полное перечисление всех действий, которые этот игрок предпримет в каждом из возможных в процессе игры положений. Множество всех стратегий (или иначе — пространство стратегий) игрока I обозначим через X , игрока II — через Y .

Функцией выигрыша называется вещественная функция $K(x, y)$, заданная на $X \times Y$, причем число $K(x, y)$ интерпретируется как выигрыш игрока I, если игрок I избирает стратегию $x \in X$, а игрок II — стратегию $y \in Y$. Число $-K(x, y)$ интерпретируется как выигрыш игрока II в той же ситуации. Тройка (X, Y, K) , где X и Y — множества, а $K(x, y)$ — функция на $X \times Y$, называется *игрой*.

Когда игрок I выбирает свою стратегию $x \in X$, то, не зная ничего о стратегии игрока II, он должен предположить, что его противник выберет наихудшую для него стратегию, т. е. что выигрыш игрока I составит $\inf_{y \in Y} K(x, y)$. Таким образом, игроку I естественно искать такую стратегию $x_0 \in X$, что

$$\inf_{y \in Y} K(x_0, y) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y). \quad (3)$$

Учитывая, что для игрока II выигрыш равен $-K(x, y)$, из (3) получаем, что игрок II должен искать такую стратегию $y_0 \in Y$, что

$$\inf_{x \in X} \{-K(x, y_0)\} = \max_{y \in Y} \inf_{x \in X} [-K(x, y)].$$

или, что то же самое,

$$\sup_{x \in X} K(x, y_0) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y). \quad (4)$$

Сравнение (3) и (4) показывает, что для существования стратегий $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$, удовлетворяющих (3) и (4), необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in X$, $y \in Y$ выполнялись неравенства

$$K(x, y_0) \leq K(x_0, y_0) \leq K(x_0, y), \quad (5)$$

для чего в свою очередь необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y). \quad (6)$$

Общее значение обеих частей равенства (6) называется *значением* игры. Каждая пара стратегий x_0, y_0 , удовлетворяющая неравенствам (5), называется *решением* игры, а сами стратегии x_0, y_0 — *оптимальными стратегиями* *). Для доказательства существования решения игры требуется доказать теорему о *минимаксе*, заключающуюся в проверке равенства (6) для данной игры. Мы сейчас при помощи теоремы Какутани докажем одну весьма общую теорему такого рода. Сначала сформулируем следующую лемму, доказательство которой предоставляется читателю.

Лемма 2. 1) Для любой вещественной функции $K(x, y)$ имеем

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) \geq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y). \quad (7)$$

2) Если X и Y суть метрические компакты, а функция $K(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$, то функции $\varphi(x) = \max_{y \in Y} K(x, y)$ и $\psi(x) = \min_{y \in Y} K(x, y)$ непрерывны на X . Кроме того, существуют $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y)$ и $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y)$.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

- а) X — выпуклое компактное множество в B -пространстве X ;
- б) Y — выпуклое компактное множество в B -пространстве Y ;
- в) функция $K(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$, выпукла относительно y для каждого $x \in X$ и вогнута относительно x для каждого $y \in Y$, т. е.

$$K(x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda K(x, y_1) + (1 - \lambda)K(x, y_2),$$

$$K(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, y) \geq \lambda K(x_1, y) + (1 - \lambda)K(x_2, y),$$

где $x, x_1, x_2 \in X$; $y, y_1, y_2 \in Y$; $0 \leq \lambda \leq 1$.

Тогда игра (X, Y, K) имеет решение. Более того,

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y). \quad (8)$$

Доказательство. В силу леммы 2, 2) условие (6), выражающее тот факт, что игра имеет решение, совпадает с (8). Итак, будем доказывать (8).

Для любого $x \in X$ положим

$$B_x = \{y \in Y: K(x, y) = \min_{z \in Y} K(x, z)\}.$$

Так как множество Y компактно, то $B_x \neq \emptyset$. Очевидно, что B_x замкнуто. Покажем, что оно выпукло. Если $y_1, y_2 \in B_x$, $0 \leq \lambda \leq 1$, то

$$\begin{aligned} K(x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) &\leq \lambda K(x, y_1) + (1 - \lambda)K(x, y_2) = \\ &= \lambda \min_{z \in Y} K(x, z) + (1 - \lambda) \min_{z \in Y} K(x, z) = \min_{z \in Y} K(x, z). \end{aligned} \quad (9)$$

*) Подробнее см. монографию Карлина, которой мы отчасти следуем в изложении этого пункта.

С другой стороны, так как Y выпукло, то $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in Y$, откуда

$$K(x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \geq \min_{z \in Y} K(x, z). \quad (10)$$

Сопоставляя (9) и (10), получаем

$$K(x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) = \min_{z \in Y} K(x, z).$$

Следовательно, $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in B_x$, т. е. множество B_x выпукло.

Аналогично получаем, что для любого $y \in Y$ множество

$$A_y = \{x \in X: K(x, y) = \max_{w \in X} K(w, y)\}$$

непусто, замкнуто и выпукло.

Рассмотрим выпуклое множество $C = X \times Y$ в B -пространстве $X \times Y$. По теореме Тихонова (I.2.8) множество C компактно в $X \times Y$. Очевидно, что $A_y \times B_x$ ($x \in X, y \in Y$) — непустые, выпуклые замкнутые подмножества в C . Рассмотрим теперь многозначное отображение $f: C \rightarrow 2^C$, переводящее точку $(x, y) \in C$ в множество $A_y \times B_x$. Для того чтобы была применима теорема Какутани, нам осталось показать, что отображение f замкнуто.

Пусть $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$, $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ в C и $(u_n, v_n) \in f(x_n, y_n)$. Докажем, что $(u, v) \in f(x, y) = A_y \times B_x$. Так как $u_n \in A_{y_n}$, $v_n \in B_{x_n}$, то

$$K(u_n, y_n) = \max_{w \in X} K(w, y_n),$$

$$K(x_n, v_n) = \min_{z \in Y} K(x_n, z).$$

Так как $u_n \rightarrow u$, то в силу леммы 2, 2) имеем

$$K(u, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} K(u_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{w \in X} K(w, y_n) = \max_{w \in X} K(w, y).$$

Следовательно, $u \in A_y$. Аналогично $v \in B_x$.

Таким образом, отображение f замкнуто, и применима теорема Какутани, в силу которой существует точка $(x_0, y_0) \in C$ такая, что $(x_0, y_0) \in f(x_0, y_0) = A_{y_0} \times B_{x_0}$. Следовательно,

$$K(x_0, y_0) = \max_{x \in X} K(x, y_0) \text{ и } K(x_0, y_0) = \min_{y \in Y} K(x_0, y).$$

Отсюда

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y) \leq K(x_0, y_0) \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y).$$

Сопоставляя полученное неравенство с (7), получаем (8). Теорема полностью доказана.

5.4. Теорема Какутани является основным инструментом исследования в теории экономического равновесия. Покажем, как она используется, на примере одной из основных моделей этой теории — модели Эрроу — Дебре.

Рассматривается замкнутая (не имеющая связей с внешним миром) экономическая система, оперирующая с n продуктами. В этой системе имеется m производственных единиц (производителей) и l потребителей. Производитель i характеризуется множеством Y_i допустимых производственных способов, лежащим в n -мерном координатном «пространстве продуктов» R^n . Предполагается, что это пространство упорядочено естественным способом и, кроме того, в нем введена норма $\|\cdot\|$. Отрицательные координаты вектора $y \in Y_i$ указывают объем затрат, а положительные — объем выпуска соответствующих продуктов при применении способа y . Потребитель j описывается с помощью вектора начальных запасов a_j и функции полезности u_j , определенной на некотором множестве $X_j \subset R^n_+ = \{x \in R^n: x_k \geq 0, k = 1, \dots, n\}$. Множество X_j состоит из наборов продуктов (векторов), допустимых для потребителя j , число $u_j(x)$ указывает величину «полезности» набора x . Считается, что функция u_j ненасыщаема, т. е. не достигает своей верхней грани на множестве X_j .

В модели предполагается наличие ценообразующего органа. Цены — это линейный функционал, входящий в симплекс $S = \{p \in (R^n)^*: p \geq 0, \sum_k p_k = 1\}$. Если цены $\bar{p}$ заданы, то определены цели всех участников системы. Производитель i стремится максимизировать прибыль, т. е. выбрать элемент множества $N_i(p) = \{y \in Y_i: p(y) = \varphi_i(p)\}$, где $\varphi_i(p) = \max_{y \in Y_i} p(y)$. (Предполагается, что этот максимум достигается). Вся прибыль распределяется между потребителями, доля прибыли, получаемой производителем i от i -й производственной единицы, составляет θ_{ij} , причем $\sum_j \theta_{ij} = 1$ ($i = 1, \dots, m$). Понятно, что $\theta_{ij} \geq 0$.) Допустим, что все производители получили наибольшую возможную прибыль. Тогда в распоряжении потребителя j находится его «бюджетное множество» $M_j(p) = \{x \in X_j: p(x) \leq f_j(p)\}$, где

$$f_i(p) = p(a_i) + \sum_j \theta_{ij} \varphi_i(p). \quad (11)$$

Этот потребитель, максимизируя свою полезность, стремится выбрать элемент множества $L_j(p) = \{x \in M_j(p): u(x) = \max_{x' \in M_j(p)} u(x')\}$.

Набор $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l; p)$, где $p \in S$, называется состоянием равновесия модели, если:

- 1) $\bar{y}_i \in N_i(p)$ ($i = 1, \dots, m$), $\bar{x}_j \in L_j(p)$ ($j = 1, \dots, l$);
- 2) $\sum_j a_j + \sum_i \bar{y}_i \geq \sum_j \bar{x}_j$;
- 3) $\sum_j p(a_j) + \sum_i p(\bar{y}_i) = \sum_j p(\bar{x}_j)$.

Таким образом, в состоянии равновесия «суммарное потребление» $\sum_j \bar{x}_j$ может быть обеспечено начальными запасами $\sum_j a_j$,

и вновь произведенными продуктами $\sum_i y_i$ (условие 2)); при этом соблюдается финансовый баланс (условие 3)) и каждый из участников достигает своих целей (условие 1)).

Для $p \in S$ положим $A(p) = \sum_j a_j + \sum_i N_i(p) - \sum_j L_j(p)$. Предположим, что множества $A(p)$ содержатся при всех $p \in S$ в некотором шаре Ω . Наряду с отображением $A: S \rightarrow 2^\Omega$ рассмотрим отображения $B: \Omega \rightarrow 2^S$ и $C: \Omega \times S \rightarrow 2^{\Omega \times S}$, определенные соответственно формулами

$$B(z) = \{q \in S: q(z) = \min_{q' \in S} q'(z)\}, \quad C(z, p) = A(p) \times B(z). \quad (12)$$

Лемма 3. Пусть $(\bar{z}, \bar{p})$ — неподвижная точка отображения C , а векторы $\bar{y}_i \in N_i(p)$ ($i = 1, \dots, m$), $\bar{x}_j \in L_j(p)$ ($j = 1, \dots, l$) таковы, что $\bar{z} = \sum_j a_j + \sum_j \bar{y}_i - \sum_j \bar{x}_j$. Тогда набор $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l; p)$ является состоянием равновесия.

Доказательство. Так как $(\bar{z}, \bar{p}) \in C(\bar{z}, \bar{p}) = A(\bar{p}) \times B(\bar{z})$, то $\bar{z} \in A(\bar{p})$, $\bar{p} \in B(\bar{z})$. Из соотношения $\bar{z} \in A(\bar{p})$ следует неравенство $\bar{p}(\bar{z}) \geq 0$. В самом деле, так как $L_j(p) \subset M_j(p)$, то, учитывая равенство $\varphi_i(p) = p(\bar{y}_i)$, получим $p(\bar{x}_j) \leq p(a_j) + \sum_i \theta_{ij} p(\bar{y}_i)$ ($j = 1, \dots, l$). Суммируя эти неравенства по j и используя то обстоятельство, что $\sum_j \theta_{ij} = 1$, придем к требуемому соотношению $\bar{p}(\bar{z}) \geq 0$. Так как $\bar{p} \in B(\bar{z})$, то для произвольного $q \in S$ выполняется $q(\bar{z}) \geq \bar{p}(\bar{z}) \geq 0$; поэтому $\bar{z} \geq 0$. Из предположения о ненасыщаемости легко вытекает, что $\bar{p}(\bar{z}) = 0$, откуда и следует утверждение леммы.

Как следует из леммы 3, существование состояния равновесия можно обеспечить, позаботившись о том, чтобы отображение C удовлетворяло условиям теоремы Какутани.

Теорема 3. Предположим, что множества Y_i ($i = 1, \dots, m$), X_j ($j = 1, \dots, l$), векторы a_j и функции u_j ($j = 1, \dots, l$), определяющие модель Эрроу — Дебре, обладают следующими свойствами:

- 1) множества Y_i компактны и выпуклы;
- 2) множества X_j замкнуты и выпуклы, $0 \notin X_j$;
- 3) существует такой выпуклый замкнутый конус $K \subset \text{int } R_+^n \cup \{0\}$, что $X_j \subset K$ ($j = 1, \dots, l$);
- 4) существует такой вектор $x'_j \in X_j$, что $x'_j < a_j$ ($j = 1, \dots, l$);
- 5) функции u_j вогнуты, непрерывны, ненасыщаемы ($j = 1, \dots, l$).

Тогда рассматриваемая модель обладает состоянием равновесия. **Доказательство.** Пусть $x \in K$, где K — конус, фигурирующий в 3), $x \neq 0$. Так как $x \in \text{int } R_+^n$, то для $p \in S$ выполняется неравенство $p(x) > 0$. Используя это утверждение, а также

компактность симплекса S и множества $\{x \in K: \|x\| = 1\}$, легко убедиться в том, что при некотором $\gamma > 0$ имеет место неравенство $p(x) \geq \gamma \|x\|$ ($p \in S, x \in K$). Для $p \in S$ выполняется $M_j(p) \subset X_j \subset K$, поэтому для $x \in M_j(p)$ справедливо соотношение $\|x\| \leq \frac{1}{\gamma} f_j(p)$, где функции f_j определены формулой (11). Из компактности Y_i следует, что эти функции ограничены, поэтому множества $M_j(p)$ при всех $p \in S$ содержатся в некотором шаре. Из 4) вытекает непустота этих множеств, а из 2) их выпуклость и замкнутость. В силу 5) множества $L_j(p)$ являются непустыми выпуклыми компактами. Теми же свойствами на основании 1) обладают множества $N_i(p)$. Из сказанного вытекает, что отображение A имеет непустые выпуклые компактные образы, причем множества $A(p)$ содержатся в некотором шаре Ω при всех $p \in S$. Рассмотрим отображения B и C , определенные формулой (12). Так как отображения A, B имеют непустые выпуклые компактные образы, то тем же свойством обладает и C . Покажем, что отображение C замкнуто. Для этого следует проверить замкнутость отображений N_i ($i = 1, \dots, m$), L_j ($j = 1, \dots, l$) и B . Что касается N_i и B , то их замкнутость, так же, как и замкнутость M_j , вытекает непосредственно из определений. Остановимся на отображениях L_j . Прежде всего отметим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, обладающее тем свойством, что

$$(1 - \varepsilon)M_j(p) \subset M_j(p') \subset (1 + \varepsilon)M_j(p), \quad (13)$$

если $p, p' \in S, \|p - p'\| < \delta$. Это утверждение нетрудно проверить, учитывая справедливость неравенства $p(x) > 0$ для $x \in X_j, p \in S$ и непрерывность функций f_j . Из (13) следует непрерывность функции $U(p) = \max_{x' \in M_j(p)} u(x')$, а эта непрерывность влечет замк-

нутость отображения L_j . Действительно, пусть $p_k \rightarrow p, x_k \rightarrow x, x_k \in L_j(p_k)$. Требуется проверить, что $x \in L_j(p)$. Так как $x_k \in M_j(p_k)$ и отображение M_j замкнуто, то $x \in M_j(p)$. Кроме того, из равенств $U(p_k) = u(x_k)$ следует, что $U(p) = u(x)$, откуда и вытекает требуемое включение $x \in L_j(p)$. Из замкнутости отображений B, N_i ($i = 1, \dots, m$), L_j ($j = 1, \dots, l$) сразу же вытекает замкнутость отображения C . Итак, это отображение удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани и поэтому имеет неподвижную точку. Доказательство завершается ссылкой на лемму 3.

З а м е ч а н и е. Некоторые из предположений теоремы 3 можно ослабить. При этом, однако, доказательство существенно усложняется (см., например, Никайдо, В. Л. Макаров [1]). Известны различные подходы к выяснению условий, при которых существует состояние равновесия (см. обзор В. Л. Макарова [1], где рассмотрены гораздо более общие модели). Все эти подходы опираются на теорему Какутани.

Г л а в а XVII

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Дальнейшее изучение нелинейных операторов может быть осуществлено путем установления их связи с линейными, точнее говоря, с помощью локальной аппроксимации нелинейных операторов линейными.

В настоящей главе развивается необходимый для этого аппарат дифференциального исчисления для нелинейных операторов, который полностью будет использован лишь в следующей главе.

§ 1. Первая производная

1.1. Пусть имеется оператор P , отображающий открытое множество Ω одного B -пространства X в множество Δ другого B -пространства Y . Возьмем фиксированный элемент $x_0 \in \Omega$ и предположим, что существует такой непрерывный линейный оператор $U \in B(X, Y)^*$, что при любом $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x_0 + tx) - P(x_0)}{t} = U(x). \quad (1)$$

В этом случае говорят, что линейный оператор U является *производной* оператора P в точке x_0 . При этом пишут

$$U = P'(x_0).$$

Часто так определенную производную называют *производной Гато*, или *слабой производной*, а элемент $U(x)$ — *дифференциалом Гато*.

Обозначим через K множество всех $x \in X$ с $\|x\| = 1$. Если предельное соотношение (1) выполняется равномерно относительно $x \in K$, то говорят, что оператор P *дифференцируем* в точке x_0 , а производную $P'(x_0)$ называют в этом случае *производной Фреше*, или *сильной производной* **).

*) Напомним, что символом $B(X, Y)$ мы обозначаем пространство всех непрерывных линейных операторов, переводящих X в Y .

**) Определение производной Фреше дано в работе Фреше [3], слабой производной — в работе Гато [1].

Дифференцируемость оператора P в точке x_0 означает, иначе говоря, что существует такой линейный оператор $U \in B(X, Y)$, что по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\|\Delta x\| < \delta$ ($\Delta x \in X$) следует

$$\|P(x_0 + \Delta x) - P(x_0) - U(\Delta x)\| \leq \varepsilon \|\Delta x\|. \quad (2)$$

Простое доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю.

1.2. Укажем на некоторые простейшие свойства производной.

I. Если оператор P дифференцируем в точке x_0 , то он непрерывен в этой точке*).

Это непосредственно следует из (2).

II. Пусть $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$; тогда, если существуют производные $P'_1(x_0)$ и $P'_2(x_0)$, то существует и

$$P'(x_0) = \alpha_1 P'_1(x_0) + \alpha_2 P'_2(x_0).$$

При этом, если P_1 и P_2 дифференцируемы в точке x_0 , то будет дифференцируемым и P .

Это следует непосредственно из определения.

III. Если $P = U \in B(X, Y)$, то P дифференцируем в каждой точке $x_0 \in X$ и

$$P'(x_0) = U.$$

Действительно,

$$\frac{P(x_0 + tx) - P(x_0)}{t} = U(x).$$

IV. Пусть P — оператор, переводящий $\Omega \subset X$ в открытое множество $\Delta \subset Y$, а Q — оператор, отображающий множество Δ в некоторое B -пространство Z . Положим $R = QP$, и пусть Q дифференцируем в точке $y_0 = P(x_0)$ ($x_0 \in \Omega$), а P имеет производную в точке x_0 . Тогда оператор R имеет производную в точке x_0 и

$$R'(x_0) = Q'(P(x_0))P'(x_0) = Q'(y_0)P'(x_0).$$

Действительно, обозначим $U = P'(x_0)$, $V = Q'(y_0)$ и возьмем произвольное $x \in X$. Положим $\Delta y = P(x_0 + tx) - P(x_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{R(x_0 + tx) - R(x_0)}{t} &= \frac{QP(x_0 + tx) - QP(x_0)}{t} = \frac{Q(y_0 + \Delta y) - Q(y_0)}{t} = \\ &= \frac{V(\Delta y) + \zeta(\Delta y)}{t} = U \left(\frac{P(x_0 + tx) - P(x_0)}{t} \right) + \frac{\zeta(\Delta y)}{\|\Delta y\|} \left\| \frac{P(x_0 + tx) - P(x_0)}{t} \right\|, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\zeta(\Delta y) = Q(y_0 + \Delta y) - Q(y_0) - V(\Delta y)$, $\|\zeta(\Delta y)\| = o(\|\Delta y\|)$. При $t \rightarrow 0$ первое слагаемое в (3) имеет пределом

$$[VP'(x_0)](x) = VU(x),$$

*) Одного предположения о наличии производной недостаточно.

а второе слагаемое стремится к нулю, так как отношение $\xi(\Delta y)/\|\Delta y\|$ стремится к нулю, а скалярный множитель ограничен. Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(x_0 + tx) - R(x_0)}{t} = VU(x),$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Если P дифференцируем в точке x_0 , то R также дифференцируем.

V. Если в условиях предложения IV оператор $Q = V$ непрерывен и линеен, то

$$R'(x_0) = VP'(x_0).$$

1.3. Отметим теперь одно неравенство, которое заменяет в общем случае формулу конечных приращений, имеющую место для случая обычных вещественных функций.

Пусть x_0 и $x \in \Omega$; предположим также, что все точки прямолинейного отрезка $[x_0, x]$, соединяющего x_0 и x , входят в Ω , и пусть в каждой точке отрезка $[x_0, x]$ существует производная оператора P . Обозначим $\Delta x = x - x_0$ и, взяв произвольный функционал $g \in Y^*$, положим

$$\varphi(t) = g(P(x_0 + t\Delta x)). \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что вещественная функция φ имеет производную в промежутке $[0, 1]$. В самом деле,

$$\frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = g \left(\frac{P(x_0 + t\Delta x + \Delta t\Delta x) - P(x_0 + t\Delta x)}{\Delta t} \right). \quad (5)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ выражение под знаком функционала g имеет пределом $P'(x_0 + t\Delta x)(\Delta x)$, а потому в силу непрерывности функционала g правая часть (5) имеет предел

$$\varphi'(t) = g(P'(x_0 + t\Delta x)(\Delta x)). \quad (6)$$

Напишем для функции φ формулу конечных приращений

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Приписывая во внимание (4) и (6), получим отсюда

$$g(P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)) = g(P'(x_0 + \theta\Delta x)(\Delta x))$$

и, следовательно,

$$|g(P(x_0 + \Delta x) - P(x_0))| \leq \|g\| \sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_0 + \theta\Delta x)\| \|\Delta x\|. \quad (7)$$

Выберем теперь функционал $g \neq 0$ так, чтобы было

$$g(P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)) = \|g\| \|P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)\|.$$

Тогда из (7) получаем

$$\|P(x) - P(x_0)\| \leq \sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_0 + \theta \Delta x)\| \|\Delta x\|, \quad (8)$$

$$\Delta x = x - x_0.$$

Применяя оценку (8) к оператору $P - U$ ($U \in B(X, Y)$) и используя при этом утверждения II и III из 1.2, мы приходим к неравенству

$$\|P(x) - P(x_0) - U(\Delta x)\| \leq \sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_0 + \theta \Delta x) - U\| \|\Delta x\|.$$

В частности, полагая здесь $U = P'(x_0)$, получим

$$\begin{aligned} \|P(x_0 + \Delta x) - P(x_0) - P'(x_0) \Delta x\| &\leq \\ &\leq \|\Delta x\| \sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_0 + \theta \Delta x) - P'(x_0)\|. \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношение (8) мы будем называть *формулой конечных приращений*, а неравенство (9) *формулой конечных приращений с остаточным членом*.

1.4. Укажем на некоторые применения формул конечных приращений.

Предположим, что производная оператора P существует в каждой точке некоторого открытого множества $\Omega_0 \subset \Omega$. Тем самым в Ω_0 определен оператор P' , сопоставляющий элементу $x \in \Omega_0$ элемент $P'(x) \in B(X, Y)$. Докажем, что если оператор P' непрерывен в точке $x_0 \in \Omega_0$, то P дифференцируем в этой точке.

В самом деле, в силу предположенной непрерывности оператора P' , каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется $\delta > 0$ так, что $\|P'(x) - P'(x_0)\| < \varepsilon$, как только $\|x - x_0\| < \delta$, т. е. если $\|\Delta x\| < \delta$, то $\sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_0 + \theta \Delta x) - P'(x_0)\| \leq \varepsilon$. Применяя это к (9), приходим к неравенству

$$\|P(x_0 + \Delta x) - P(x_0) - P'(x_0)(\Delta x)\| \leq \varepsilon \|\Delta x\|,$$

которое и означает дифференцируемость P в точке x_0 .

Формула конечных приращений может оказаться полезной при доказательстве существования неподвижной точки у оператора P .

Теорема 1. Пусть оператор P отображает множество $\Omega \subset X$ в X и имеет в каждой точке выпуклого замкнутого множества $\Omega_0 \subset \Omega$ производную. Тогда, если

- 1) $P(\Omega_0) \subset \Omega$;
- 2) $\sup_{x \in \Omega_0} \|P'(x)\| = \alpha < 1$,

то в Ω_0 существует единственная неподвижная точка оператора P .

Доказательство. Достаточно проверить, что в рассматриваемой ситуации выполняются условия теоремы XVI.1.1, т. е. что оператор P является оператором сжатия.

Пусть $x_1, x_2 \in \Omega_0$. По формуле конечных приращений имеем $\|P(x_2) - P(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| \sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))\| \leq \alpha \|x_2 - x_1\|$,

что и требовалось доказать.

Замечание. Если предположить, что оператор P' непрерывен в Ω_0 , то условие 2) оказывается и необходимым для того, чтобы P был оператором сжатия.

Действительно, если

$$\sup_{x \in \Omega_0} \|P'(x)\| \geq 1,$$

то найдутся числовая последовательность $\alpha_n \rightarrow 1$ и последовательность $\{x_n\}$ элементов из Ω_0 такие, что

$$\|P'(x_n)\| > \alpha_n, \quad n = 1, 2, \dots;$$

при этом можно считать, что точки x_n — внутри Ω_0 .

Для каждого $n = 1, 2, \dots$ по определению производной найдется элемент x'_n такой, что для достаточно малых t

$$\left\| \frac{P(x_n + tx'_n) - P(x_n)}{t} \right\| > \alpha_n \|x'_n\|, \quad |t| \leq t_n; \quad n = 1, 2, \dots$$

Полагая $y_n = x_n + t_n x'_n$ получаем такую последовательность пар элементов x_n, y_n , что

$$\frac{\|P(y_n) - P(x_n)\|}{\|y_n - x_n\|} > \alpha_n, \quad (10)$$

т. е. P не есть оператор сжатия.

1.5. Выясним смысл введенных выше понятий в случае, когда одно или оба пространства X и Y конечномерны.

Предположим сначала, что X — одномерное вещественное пространство, элементы которого мы будем отождествлять с числами.

Пусть $U \in B(X, Y)$. Нетрудно видеть, что в данном случае U имеет вид

$$U(t) = ty_0, \quad t \in X, \quad (11)$$

где y_0 — некоторый элемент из Y . При этом, поскольку $\|U(t)\| = |t| \|y_0\|$,

$$\|U\| = \|y_0\|. \quad (12)$$

Наоборот, каков бы ни был элемент $y_0 \in Y$, формула (11) дает оператор $U \in B(X, Y)$. Ясно, что соответствие между элементами пространств Y и $B(X, Y)$ взаимно однозначно; линейно и, согласно (12), сохраняет норму. Таким образом, можно считать $B(X, Y) = Y$.

Рассмотрим теперь оператор F , переводящий $\Omega \subset X$ в Y . Оператор F является, таким образом, функцией числового аргумента со значениями в пространстве Y .

Существование производной $F'(t_0) = y_0 \in Y$ означает, что при любом $t \in X$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + \tau t) - F(t_0)}{\tau} = ty_0. \quad (13)$$

Обозначая $\Delta t = \tau t$, можем переписать (13) в форме

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} = y_0.$$

Итак, в рассмотренном случае определение $F'(t_0)$ ничем не отличается от определения обычной производной вещественной функции вещественного аргумента. Отметим, что, поскольку $F'(t_0) \in Y$, оператор F' , так же как и F , переводит некоторое числовое множество в Y .

Как и в случае вещественных функций, нетрудно доказать, что наличие производной $F'(t_0)$ обеспечивает дифференцируемость оператора F в точке t_0 .

Если $\Omega = [a, b]$, то множество $F(\Omega)$ естественно рассматривать как кривую в пространстве Y . Элемент $F'(t_0)$ дает тогда направление касательной к данной кривой в точке $y_0 = F(t_0)$.

1.6. Пусть теперь X и Y — конечномерные пространства. Обозначим размерность X через m , а размерность Y через n . Как было указано в V.2.8, всякий оператор $U \in B(X, Y)$ определяется прямоугольной матрицей

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (14)$$

посредством формул

$$y = U(x), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in Y, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in X,$$

$$\eta_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_{k1} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Рассмотрим некоторый оператор P , переводящий $\Omega \subset X$ в Y . Задание оператора P равносильно указанию n числовых функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ от m переменных, так что если

$$y = P(x), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in Y, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \Omega,$$

то

$$\eta_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Допустим, что существует производная $P'(x_0) = U(x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_m^{(0)}))$. Пусть U определяется матрицей (14). Развертывая равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x_0 + tx) - P(x_0)}{t} = U(x)$$

и приписывая во внимание (15) и (16), получим n соотношений

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(\xi_1^{(0)} + t\xi_1, \dots, \xi_m^{(0)} + t\xi_m) - \varphi_i(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_m^{(0)})}{t} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Так как эти равенства должны иметь место для всех $x \in X$, то, выбирая в каждом из них последовательно такие x , у которых все координаты равны нулю, кроме одной, равной единице, мы найдем, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ имеют частные производные по $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$; именно,

$$\frac{\partial \varphi_i(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_m^{(0)})}{\partial \xi_k} = a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, производная $P'(x_0)$ есть линейный оператор, определяемый матрицей частных производных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Отметим, однако, что существование частных производных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ не обеспечивает еще существования производной $P'(x_0)$, как показывает следующий пример. Пусть $n = 1$, $m = 2$,

$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1 \xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{3/2}}, \quad \varphi_1(0, 0) = 0; \quad x_0 = (0, 0).$$

Ясно, что $\frac{\partial \varphi_1(0, 0)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \varphi_1(0, 0)}{\partial \xi_2} = 0$. Поэтому, если бы производная $P'(x_0)$ существовала, это был бы нулевой оператор и, следовательно, соотношение (17) дало бы

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_1(t\xi_1, t\xi_2)}{t} = 0.$$

Между тем в действительности этот предел равен бесконечности, если только $\xi_1 \neq 0$ и $\xi_2 \neq 0$.

Предоставляем читателю доказать, что для дифференцируемости оператора P необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ имели дифференциалы. Отметим, что в общем случае дифференцируемость оператора P не является следствием существования производной, как это вытекает из известного факта элементарного анализа.

1.7. Рассмотрим функцию F вещественного аргумента, значения которой суть элементы B -пространства X . Если F определена в промежутке $[a, b]$, то имеет смысл говорить об интеграле от F , понимая под этим предел интегральных сумм

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_k)(t_{k+1} - t_k),$$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b; \quad \tau_k \in [t_k, t_{k+1}]; \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

при $\lambda = \max_k [t_{k+1} - t_k] \rightarrow 0$. В случае существования указанного предела он и называется *интегралом* функции F и обозначается символом $\int_a^b F(t) dt$. Как и для функций с вещественными значениями, доказывается, что непрерывная функция равномерно непрерывна, и потому интегрируема, т. е. для нее интеграл существует. Свойства обычного интеграла Римана переносятся вместе с их доказательствами на определенный выше абстрактный интеграл. Отметим среди них лишь три.

I. Если $U \in B(X, Y)$, то

$$\int_a^b U(F(t)) dt = U\left(\int_a^b F(t) dt\right).$$

II. Если $F(t) = \varphi(t)x_0$ ($t \in [a, b]$), где $x_0 \in X$ — фиксированный элемент и $\varphi(t)$ — вещественная интегрируемая функция, то

$$\int_a^b F(t) dt = x_0 \int_a^b \varphi(t) dt.$$

$$\text{III. } \left\| \int_a^b F(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\| dt.$$

Вернемся теперь к рассмотрению нелинейных операторов.

Пусть имеется некоторый оператор R , определенный на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ ($x_0, x_0 + \Delta x \in X$), со значениями в пространстве $B(X, Y)$. По определению полагаем

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} R(x) dx &= \int_0^1 R(x_0 + t\Delta x) \Delta x dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} R(x_0 + \tau_k \Delta x) \Delta x (t_{k+1} - t_k). \end{aligned}$$

Очевидно, если R непрерывен, то интеграл существует и представляет собой элемент из Y . Интегралы такого типа впервые введены М. К. Гавуриным [1].

В частности, если $R = P'$, где P — оператор, переводящий $\Omega \subset X$ в Y и имеющий непрерывную производную на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x] \subset \Omega$, то интеграл от $P'(x)$ существует и, как мы докажем, справедливо соотношение

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} P'(x) dx = P(x_0 + \Delta x) - P(x_0), \quad (18)$$

являющееся обобщением основной теоремы интегрального исчисления: формулы Ньютона — Лейбница.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} P'(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P'(x_0 + \tau_k \Delta x) \Delta x (t_{k+1} - t_k) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P'(\bar{x}_k) \Delta x_k, \end{aligned}$$

$$\bar{x}_k = x_0 + \tau_k \Delta x; \quad \Delta x_k = (t_{k+1} - t_k) \Delta x; \quad k = 0, \dots, n-1.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P(x_0 + \Delta x) - P(x_0) &= \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [P(x_0 + t_{k+1} \Delta x) - P(x_0 + t_k \Delta x)] = \sum_{k=0}^{n-1} [P(x_{k+1}) - P(x_k)]. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой конечных приращений, найдем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} [P(x_{k+1}) - P(x_k) - P'(\bar{x}_k) \Delta x_k] \right\| &\leq \\ &\leq \|\Delta x\| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_k + \theta \Delta x_k) - P'(\bar{x}_k)\|, \end{aligned}$$

откуда, принимая во внимание непрерывность P' , а следовательно, и равномерную его непрерывность на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, получим требуемый результат.

Замечание. Из свойства III интеграла следует, что если

$$\|R(x_0 + \tau \Delta x)\| \leq \varphi(t_0 + \tau \Delta t), \quad \tau \in [0, 1], \quad (19)$$

$$\|\Delta x\| \leq \Delta t, \quad (20)$$

то

$$\left\| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} R(x) dx \right\| \leq \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \varphi(t) dt. \quad (21)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} R(x) dx \right\| &= \left\| \int_0^1 R(x_0 + \tau \Delta x) (\Delta x) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \|\Delta x\| \int_0^1 \|R(x_0 + \tau \Delta x)\| d\tau \leq \Delta t \int_0^1 \varphi(t_0 + \tau \Delta t) d\tau = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Из (21), в частности, следует, что если неравенство

$$\|R(x)\| \leq \varphi(t) \quad (22)$$

выполнено для всех таких x и t , что

$$\|x - x_0\| \leq t - t_0, \quad (23)$$

то

$$\left\| \int_{x_0}^{x_1} R(x) dx \right\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t) dt, \quad (24)$$

где x_1 — любой элемент, удовлетворяющий условию $\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0$.

Действительно, полагая $\Delta x = x_1 - x_0$, $\Delta t = t_1 - t_0$, $x = x_0 + \tau \Delta x$, $t = t_0 + \tau \Delta t$, находим, что $\|\Delta x\| \leq \Delta t$ и

$$\|x - x_0\| = \tau \|\Delta x\| \leq \tau \Delta t = t - t_0, \quad \tau \in [0, 1],$$

т. е. выполнено (23), а тогда вследствие (22)

$$\|R(x_0 + \tau \Delta x)\| \leq \varphi(t_0 + \tau \Delta t), \quad \tau \in [0, 1].$$

Применяя (21), получим (24).

§ 2. Вторая производная и билинейные операторы

2.1. Пусть в открытом множестве Ω B -пространства X существует производная P' оператора P , отображающего множество Ω в B -пространство Y . Как отмечалось выше, P' можно рассматривать как оператор, отображающий множество Ω в пространство $B(X, Y)$. Поэтому имеет смысл говорить о производной этого оператора в точке $x_0 \in \Omega$, которую, если она существует, называют *второй производной* данного оператора P и обозначают $P''(x_0)$. Если оператор P' дифференцируем, то говорят, что P *дважды дифференцируем*.

Если вторая производная существует в каждой точке множества Ω , то тем самым определен оператор P'' , производная которого называется *третьей производной* данного оператора P , и вообще *производная $P^{(n)}(x_0)$ порядка n* в точке x_0 есть по определению производная оператора $P^{(n-1)}$. Ясно, что

$$P^{(n)}(x_0) \in \overbrace{B(X, B(X, \dots, B(X, Y) \dots))}^n.$$

2.2. Элементы пространства $B(X, B(X, Y))$ непосредственно интерпретируются недостаточно наглядно. Для выяснения сущности этих образований целесообразно ввести новое понятие.

Пусть даны два B -пространства, X и Y , и пусть каждой упорядоченной паре элементов $x, x' \in X$ отнесен элемент

$$y = B(x, x') \in Y.$$

Биварный оператор B называется *билинейным*, если при этом соблюдены два условия.

I. Каковы бы ни были $x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in X$ и числа α, β ,

$$\begin{aligned} B(\alpha x_1 + \beta x_2, x') &= \alpha B(x_1, x') + \beta B(x_2, x'), \\ B(x, \alpha x'_1 + \beta x'_2) &= \alpha B(x, x'_1) + \beta B(x, x'_2), \\ x, x' &\in X. \end{aligned} \quad (1)$$

II. Существует такое вещественное $M > 0$, что при любых $x, x' \in X$

$$\|B(x, x')\| \leq M \|x\| \|x'\|. \quad (2)$$

Как и для линейных операторов, наименьшее значение M в неравенстве (2) называется *нормой* оператора B и обозначается обычным образом: $\|B\|$. Ясно, что

$$\|B\| = \sup_{\|x\|, \|x'\| \leq 1} \|B(x, x')\|. \quad (3)$$

Множество всех билинейных операторов с нормой (3) и естественным образом линейризованное является, как нетрудно проверить, B -пространством, которое мы будем обозначать $B(X^2, Y)$.

Не останавливаясь на деталях, укажем, что аналогичным образом вводятся пространства $B(X^n, Y)$ n -линейных операторов *).

Рассмотрим несколько примеров билинейных операторов.

В простейшем случае $X = Y = \mathbf{R}^1$, общая форма билинейного оператора будет

$$B(x, x') = \alpha x x'$$

(α — вещественное число).

Пусть теперь X и Y — конечномерные пространства: X — m -мерное, Y — n -мерное. Обозначим через x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) элемент пространства X , все координаты которого, кроме i -й, равны нулю, а i -я равна единице. Аналогичное значение имеет $y_j \in Y$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Рассмотрим оператор $B \in B(X^2, Y)$.

Положив

$$B(x_i, x_j) = (a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \dots, a_{ij}^{(n)}), \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

в силу (1) будем иметь для произвольных элементов $x, x' \in X$ ($x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, $x' = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_m)$)

$$y = B(x, x') = B\left(\sum_{i=1}^m \xi_i x_i, \sum_{j=1}^m \xi'_j x_j\right) = \sum_{i,j=1}^m \xi_i \xi'_j B(x_i, x_j).$$

Таким образом, если $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, то

$$\eta_k = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^{(k)} \xi_i \xi'_j \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

*) Подробное изложение теории n -линейных операторов см. Гавуриц [2] и Хилле, Филлипс.

т. е. координаты элемента y суть билинейные формы координат элементов x и x' .

Ясно, что, какую бы матрицу с тремя входами

$$(a_{ij}^{(k)})_i \quad i, j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

ни взять, оператор B , определенный по формулам (4), будет билинейным. Итак, в рассмотренном случае каждый билинейный оператор определяет и определяется сам матрицей с тремя входами (5).

Что касается нормы оператора B , то она, разумеется, зависит от нормировки пространств X и Y . Так, если $X = l_m^2$, $Y = l_n^2$, то из (4) с помощью неравенства Коши — Буняковского получаем

$$|\eta_k| = \left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^{(k)} \xi_i \xi'_j \right| \leq \left[\sum_{i=1}^m |\xi_i|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}^{(k)} \xi'_j \right|^2 \right]^{1/2} \leq \Lambda_k \|x\| \|x'\|$$

где Λ_k^2 означает наибольшее собственное значение матрицы $A_k A_k^*$, представляющей произведение матрицы

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1m}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2m}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & \dots & a_{mm}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

и транспонированной A_k^* (ср. V.2.8). Таким образом,

$$\|y\| = \left[\sum_{k=1}^n |\eta_k|^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{k=1}^n \Lambda_k^2 \right]^{1/2} \|x\| \|x'\|.$$

Это дает оценку для $\|B\|$:

$$\|B\| \leq \left[\sum_{k=1}^n \Lambda_k^2 \right]^{1/2}. \quad (6)$$

Поскольку

$$\Lambda_k^2 \leq \sum_{i,j=1}^m |a_{ij}^{(k)}|^2 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

то из (6) получается более грубая, но и более простая оценка

$$\|B\| \leq \left[\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}^{(k)}|^2 \right]^{1/2}.$$

Если положить $X = l_m^\infty$, $Y = l_n^\infty$, то с помощью очевидных рассуждений можно получить такую оценку для $\|B\|$:

$$\|B\| \leq \max_k \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}^{(k)}|.$$

Значительно больший интерес представляют примеры билинейных операторов в бесконечномерных пространствах, и главным образом в пространствах функций.

Оператор B :

$$y = B(x, x'), \quad y(s) = \int_0^1 \int_0^1 K(s, t, u) x(t) x'(u) dt du, \quad (7)$$

будет билинейным в том или ином пространстве функций (заданных на $[0, 1]$) в зависимости от требований, накладываемых на функцию K — ядро оператора. Так, если предполагать функцию K непрерывной, билинейность B будет иметь место, каковы бы ни были X и Y из числа пространств C, L^p ($1 \leq p \leq \infty$).

Еще больший интерес для приложений представляет случай оператора вида

$$y = B(x, x'), \quad (8)$$

$$y(s) = \int_0^1 K(s, t) x(t) x'(t) dt. \quad (9)$$

Пусть сначала $X = Y = L^p(0, 1)$ ($p \geq 2$). Тогда, если $M < \infty$, где

$$M^p = \begin{cases} \int_0^1 \left[\int_0^1 |K(s, t)|^{\frac{p}{p-2}} dt \right]^{p-2} ds, & p > 2, \\ \int_0^1 \sup_t |K(s, t)| dt, & p = 2, \end{cases}$$

то $B \in B(X^2, Y)$.

В самом деле, произведение, стоящее под знаком интеграла в (9), суммируемо для почти всех $s \in [0, 1]$. Чтобы убедиться в этом в случае $p > 2$, достаточно применить к интегралу (9) обобщенное неравенство Гёльдера (II. 3.4) с показателями $\frac{p}{p-2}$, p . На основании этого же неравенства получим

$$\begin{aligned} |y(s)|^p &= \left| \int_0^1 K(s, t) x(t) x'(t) dt \right|^p \leq \\ &\leq \left[\int_0^1 |K(s, t)|^{\frac{p}{p-2}} dt \right]^{p-2} \int_0^1 |x(t)|^p dt \int_0^1 |x'(t)|^p dt \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 |y(s)|^p ds \leq M^p \|x\|^p \|x'\|^p < \infty. \quad (10)$$

Итак, $y \in L^p(0, 1)$. Вместе с тем доказано, что для оператора B выполнено неравенство (2). Ввиду того, что аддитивность

(соотношения (1)) очевидна, билинейность оператора B установлена. Одновременно из (10) вытекает оценка для нормы

$$\|B\| \leq M.$$

Рассуждения проведены для случая $p > 2$. Рассмотрение случая $p = 2$ не представляет затруднений.

Пусть теперь $X = Y = C[0, 1]$. В этом случае билинейность оператора (8) обеспечивается требованием, чтобы функция $K(s, t)$ была непрерывна по s и чтобы

$$M = \max_s \int_0^1 |K(s, t)| dt < \infty.$$

Действительно, суммируемость подынтегральной функции в (9) не вызывает сомнений. Непрерывность y следует из возможности перехода к пределу под знаком интеграла (9). Равенства (1) очевидны. Выполнение неравенства (2) также легко проверяется, так как

$$|y(s)| \leq \max_t |x(t)| \max_t |x'(t)| \int_0^1 |K(s, t)| dt, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

и поэтому

$$\|y\| \leq M \|x\| \|x'\|.$$

Отсюда получается оценка

$$\|B\| \leq M = \sup_s \int_0^1 |K(s, t)| dt,$$

причем фактически имеет место знак равенства:

$$\|B\| = \sup_s \int_0^1 |K(s, t)| dt$$

(это устанавливается в точности так же, как соответствующее равенство для линейных операторов в V.2.4).

2.3. Пространство $B(X^2, Y)$, введенное выше, оказывается тесно связанным с пространством $B(X, B(X, Y))$, встречавшимся нам при рассмотрении второй производной. Имению, докажем, что указанные пространства линейно изометричны.

Пусть $W \in B(X, B(X, Y))$. Возьмем произвольный элемент $x' \in X$ и положим $U_{x'} = W(x')$. Очевидно, $U_{x'} \in B(X, Y)$, так что $y = B(x, x') = U_{x'}(x)$ является элементом пространства Y . Бинарный оператор B , определенный таким образом, удовлетворяет, очевидно, условию I из 2.2, условие II также выполнено, так как

$$\|y\| \leq \|U_{x'}\| \|x\| \leq \|W\| \|x\| \|x'\|. \quad (11)$$

Итак, $B \in B(X^2, Y)$, причем из (11) следует неравенство

$$\|B\| \leq \|W\|. \quad (12)$$

Таким образом, каждому оператору $W \in B(X, B(X, Y))$ можно указанным способом отнести билинейный оператор $B \in B(X^2, Y)$. Покажем, что при таком соответствии каждый билинейный оператор $B \in B(X^2, Y)$ является образом некоторого оператора $W \in B(X, B(X, Y))$.

Для этого достаточно отметить, что если B задан, то при фиксированном $x' \in X$

$$W(x') = B(\cdot, x') \in B(X, Y)^*.$$

При этом

$$\|W(x')\| = \sup_{\|x\| < 1} \|W(x')(x)\| = \sup_{\|x\| < 1} \|B(x, x')\| \leq \|B\| \|x'\|,$$

откуда вытекает $W \in B(X, B(X, Y))$, и неравенство

$$\|W\| \leq \|B\|.$$

Сопоставляя его с (12) приходим к равенству

$$\|W\| = \|B\|. \quad (13)$$

Так как соответствие между элементами пространств $B(X, B(X, Y))$ и $B(X^2, Y)$ аддитивно и однородно, то из (13) следует, что оно взаимно однозначно и, таким образом, осуществляет линейную изометрию указанных пространств.

Линейная изометрия пространств $B(X, B(X, Y))$ и $B(X^2, Y)$ дает основание для отождествления соответствующих элементов этих пространств, что мы и будем делать в дальнейшем.

Отметим без доказательства (его без труда проведет читатель самостоятельно), что в общем случае пространство $B(X, \dots, B(X, Y), \dots)$ и пространство $B(X^n, Y)$ n -линейных операторов линейно изометричны (см. Гавурин [2]).

2.4. Как было показано в 2.1, вторая производная оператора P , переводящего X в Y , есть элемент пространства $B(X, B(X, Y))$, так что в соответствии с полученными выше результатами $P''(x_0)$ можно считать билинейным оператором. Понимая под $P''(x_0)$ билинейный оператор, будем иметь согласно 2.3

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P'(x_0 + tx') - P'(x_0)}{t} = P''(x_0)(\cdot, x'). \quad (14)$$

Следовательно, при любом $x \in X$

$$P''(x_0)(x, x') = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P'(x_0 + tx')x - P'(x_0)x}{t}. \quad (15)$$

*) $B(\cdot, x')$ означает оператор U такой, что $U(x) = B(x, x')$. Подобные обозначения используются и в дальнейшем.

Отметим, что равенства (14) и (15) не эквивалентны. Точнее говоря, может существовать билинейный оператор $B \in B(X^2, Y)$ такой, что при любых $x, x' \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P'(x_0 + tx)x - P'(x_0)x}{t} = B(x, x') \quad (16)$$

и вместе с тем $P''(x_0)$ не существует. Как нетрудно видеть, для того, чтобы $P''(x_0)$ существовало, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $x' \in X$ предельное соотношение (16) имело место равномерно относительно $x \in X$ с $\|x\| = 1$. Отмеченное обстоятельство позволяет несколько расширить понятие второй производной. Именно, мы будем называть билинейный оператор B *слабой второй производной* оператора P в точке x_0 , если при любых $x, x' \in X$ имеет место (16). Очевидно, возможно сохранить за слабой производной прежнее обозначение, так как если вторая производная существует в обычном смысле, то она совпадает со слабой.

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что если P дважды дифференцируем в точке x_0 , то это означает, что (16) имеет место равномерно относительно $x, x' \in X$ с $\|x\| = 1$ и $\|x'\| = 1$.

Выясним вид второй производной в случае, когда X и Y — конечномерные пространства.

Пусть $P''(x_0)$ существует и как билинейный оператор определяется матрицей

$$(a_{ij}^{(k)})_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда, приравнивая соответствующие координаты левой и правой части соотношения (15), найдем, сохраняя обозначения из 1.6,

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}^{(k)} \xi_i \xi_j' = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_i}(\xi_j^{(0)} + t\xi_j') \xi_i - \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_i}(\xi_j^{(0)}) \xi_i}{t},$$

$$k = 1, 2, \dots, n^*).$$

Выбирая в качестве x и x' такие элементы, у которых все координаты равны нулю, кроме i -й и j -й, равных единице, получим, что функции φ_k имеют вторые производные и

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{\partial^2 \varphi_k(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_m^{(0)})}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

2.5. В заключение параграфа установим формулу, являющуюся обобщением формулы Тейлора для вещественных функций.

*) Здесь использовано сокращенное обозначение $\varphi(\xi_i) = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$.

Пусть, как и раньше, оператор P переводит множество Ω пространства X в Y и имеет на отрезке $[x_0, \bar{x}] \subset \Omega$ непрерывную вторую производную. Тогда справедлива формула

$$P(\bar{x}) - P(x_0) - P'(x_0)(\bar{x} - x_0) = \int_{x_0}^{\bar{x}} P''(x)(\bar{x} - x, \cdot) dx. \quad (17)$$

Для доказательства рассмотрим оператор Q :

$$Q(x) = P(x) + P'(x)(\bar{x} - x) = P(x) + Q_0(x), \quad x \in \Omega,$$

и проверим, что для любого $\tilde{x} \in [x_0, \bar{x}]$

$$Q'(\tilde{x})(x) = P''(\tilde{x})(\bar{x} - \tilde{x}, x), \quad x \in X. \quad (18)$$

Если это будет установлено, то формула (17) очевидным образом может быть получена из формулы Ньютона — Лейбница (см. (18), 1.7).

Достаточно рассмотреть лишь оператор Q_0 . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{Q_0(\tilde{x} + tx) - Q_0(\tilde{x})}{t} &= \frac{P'(\tilde{x} + tx)(\bar{x} - \tilde{x} - tx) - P'(\tilde{x})(\bar{x} - \tilde{x})}{t} = \\ &= \frac{P'(\tilde{x} + tx)(\bar{x} - \tilde{x}) - P'(\tilde{x})(\bar{x} - \tilde{x})}{t} - P'(\tilde{x} + tx)x. \end{aligned}$$

При $t \rightarrow 0$ первое слагаемое имеет пределом $P''(\tilde{x})(\bar{x} - \tilde{x}, x)$, второе же вследствие очевидной непрерывности оператора P' стремится к $P'(\tilde{x})(x)$. Таким образом,

$$Q'_0(\tilde{x})(x) = P''(\tilde{x})(\bar{x} - \tilde{x}, x) - P'(\tilde{x})x,$$

что и дает для $Q'(\tilde{x})(x)$ выражение (18).

Замечание. Как ясно из приведенного вывода, формула (17) остается верной, если под $P''(x)$ понимать слабую вторую производную.

§ 3. Примеры

В предыдущих параграфах мы уже встречались с примерами нахождения производных нелинейных операторов в простейшем — конечномерном — случае. В настоящем параграфе рассмотрены более сложные и более содержательные примеры, которые найдут применение в следующем параграфе и главным образом в следующей главе.

3.1. Рассмотрим интегральный оператор P :

$$y = P(x), \quad y(s) = \int_0^1 K(s, t, x(t)) dt. \quad (1)$$

Теорема 1. Пусть функция $K(s, t, u)$ непрерывна, дважды непрерывно дифференцируема по u для $0 \leq s, t \leq 1$, $-\infty < u < \infty$, причем для этих значений s, t, u

$$|K''_{u^2}(s, t, u)| \leq M |u|^{p-2} + N. \quad (2)$$

Тогда, если $p \geq 2$, оператор (1) отображает пространство $L^p(0, 1)$ в пространство $L^q(0, 1)$ ($1 \leq q < \infty$), дифференцируем и имеет вторую производную в каждой точке $x_0 \in L^p(0, 1)$. При этом $P'(x_0) = U$, $P''(x_0) = B$, где U и B определяются формулами

$$z = U(x), \quad z(s) = \int_0^1 K'_u(s, t, x_0(t)) x(t) dt,$$

$$v = B(x, x'), \quad v(s) = \int_0^1 K''_{u^2}(s, t, x_0(t)) x(t) x'(t) dt.$$

Доказательство. Убедимся сначала, что оператор (1) отображает $L^p(0, 1)$ в $L^\infty(0, 1)$ (и тем самым в $L^q(0, 1)$ ($q < \infty$)). С этой целью отметим, что, поскольку $K(s, t, u)$ — непрерывная функция, сложная функция $K(s, t, x(t))$ измерима.

На основании формулы Тейлора имеем, далее,

$$K(s, t, x(t)) = K(s, t, 0) + K'_u(s, t, 0) x(t) + \frac{1}{2} K''_{u^2}(s, t, \theta x(t)) x^2(t),$$

$$0 < \theta < 1.$$

Оценим интеграл от каждого слагаемого в правой части:

$$\left| \int_0^1 K(s, t, 0) dt \right| \leq \max_{s,t} |K(s, t, 0)| = A_1,$$

$$\left| \int_0^1 K'_u(s, t, 0) x(t) dt \right| \leq \max_{s,t} |K'_u(s, t, 0)| \int_0^1 |x(t)| dt \leq A_2 \|x\|_{L^p}.$$

Для оценки интеграла от третьего слагаемого используем (2):

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^1 K''_{u^2}(s, t, \theta x(t)) x^2(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^1 [M |x(t)|^{p-2} + N] |x(t)|^2 dt \leq A_3 \|x\|_{L^p}^p.$$

Отсюда следует, что $y = P(x)$ имеет смысл и, кроме того, справедлива оценка

$$|y(s)| \leq A_1 + A_2 \|x\|_{L^p} + A_3 \|x\|_{L^p}^p, \quad s \in [0, 1],$$

так что $y \in L^\infty(0, 1)$.

Докажем теперь, что P дифференцируем и $P'(x_0) = U$. Пусть $z = U(x)$ и

$$z_\tau = \frac{P(x_0 + \tau x) - P(x_0)}{\tau}.$$

Имеем

$$|z_\tau(s) - z(s)| = \left| \int_0^1 \left[\frac{K(s, t, x_0(t) + \tau x(t)) - K(s, t, x_0(t))}{\tau} - K'_u(s, t, x_0(t)) x(t) \right] dt \right|. \quad (3)$$

Учитывая, что по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} K(s, t, x_0(t) + \tau x(t)) &= K(s, t, x_0(t)) + \\ &+ \tau K'_u(s, t, x_0(t)) x(t) + \frac{\tau^2}{2} K''_{u^2}(s, t, x_0(t) + \theta \tau x(t)) x^2(t), \\ &0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

перепишем (3):

$$|z_\tau(s) - z(s)| = \frac{|\tau|}{2} \left| \int_0^1 K''_{u^2}(s, t, x_0(t) + \theta \tau x(t)) dt \right|.$$

Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получим оценку

$$|z_\tau(s) - z(s)| \leq A_4 |\tau|, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

где постоянная A_4 зависит лишь от $\|x\|$, но не от самого x . Таким образом, $z_\tau \rightarrow z$ при $\tau \rightarrow 0$ равномерно относительно x с $\|x\| = 1$.

Перейдем теперь ко второй производной. Обозначим

$$v = B(x, x'); \quad v_\tau = \frac{P'(x_0 + \tau x')(x) - P'(x_0)(x)}{\tau}.$$

Как указывалось в 2.4, достаточно доказать, что при $\tau \rightarrow 0$

$$v_\tau \rightarrow v$$

равномерно относительно $x \in L^p(0, 1)$ с $\|x\| = 1$.

Применяя формулу конечных приращений, а затем неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} |v_\tau(s) - v(s)| &= \left| \int_0^1 \left[\frac{K'_u(s, t, x_0(t) + \tau x'(t)) - K'_u(s, t, x_0(t))}{\tau} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - K''_{u^2}(s, t, x_0(t)) x'(t) \right] x(t) dt \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^1 [K''_{u^2}(s, t, x_0(t) + \tau \theta x'(t)) - K''_{u^2}(s, t, x_0(t))] x(t) x'(t) dt \right| \leq \\
&\leq \|x\| \left\{ \int_0^1 | [K''_{u^2}(s, t, x_0(t) + \theta \tau x'(t)) - \right. \\
&\quad \left. - K''_{u^2}(s, t, x_0(t))] x'(t) |^{\frac{p}{p-1}} dt \right\}^{\frac{p-1}{p}}. \quad (4)
\end{aligned}$$

Если $x_0(t)$ и $x'(t)$ конечны, то подынтегральная функция в последнем интеграле стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$. Далее, в силу (2)

$$\begin{aligned}
&| [K''_{u^2}(s, t, x_0(t) + \theta \tau x'(t)) - K''_{u^2}(s, t, x_0(t))] x'(t) |^{\frac{p}{p-1}} \leq \\
&\leq [|M| x_0(t) + \theta \tau x'(t)|^{p-2} + M |x_0(t)|^{p-2} + 2N] |x'(t)|^{\frac{p}{p-1}} \leq \\
&\leq A_5 |x_0(t)|^{\frac{(p-2)p}{p-1}} |x'(t)|^{\frac{p}{p-1}} + A_6 |x'(t)|^p.
\end{aligned}$$

Так как произведения $|x_0(t)|^{\frac{p}{p-1}} |x'(t)|^{\frac{p}{p-1}}$ и $|x'(t)|^p$ суммируемы, то в (4) возможен предельный переход под знаком интеграла, что дает

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} v_\tau(s) = v(s), \quad 0 \leq s \leq 1;$$

при этом, очевидно, равномерно относительно x с $\|x\| = 1$.

Из приведенных выше рассуждений следует также, что

$$|v_\tau(s)| \leq \int_0^1 |K''_{u^2}(s, t, x_0(t) + \theta \tau x'(t)) x(t) x'(t)| dt \leq A_{7\tau}$$

так что в интеграле $\|v_\tau - v\|_{L^q} = \left\{ \int_0^1 |v_\tau(s) - v(s)|^q ds \right\}^{1/q}$ возможен предельный переход под знаком интеграла, т. е. $\|v_\tau - v\| \rightarrow 0$; при этом равномерно относительно x с $\|x\| = 1$.

Теорема доказана.

Замечание. Если условие (2) заменить условием

$$|K''_{u^2}(s, t, u)| \leq M |u|^\lambda + N, \quad \lambda < p - 2, \quad (5)$$

и если $p > 2$, то можно доказать, что оператор P , рассматриваемый как оператор из L^p в L^∞ , дважды дифференцируем в каждой точке $x_0 \in L^p$ такой, что x_0 — ограниченная функция.

*) Нужно воспользоваться неравенством $|a + b|^\alpha \leq 2^\alpha (|a|^\alpha + |b|^\alpha)$ при $\alpha > 0$.

3.2. Оператор (1) можно рассматривать и как оператор из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$.

Пусть $x_0 \in C[0, 1]$ — фиксированный элемент. Обозначим через Ω шар пространства $C[0, 1]$ с центром в x_0 и радиусом r , а через G — множество точек (s, t, u) трехмерного пространства, определяемое неравенствами $0 \leq s, t \leq 1$; $|u - x_0(t)| \leq r$.

Теорема 2. Пусть функция $K(s, t, u)$ задана в G и непрерывна там вместе с производными $K'_u(s, t, u)$ и $K''_{uu}(s, t, u)$. Тогда оператор P , определяемый формулами (1), переводит множество Ω в $C[0, 1]$, дважды дифференцируем в каждой внутренней точке $\bar{x} \in \Omega$ и $P'(\bar{x}) = U$, $P''(\bar{x}) = B$ определяются формулами

$$z = U(x), \quad z(s) = \int_0^1 K'_u(s, t, \bar{x}(t)) x(t) dt,$$

$$v = B(x, x'), \quad v(s) = \int_0^1 K''_{uu}(s, t, \bar{x}(t)) x(t) x'(t) dt.$$

Доказательство. Возьмем произвольный x из Ω . Непрерывность функции $y = P(x)$, определенной формулой (1), следует непосредственно из элементарных фактов теории интегралов, зависящих от параметра, и, значит, $y \in C[0, 1]$.

Пусть теперь $\bar{x} \in \Omega$ и $x \in C[0, 1]$. Рассмотрим элемент

$$z_\tau = \frac{P(\bar{x} + \tau x) - P(\bar{x})}{\tau} - U(x).$$

Имеем

$$z_\tau(s) = \int_0^1 \left[\frac{K(s, t, \bar{x}(t) + \tau x(t)) - K(s, t, \bar{x}(t))}{\tau} - K'_u(s, t, \bar{x}(t)) x(t) \right] dt.$$

При $\tau \rightarrow 0$ подынтегральное выражение стремится к нулю и равномерно ограничено относительно x с $\|x\| = 1$ и $s \in [0, 1]$ (это устанавливается с помощью формулы конечных приращений). Таким образом, $z_\tau \rightarrow 0$ равномерно относительно $x \in C[0, 1]$ с $\|x\| = 1$, и дифференцируемость P в точке $\bar{x}$ доказана. При этом

$$P'(\bar{x}) = U.$$

Аналогичными рассуждениями докажем, что $P''(\bar{x}) = B$ и, более того, что P дважды дифференцируем.

3.3. Рассмотрим нелинейный оператор, связанный с системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy_i}{ds} = f_i(s, y_k(s)), \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

которую нам удобнее записывать в форме системы интегральных уравнений

$$y_k(s) = y_k^{(0)} + \int_0^s f_k(t, y_k(t)) dt, \quad t, k = 1, 2, \dots, n,$$

или, короче, в векторной форме

$$y(s) = y^{(0)} + \int_0^s f(t, y(t)) dt,$$

где $y(s)$, $y^{(0)}$, $f(t, u)$, u — векторы, составляющие которых соответственно

$$(y_1(s), y_2(s), \dots, y_n(s)), \quad (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}), \\ (f_1(t, u_k), f_2(t, u_k), \dots, f_n(t, u_k)), \quad (u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Введем в рассмотрение пространство C_n^α ($\alpha > 0$), элементы которого суть абсолютно непрерывные вектор-функции на $[0, \infty)$ такие, что

$$\sup_t |y(t) e^{\alpha t}| < \infty, \quad \sup_t |y'(t) e^{\alpha t}| < \infty, \quad t \geq 0 \quad *).$$

Норма в C_n^α вводится посредством равенства

$$\|y\| = \sup_t |y(t) e^{\alpha t}| + \sup_t |y'(t) e^{\alpha t}|, \quad y \in C_n^\alpha.$$

Кроме C_n^α рассмотрим еще пространство D_n^α состоящее из абсолютно непрерывных вектор-функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_t |z(t)| < \infty, \quad \sup_t |z'(t) e^{\alpha t}| < \infty, \quad z \in D_n^\alpha.$$

Норма в D_n^α определяется так:

$$\|z\| = \sup_t |z(t)| + \sup_t |z'(t) e^{\alpha t}|, \quad z \in D_n^\alpha.$$

Нетрудно проверить, что C_n^α и D_n^α являются B -пространствами.

Рассмотрим оператор P :

$$z = P(y), \quad (6)$$

$$z(s) = y(s) - \int_0^s f(t, y(t)) dt. \quad (7)$$

Теорема 3. Пусть $f(t, u)$ — векторная функция, определенная на множестве G $(n+1)$ -мерного пространства,

$$(t, u) \in G \text{ означает } t \geq 0, \quad |u| \leq re^{-\alpha t}.$$

*) Как и выше (в главе XVI), длину вектора u мы обозначаем символом $|u|$, а норму матрицы A как оператора из l_n^2 в l_n^2 — через $|A|$.

При этом

$$1) f(t, 0) = 0;$$

2) в G существует ограниченная производная $f'_u(t, u)$ *), непрерывная по u и равномерно относительно $t \geq 0$.

Тогда, если обозначить через Ω шар пространства C_n^α с центром в нуле и радиусом r , то оператор (6) переводит Ω в D_n^α и дифференцируем в каждой точке из Ω , причем $P'(y_0) = U$, где U определяется формулой

$$z = U(y), \quad z(s) = y(s) - \int_0^s f'_u(t, y_0(t)) y(t) dt. \quad (8)$$

Доказательство. Докажем сначала, что функция, определяемая равенством (7), принадлежит D_n^α (в предположении, что $y \in \Omega$). Действительно, так как $f(t, 0) = 0$, то

$$z(s) = y(s) - \int_0^s [f(t, y(t)) - f(t, 0)] dt.$$

Подынтегральное выражение здесь оценивается с помощью формулы конечных приращений следующим образом:

$$|f(t, y(t)) - f(t, 0)| \leq \sup_{0 < \theta < 1} |f'_n(t, \theta y(t))| |y(t)| \leq M \|y\| e^{-\alpha t},$$

$$M = \sup |f'_u(t, u)|, \quad (t, u) \in G.$$

Используя полученную оценку, будем иметь

$$\sup_s |z(s)| \leq \sup_s |y(s)| + M \|y\| \sup_s \int_0^s e^{-\alpha t} dt \leq \|y\| + \frac{M}{\alpha} \|y\| < \infty.$$

Далее,

$$z'(s) = y'(s) - f(s, y(s)),$$

и аналогичными рассуждениями убеждаемся, что

$$\sup_s |z'(s) e^{\alpha s}| < \infty.$$

Таким образом, z имеет смысл и является элементом пространства D_n^α .

Проверим теперь, что U , определенный формулой (8), является непрерывным линейным оператором, отображающим C_n^α в D_n^α .

*) Напомним, что производная $f'_u(t, u)$ векторной функции $f(t, \cdot)$ есть n -квадратная матрица производных $(\partial f_i / \partial u_k)$ (см. 4.6).

Повторяя предыдущие рассуждения, найдем для $z = U(y)$

$$\begin{aligned} \sup |z(s)| + \sup |z'(s) e^{\alpha s}| &= \sup \left| y(s) - \int_0^s f'_u(t, y_0(t)) y(t) dt \right| + \\ &+ \sup |y'(s) - f'_u(s, y_0(s)) y(s)| e^{\alpha s} \leqslant \\ &\leqslant \|y\| + \frac{M}{\alpha} \|y\| + (M+1) \|y\| = L \|y\|, \end{aligned}$$

так что $z = U(y) \in D_n^\alpha$ и $\|z\| \leqslant L \|y\|$.

Рассмотрим теперь, как и в предыдущих теоремах, элемент

$$\begin{aligned} v_\tau &= \frac{P(y_0 + \tau y) - P(y_0)}{\tau} - U(y), \quad v_\tau(s) = \int_0^s J_\tau(t) dt, \\ J_\tau(t) &= \frac{f(t, y_0(t) + \tau y(t)) - f(t, y_0(t))}{\tau} - f'_u(t, y_0(t)) y(t). \end{aligned}$$

Применяя формулу конечных приращений к подынтегральному выражению, получим

$$|J_\tau(t)| \leqslant \sup_{0 < \theta < 1} |f'_u(t, y_0(t) + \theta \tau y(t)) - f'_u(t, y_0(t))| |y(t)|.$$

Отсюда в силу равномерной непрерывности $f'_u(t, u)$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при достаточно малом τ равномерно относительно y с $\|y\| = 1$

$$|J_\tau(t)| \leqslant \varepsilon e^{-\alpha t}$$

и, следовательно,

$$\sup |v_\tau(s)| \leqslant \varepsilon / \alpha.$$

Аналогично, при тех же τ , будет

$$\sup |v'_\tau(s) e^{\alpha s}| \leqslant \varepsilon,$$

так что

$$\|v_\tau\| \leqslant \varepsilon(1/\alpha + 1).$$

Итак, $v_\tau \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ равномерно относительно $y \in C_n^\alpha$ с $\|y\| = 1$, что и требовалось доказать.

§ 4. Теорема о неявной функции

4.1. Пусть X и Y — два B -пространства. Образует множество $X \times Y$ всевозможных пар (x, y) ($x \in X, y \in Y$). Множество $X \times Y$, естественным образом линейризованное, становится B -пространством, если ввести в нем норму, полагая, например,

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Это B -пространство называется *прямым произведением* пространств X и Y (ср. IV.1.8).

Отождествляя пары вида $(x, 0_Y)$ ($x \in X$, 0_Y — нулевой элемент пространства Y) с элементами пространства X , можем считать, что X и аналогично Y являются подпространствами прямого произведения $X \times Y$. При этом каждый элемент $u = (x, y) \in X \times Y$ может быть единственным образом представлен в форме

$$u = (x, y) = (x, 0_Y) + (0_X, y) = x + y.$$

Каждый линейный оператор $U \in B(X \times Y, Z)$ индуцирует пару (U_X, U_Y) линейных операторов $U_X \in B(X, Z)$, $U_Y \in B(Y, Z)$:

$$U_X(x) = U((x, 0_Y)), \quad U_Y(y) = U((0_X, y)).$$

Наоборот, если имеется пара операторов (U_X, U_Y) , то оператор U :

$$U((x, y)) = U_X(x) + U_Y(y)$$

будет непрерывным линейным оператором из пространства $X \times Y$ в Z .

Пусть теперь P — нелинейный оператор, отображающий множество $\Omega \subset X \times Y$ в B -пространство Z . Фиксируя $y_0 \in Y$, рассмотрим оператор

$$P^{(y_0)} = P(\cdot, y_0),$$

который отображает множество $\Omega^{(y_0)}$ тех $x \in X$, для которых $(x, y_0) \in \Omega$ («сечение» множества Ω), в Z . Подобным же образом определяется оператор $P^{(x_0)}(x_0 \in X)$, отображающий $\Omega^{(x_0)} \subset Y$ в Z .

Если $x_0 \in X$ — внутренняя точка множества $\Omega^{(y_0)}$, то можно говорить о производной $P^{(y_0)'}(x_0)$. Эта производная называется *частной производной по x* оператора P в точке (x_0, y_0) и обозначается $P'_x(x_0, y_0)$. Аналогично вводится частная производная по y : $P'_y(x_0, y_0)$. Очевидно,

$$P'_x(x_0, y_0) \in B(X, Z), \quad P'_y(x_0, y_0) \in B(Y, Z).$$

Если оператор P имеет в точке $(x_0, y_0) \in \Omega$ производную $P'(x_0, y_0) = U$, то $P'_x(x_0, y_0) = U_X$ и $P'_y(x_0, y_0) = U_Y$; это обстоятельство оправдывает введенные обозначения частных производных.

Оператор P можно рассматривать как абстрактную «функцию двух переменных», что мы и будем отображать в обозначениях, записывая $P(x, y)$ вместо $P((x, y))$. На такие «функции» без труда распространяются основные положения элементарной теории функций многих переменных. Отметим, в частности, один из таких фактов.

Предположим, что производные P'_x и P'_y существуют в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \in \Omega$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0) - \\ & \quad - P'_x(x_0, y_0)(\Delta x) - P'_y(x_0, y_0)(\Delta y)\| \leq \\ & \leq \sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - P'_x(x_0, y_0)\| \|\Delta x\| + \\ & \quad + \sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_y(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - P'_y(x_0, y_0)\| \|\Delta y\|. \quad (1) \end{aligned}$$

Действительно, очевидно,

$$\begin{aligned} A &= \|P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0) - \\ & \quad - P'_x(x_0, y_0)(\Delta x) - P'_y(x_0, y_0)(\Delta y)\| \leq \\ & \leq \|P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0 + \Delta y) - P'_x(x_0, y_0)(\Delta x)\| + \\ & \quad + \|P(x_0, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0) - P'_y(x_0, y_0)(\Delta y)\|. \end{aligned}$$

Применяя к каждому слагаемому формулу конечных приращений (см. (8), § 1), получим

$$\begin{aligned} A &\leq \sup_{0 < \theta < 1} \|P'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) - P'_x(x_0, y_0)\| \|\Delta x\| + \\ & \quad + \sup_{0 < \theta_1 < 1} \|P'_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y) - P'_y(x_0, y_0)\| \|\Delta y\| \leq \\ & \leq \sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - P'_x(x_0, y_0)\| \|\Delta x\| + \\ & \quad + \sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_y(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - P'_y(x_0, y_0)\| \|\Delta y\|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

4.2. Основной результат этого параграфа относится к вопросу о существовании решения уравнения

$$P(x, y) = 0,$$

т. е. о существовании неявной функции, определяемой этим уравнением. Как и в элементарном анализе, справедлива

Теорема 1. Пусть оператор P задан в окрестности Ω точки $(x_0, y_0) \in X \times Y$, отображает ее в пространство Z и непрерывен в точке (x_0, y_0) . Если, кроме того, выполнены условия:

- 1) $P(x_0, y_0) = 0$;
- 2) в Ω существует P'_y , непрерывная в точке (x_0, y_0) ;
- 3) оператор $P'_y(x_0, y_0) \in B(Y, Z)$ имеет непрерывный обратный

$$\Gamma = [P'_y(x_0, y_0)]^{-1} \in B(Z, Y),$$

то существует оператор F , заданный в некоторой окрестности $G \subset X$ точки x_0 , переводящий эту окрестность в пространство Y и обладающий свойствами:

$$a) P(x, F(x)) = 0 \quad (x \in G);$$

$$b) F(x_0) = y_0;$$

c) F непрерывен в точке x_0 .

Оператор F определяется свойствами а) — с) однозначно в том смысле, что если F_1 — другой оператор, обладающий этими свойствами, то существует такое $\eta > 0$, что для $\|x - x_0\| < \eta$

$$F_1(x) = F(x).$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $x_0 = 0_X$, $y_0 = 0_Y$. Возьмем $x \in X$ настолько малым, чтобы $0_Y \in \Omega^{(x)}$, где, как и выше, $\Omega^{(x)}$ означает совокупность элементов $y \in Y$ таких, что $(x, y) \in \Omega$, и рассмотрим определенный на $\Omega^{(x)}$ оператор

$$Q^{(x)}(y) = y - GP(x, y).$$

Докажем, что, каково бы ни было достаточно малое число $\varepsilon > 0$, можно указать такое $\delta > 0$, что при $\|x\| < \delta$ оператор $Q^{(x)}$ переводит шар $\|y\| \leq \varepsilon$ в себя. С этой целью найдем и оценим производную оператора $Q^{(x)}$. Согласно предложениям III и V из 1.2

$$Q^{(x)'}(\bar{y})(y) = y - GP'_v(x, \bar{y})(y) = -G[P'_v(x, \bar{y}) - P'_v(0, 0)](y)$$

и, следовательно,

$$\|Q^{(x)'}(\bar{y})\| \leq \|G\| \|P'_v(x, \bar{y}) - P'_v(0, 0)\|.$$

В силу предположенной непрерывности оператора P'_v в точке $(0, 0)$ второй множитель здесь может быть сделан сколь угодно малым, так что за счет выбора достаточно малых ε и δ можно добиться того, что

$$\|Q^{(x)'}(\bar{y})\| \leq \alpha < 1, \quad \|x\| < \delta, \quad \|\bar{y}\| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Оценим еще $Q^{(x)}(0)$. Принимая во внимание условие 1), будем иметь

$$\|Q^{(x)}(0)\| = \|GP(x, 0)\| \leq \|G\| \|P(x, 0) - P(0, 0)\|$$

и, значит, учитывая непрерывность оператора P в точке $(0, 0)$, можно за счет уменьшения δ сделать правую часть написанного неравенства сколь угодно малой. Будем считать, что δ , если это необходимо, уже уменьшено настолько, что

$$\|Q^{(x)}(0)\| \leq \varepsilon(1 - \alpha), \quad \|x\| < \delta. \quad (3)$$

Теперь высказанное выше утверждение легко доказывается с помощью формулы конечных приращений. Действительно, если

$\|x\| < \delta$, $\|y\| < \varepsilon$, то согласно (2) и (3)

$$\begin{aligned} \|Q^{(x)}(y)\| &\leq \|Q^{(x)}(0)\| + \|Q^{(x)}(y) - Q^{(x)}(0)\| \leq \\ &\leq \varepsilon(1 - \alpha) + \sup_{0 < \theta < 1} \|Q^{(x)'}(\theta y)\| \|y\| \leq \varepsilon(1 - \alpha) + \alpha\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, оператор $Q^{(x)}$ переводит замкнутый шар $\|y\| \leq \varepsilon$ в себя, причем для производной $Q^{(x)'}(y)$ справедливо соотношение (2). Тем самым выполнены условия теоремы 1.1 и, следовательно, в упомянутом шаре существует единственная неподвижная точка $y^* = F(x)$ этого оператора:

$$y^* = y^* - \Gamma P(x, y^*),$$

т. е.

$$P(x, y^*) = 0.$$

Оператор F — требуемый. Действительно, а) уже проверено. Справедливость б) вытекает из условия 1), которое можно записать в форме $Q_0(0) = 0$, и единственности неподвижной точки оператора Q_0 . Наконец, с) следует из того, что выбор величины ε неограничен снизу, и поэтому ее можно взять сколь угодно малой.

Докажем единственность F . В шаре $\|y\| \leq \varepsilon$ неподвижная точка оператора $Q^{(x)}$ ($\|x\| < \delta$) единственная, а ввиду непрерывности оператора F , для достаточно малых η будет

$$\|F_1(x)\| = \|F_1(x) - F_1(0)\| \leq \varepsilon, \quad \|x\| < \eta,$$

так что для этих x имеет место совпадение $F_1(x) = F(x)$.

Теорема 2. Если в теореме 1 предположить непрерывность оператора P в каждой точке Ω , то оператор F будет непрерывным в некоторой окрестности точки x_0 .

Доказательство. В рассматриваемом случае к оператору $Q^{(x)}$ применима теорема XVI.1.3. Действительно, оператор $Q^{(x)}$ ($\|x\| < \delta$) преобразует шар $\|y\| \leq \varepsilon$ в себя, а неравенство (2) обеспечивает то, что $Q^{(x)}$ является оператором сжатия (равномерно относительно $x \in X$ с $\|x\| < \delta$). Непрерывность $Q^{(x)}$ по параметру (его роль играет в данном случае x) следует из непрерывности оператора P .

Применяя указанную теорему, получаем, что $y^* = F(x)$ непрерывно зависит от x для $\|x\| < \delta$.

Замечание. Теоремы 1 и 2 имеют локальный характер. Кроме того, в них не указывается эффективный способ оценки величины ε в зависимости от δ . Этот недостаток будет восполнен в следующей главе, где с привлечением второй производной устанавливаются более точные результаты.

Кое-что в этом направлении может быть сделано уже с помощью сформулированной ниже теоремы 3.

4.3. Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, в Ω существует частная производная P'_{x_i} непрерывная

в точке (x_0, y_0) . Тогда оператор F дифференцируем в точке x_0 , причем

$$F'(x_0) = U,$$

где

$$U = -\Gamma P'_x(x_0, y_0) = -[P'_y(x_0, y_0)]^{-1} P'_x(x_0, y_0). \quad (4)$$

Доказательство. Будем, как и при доказательстве теоремы 1, считать, что $x_0 = 0, y_0 = 0$.

Согласно 1.1 надо доказать, что по произвольному $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что для любого $x \in X$ с $\|x\| < \delta$

$$\|F(x) - F(0) - U(x)\| \leq \varepsilon \|x\|,$$

т. е., поскольку $F(0) = 0$,

$$\|F(x) - U(x)\| \leq \varepsilon \|x\|. \quad (5)$$

Полагая $F(x) = y$ и заменяя U его выражением (4), перепишем выражение, стоящее в левой части (5) под знаком нормы, в виде

$$F(x) - U(x) = y + \Gamma P'_x(0, 0)x = \Gamma [P'_x(0, 0)x + P'_y(0, 0)y].$$

Но $P(x, y) = P(0, 0) = 0$, поэтому согласно неравенству (1)

$$\begin{aligned} \|F(x) - U(x)\| &\leq \\ &\leq \|\Gamma\| \|P(x, y) - P(0, 0) - P'_x(0, 0)x - P'_y(0, 0)y\| \leq \\ &\leq \|\Gamma\| \left[\sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_x(\theta x, \theta_1 y) - P'_x(0, 0)\| \|x\| + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_y(\theta x, \theta_1 y) - P'_y(0, 0)\| \|y\| \right] \leq \eta [\|x\| + \|y\|], \end{aligned}$$

причем вследствие непрерывности частных производных P'_x и P'_y величина η может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно малого δ . Таким образом,

$$\|F(x) - U(x)\| \leq \eta [\|x\| + \|F(x)\|] \leq \eta [\|x\| + \|U(x)\| + \|F(x) - U(x)\|].$$

Отсюда, если только η достаточно мало,

$$\|F(x) - U(x)\| \leq \eta \frac{1 + \|U\|}{1 - \eta} \|x\|,$$

и, следовательно, если η подобрать так, чтобы

$$\eta \frac{1 + \|U\|}{1 - \eta} \leq \varepsilon,$$

то для всех достаточно малых x будет выполняться (5), что и требовалось доказать.

4.4. В заключение параграфа приведем один пример применения теоремы 1.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$y'_k(s) = f_k(s, y_k(s)), \quad t, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

которую, как и в XVII.3.3, будем записывать в форме

$$y(s) = y(0) + \int_0^s f(t, y(t)) dt. \quad (7)$$

Предположим, что $f(t, 0) = 0$ ($t \geq 0$). Тогда система (6), или, иначе, уравнение (7), имеет тривиальное решение — тождественно равное нулю. Это решение отвечает начальным условиям $y(0) = 0$.

Возникает вопрос, имеющий большое практическое значение: при каких условиях уравнение (7) имеет решение с достаточно малыми начальными данными, определенное на $[0, \infty)$, и, главное, когда близость к нулю начальных данных влечет близость решения к нулю на всей полупрямой $[0, \infty)$? Дадим точные определения.

Пусть по каждому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что как только вектор x имеет норму, меньшую δ , так уравнение

$$y(s) = x + \int_0^s f(t, y(t)) dt \quad (9)$$

имеет единственно ограниченное решение y^* , причем

$$\sup_{s \geq 0} |y^*(s)| \leq \varepsilon.$$

Тогда говорят, что нулевое решение уравнения (7) *устойчиво*. Если, кроме того, $y^*(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$, то нулевое решение называется *асимптотически устойчивым*.

Прежде чем рассматривать достаточные условия устойчивости, введем одно вспомогательное понятие.

Пусть T — квадратная матрица n -го порядка. Образует ряд

$$E + \frac{1}{1!} T + \frac{1}{2!} T^2 + \dots + \frac{1}{n!} T^n + \dots,$$

где E — единичная матрица. Так как $|T^k| \leq |T|^k$ ($k = 0, 1, \dots$), то написанный ряд сходится, какова бы ни была матрица T . Сумма его обозначается e^T .

Если x_0 — некоторый фиксированный вектор, то вектор-функция

$$u(s) = e^{sT} x_0, \quad s \geq 0,$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u'(s) = Tu(s), \quad (9)$$

в чем можно убедиться точно так же, как и в случае обычных вещественных функций. Указанное обстоятельство используется в доказательстве следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots$ — собственные значения матрицы T . Тогда элементы матрицы e^{sT} имеют вид $\sum_k p_k(s) e^{s\mu_k}$, где

p_k — полиномы степени не выше n .

Таким образом, если $\mu = \max_k \operatorname{Re} \mu_k$, то норма матрицы e^{sT} может быть оценена следующим образом:

$$|e^{sT}| \leq K_{\eta} e^{(\mu+\eta)s}, \quad (10)$$

где $\eta > 0$ произвольное.

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из элементарных фактов теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, если учесть, что согласно сделанному выше замечанию столбцы матрицы e^{sT} образуют полную линейно независимую систему решений уравнения (9), которое является по существу системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами *).

Так как норма матрицы оценивается корнем квадратным из суммы квадратов элементов, то из сказанного сразу же вытекает и (10).

Возвратимся теперь к уравнению (7). Пусть, как и в 3.3, вектор-функция $f(t, u)$ задана в области G $(n+1)$ -мерного пространства ($t \geq 0$, $|u| \leq re^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$), непрерывна по u при $u=0$ и имеет непрерывную по u при $u=0$ производную $f'_u(t, u)$. Предположим, что матрица $A = f'_u(t, 0)$ не зависит от t , и обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ее собственные значения.

Теорема 4. Если

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то нулевое решение уравнения (7) асимптотически устойчиво. Точнее говоря, справедлива оценка

$$|y^*(s)| \leq L_x e^{-\alpha s}, \quad s \geq 0,$$

где константа L_x зависит только от x и стремится к нулю при $x \rightarrow 0$, а $\alpha > 0$ такое, что $\operatorname{Re} \lambda_k < -\alpha$ ($k = 1, 2, \dots$).

Доказательство. Основываясь на теореме 1, положим в ней $X = l_n^2$, $Y = C_n^{\alpha}$, $Z = D_n^{\alpha}$, а оператор P определим следующим образом:

$$z = P(x, y), \quad z(s) = y(s) - x - \int_0^s f(t, y(t)) dt,$$

*) См. Степанов [4], с. 214.

причем за Ω примем множество точек $(x, y) \in X \times Y$ с произвольным $x \in X$ и $\|y\| < r$.

Учитывая результат теоремы 3.3, мы сразу убеждаемся, что первые два условия теоремы 1 выполнены. Наличие условия 3) проверяется сложнее. Прежде всего, согласно теореме 3.3 производная $P'_Y(0, 0) = U$ существует и имеет вид

$$z = U(y), \quad z(s) = y(s) - \int_0^s Ay(t) dt,$$

и, следовательно, требуется доказать, что оператор U допускает непрерывное обращение. Поскольку пространства C_n^α и D_n^α полные, то для этого достаточно доказать, что оператор U осуществляет взаимно однозначное соответствие между C_n^α и D_n^α (см. XII.1.3), т. е. что при любом $\tilde{z} \in D_n^\alpha$ существует единственный элемент $\tilde{y} \in C_n^\alpha$ такой, что $\tilde{z} = U(\tilde{y})$. Иначе говоря, надо доказать, что уравнение

$$\tilde{z}(s) = y(s) - \int_0^s Ay(t) dt \quad (11)$$

имеет единственное решение в C_n^α .

Как это следует из элементарных фактов теории дифференциальных уравнений, решение $\tilde{y}$ уравнения (11) всегда существует, единственно и имеет вид

$$\tilde{y}(s) = \int_0^s e^{(s-t)A} \tilde{z}'(t) dt + e^{sA} z(0).$$

Следовательно, взяв число σ так, что

$$\alpha < \sigma < -\max_k \operatorname{Re} \lambda_{k\alpha}$$

на основании оценки (10) будем иметь

$$\begin{aligned} |\tilde{y}(s)| &\leq K \left[\int_0^s e^{-(s-t)\sigma} |\tilde{z}'(t)| dt + e^{-s\sigma} |\tilde{z}(0)| \right] \leq \\ &\leq K \left[e^{-s\sigma} \int_0^s e^{(\sigma-\alpha)t} \|\tilde{z}\| dt + e^{-s\sigma} \|\tilde{z}\| \right] = K \|\tilde{z}\| e^{-s\sigma} \left[\frac{e^{(\sigma-\alpha)s} - 1}{\sigma - \alpha} + 1 \right] = \\ &= K \|\tilde{z}\| e^{-\alpha s} \left[\frac{1 - e^{(\alpha-\sigma)s}}{\sigma - \alpha} + e^{(\alpha-\sigma)s} \right] \leq K_1 \|\tilde{z}\| e^{-\alpha s}, \end{aligned}$$

так что

$$\sup |\tilde{y}(s) e^{\alpha s}| \leq K_1 \|\tilde{z}\| < \infty. \quad (12)$$

Так как

$$\tilde{y}'(s) = \tilde{z}'(s) - A\tilde{y}(s),$$

то

$$\sup |\tilde{y}'(s) e^{\alpha s}| \leq \sup |\tilde{z}'(s) e^{\alpha s}| + |A| \sup |\tilde{y}(s) e^{\alpha s}| \leq \\ \leq (1 + K_1 |A|) \|\tilde{z}\| < \infty. \quad (13)$$

Итак, сопоставляя (12) и (13), заключаем, что $\tilde{y} \in C_n^\alpha$ и условия теоремы 1 проверены полностью.

На основании доказанного можно, таким образом, утверждать, что уравнение $P(x, y) = 0$, т. е. уравнение (8) имеет единственное решение $y^* = F(x) \in C_n^\alpha$, если только начальный вектор x достаточно мал. Имеем, далее,

$$|y^*(s)| \leq \|F(x)\| e^{-\alpha s},$$

причем по непрерывности оператора F будет $\|F(x)\| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Теорема доказана.

Г л а в а XVIII

МЕТОД НЬЮТОНА

В этой главе развивается подробная теория метода решения функциональных уравнений, который в случае вещественных уравнений известен под названием метода Ньютона, или метода касательных. Этот метод и некоторая его модификация являются в настоящее время одними из немногих, применяемых на практике для фактического нахождения решения нелинейного функционального уравнения.

Должно быть отмечено и теоретическое значение метода, так как с его помощью можно делать заключения о существовании, единственности и области расположения решения уравнения, не находя самого решения, что подчас не менее важно, чем фактическое знание решения.

Результаты этой главы принадлежат главным образом Л. В. Канторовичу (см. Канторович [9]). Изложение следует статье Канторовича [12].

§ 1. Уравнения вида $P(x) = 0$

1.1. Пусть имеется оператор P , переводящий открытое множество Ω одного B -пространства X в другое B -пространство Y . Предположим, что в Ω имеется нуль оператора P , т. е. такой элемент x^* , что

$$P(x^*) = 0.$$

Возьмем произвольный элемент $x_0 \in \Omega$. Предполагая, что оператор P имеет в Ω непрерывную производную, можно заменить элемент $P(x_0) = P(x_0) - P(x^*)$ близким ему выражением $P'(x_0)(x_0 - x^*)$ и, следовательно, есть основания считать, что решение уравнения

$$P'(x_0)(x_0 - x) = P(x_0)$$

будет близко к x^* . Но написанное уравнение линейное, и его решение нетрудно найти. Это будет

$$x_1 = x_0 - [P'(x_0)]^{-1}(P(x_0))$$

(само собой разумеется, что существование оператора $[P'(x_0)]^{-1}$ предполагается).

Продолжая этот процесс, мы получим, исходя из x_0 — начального приближения, — последовательность $\{x_n\}$:

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1}(P(x_n)), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Каждое x_n является приближенным решением уравнения

$$P(x) = 0, \quad (2)$$

тем более точным, вообще говоря, чем больше n .

Способ образования последовательности $\{x_n\}$ и называется *методом Ньютона* *).

Ясно, что метод Ньютона не всегда осуществим. Во-первых, x_n может при некотором n выйти за пределы множества Ω , а во-вторых, если даже этого не случится, то может не существовать $[P'(x_n)]^{-1}$.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню x^* и x_0 выбрано достаточно близко к x^* , то по непрерывности оператора P' операторы $P'(x_n)$ и $P'(x_0)$ будут мало отличаться. Это дает основание ввести вместо формул (1) упрощенные:

$$x'_{n+1} = x'_n - [P'(x_0)]^{-1}(P(x'_n)), \quad n = 0, 1, \dots; \quad x'_0 = x_0, \quad (3)$$

которые хотя и дают, вообще говоря, худшие приближения, но зато значительно проще формул (1).

Способ образования последовательности $\{x'_n\}$ мы будем называть *модифицированным методом Ньютона* **).

Ниже подробно исследуются условия осуществимости метода Ньютона (основного и модифицированного) и его сходимости, т. е. сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ к решению рассматриваемого уравнения (2).

Отметим, что метод Ньютона для уравнения (2) совпадает с обычным методом последовательных приближений, примененным к уравнению

$$x = x - \Gamma(x)(P(x)), \quad \Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}, \quad (4)$$

которое, очевидно, равносильно данному.

Точно так же модифицированный метод Ньютона означает метод последовательных приближений применительно к уравнению

$$x = x - \Gamma(x_0)(P(x)). \quad (5)$$

*) Если оператор P — вещественная функция вещественного аргумента, то формулу (1) можно записать так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

что и приводит к методу Ньютона в собственном смысле слова.

**) Оба приведенных метода часто называют методами Ньютона — Канторовича. (Прим. ред.)

В связи с отмеченным обстоятельством мы предварительно и займемся исследованием обычного метода последовательных приближений.

1.2. Рассмотрим уравнение

$$x = S(x), \quad (6)$$

где S — оператор, определенный в шаре $\|x - x_0\| < R$ некоторого B -пространства X ($x_0 \in X$). Наряду с уравнением (6) рассмотрим вещественное уравнение

$$t = \varphi(t), \quad (7)$$

где функция φ определена в промежутке $[t_0, t']$ ($t' = t_0 + r < t_0 + R$). Будем говорить, что уравнение (7) (или функция φ) мажорирует уравнение (6) (или оператор S), если:

- 1) $\|S(x_0) - x_0\| \leq \varphi(t_0) - t_0$;
 - 2) $\|S'(x)\| \leq \varphi'(t)$, если $\|x - x_0\| \leq t - t_0$.
- (8)

Теорема 1. Пусть оператор S имеет непрерывную производную в замкнутом шаре Ω_0 ($\|x - x_0\| \leq r$), а функция φ дифференцируема в промежутке $[t_0, t']$. Тогда, если уравнение (7) мажорирует уравнение (6) и уравнение (7) имеет в промежутке $[t_0, t']$ корень, то уравнение (6) также имеет решение x^* , к которому сходится последовательность $\{x_n\}$:

$$x_{n+1} = S(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

последовательных приближений, начатая с x_0 . При этом

$$\|x^* - x_0\| \leq t^* - t_0, \quad (10)$$

где через t^* обозначен наименьший корень уравнения (7) на $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Докажем сначала, что последовательные приближения для уравнения (7)

$$t_{n+1} = \varphi(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

образуют сходящуюся последовательность. С этой целью отметим, что из условия 2) вытекает неравенство

$$\varphi'(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t'],$$

так что функция φ возрастает в промежутке $[t_0, t']$. Отсюда следует, что t_n имеет смысл для любого n и, более того, что

$$t_n \leq \bar{t}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

где через $\bar{t}$ обозначен корень уравнения (7), существование которого предположено в теореме.

Действительно, при $n = 0$ неравенство (12) не вызывает сомнений, и если оно уже доказано для $n = k$, то из $t_k \leq \bar{t}$ вследствие

монотонности φ получаем $\varphi(t_k) \leq \varphi(\bar{t})$, т. е. $t_{k+1} \leq \bar{t}$ и по индукции неравенство оправдано для всех n .

Также, используя монотонность φ , по индукции можно доказать монотонность последовательности $\{t_n\}$. В самом деле, из $t_n \leq t_{n+1}$ вытекает $t_{n+1} = \varphi(t_n) \leq \varphi(t_{n+1}) = t_{n+2}$, неравенство же $t_0 \leq t_1$ есть следствие условия 1).

Таким образом, установлено существование предела $t^* = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$, который по (11) в силу непрерывности φ оказывается корнем уравнения (7) и, как это следует из (12), наименьшим в промежутке $[t_0, t']$.

Докажем теперь, что все элементы (9) имеют смысл и образуют сходящуюся последовательность. Прежде всего, переписывая (8) в форме

$$\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0,$$

замечаем, что $x_1 \in \Omega_0$. Пусть уже доказано, что $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega_0$ и что

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq t_{k+1} - t_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (13)$$

Тогда в соответствии с результатами из XVII.1.7 будем иметь

$$x_{n+1} - x_n = S(x_n) - S(x_{n-1}) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} S'(x) dx.$$

Если через x и t обозначить соответствующие точки отрезка $[x_{n-1}, x_n]$ и промежутка $[t_{n-1}, t_n]$, т. е.

$$x = x_{n-1} + \tau(x_n - x_{n-1}), \quad t = t_{n-1} + \tau(t_n - t_{n-1}), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

то вследствие (13)

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &\leq \tau \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \dots + \|x_1 - x_0\| \leq \\ &\leq \tau(t_n - t_{n-1}) + (t_{n-1} - t_{n-2}) + \dots + (t_1 - t_0) = t - t_0. \end{aligned}$$

Поэтому согласно условию 2)

$$\|S'(x)\| \leq \varphi'(t).$$

Отсюда, пользуясь замечанием из XVII.1.7, находим

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \left\| \int_{x_{n-1}}^{x_n} S'(x) dx \right\| \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \varphi'(t) dt = \varphi(t_n) - \varphi(t_{n-1}) = \\ &= t_{n+1} - t_n. \end{aligned}$$

Итак, (13) доказано для $k = n$. Вместе с тем доказано, что $x_{n+1} \in \Omega_0$, так как

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_0\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \dots + \|x_1 - x_0\| \leq \\ &\leq (t_{n+1} - t_n) + (t_n - t_{n-1}) + \dots + (t_1 - t_0) = t_{n+1} - t_0 \leq t' - t_0 = r. \end{aligned}$$

Таким образом, по индукции установлено для всех $k = 0, 1, \dots$ включение $x_k \in \Omega_0$ и оценка (13).

Далее, поскольку в силу (13)

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq (t_{n+p} - t_{n+p-1}) + \dots + (t_{n+1} - t_n) = t_{n+p} - t_n, \end{aligned} \quad (14)$$

то последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе и, значит, имеет предел. Обозначим $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Переходя к пределу в (9) и учитывая непрерывность оператора S , получим

$$x^* = S(x^*),$$

т. е. x^* — корень уравнения (6).

Оценка (10) вытекает из (14), если положить $n = 0$ и перейти к пределу при $p \rightarrow \infty$.

Замечание 1. Неравенство

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (15)$$

которое получается из (14) предельным переходом при $p \rightarrow \infty$, дает оценку быстроты сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x^* .

Замечание 2. В доказательстве теоремы условие 2) использовалось не в полном объеме. Для доказательства была необходима справедливость неравенства $\|S'(x)\| \leq \varphi'(t)$ только в соответствующих точках отрезков $[x_{n-1}, x_n]$ и $[t_{n-1}, t_n]$ ($n = 1, 2, \dots$).

Уравнение (6) может иметь в шаре Ω_0 еще и другие, отличные от x^* корни, даже если решение t^* мажорантного уравнения (7) единственно в промежутке $[t_0, t']$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и, кроме того,

$$\varphi(t') \leq t'.$$

Тогда, если уравнение (7) имеет в промежутке $[t_0, t']$ единственное решение, то в шаре Ω_0 корень x^* уравнения (6) единствен и к нему сходится процесс последовательных приближений, начатый с любого $\tilde{x}_0 \in \Omega_0$.

Доказательство. Применим к уравнению (7) метод последовательных приближений, взяв в качестве начального приближения $\tilde{t}_0 = t'$. Буквально так же, как и в теореме 1, доказывается, что последовательность

$$\tilde{t}_{n+1} = \varphi(\tilde{t}_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

монотонно убывает и ограничена снизу ($\tilde{t}_n \geq t^*$), а потому имеет предел, равный $\tilde{t}$, причем $\tilde{t}$, являясь корнем уравнения (7), должен совпадать с t^* ($\tilde{t} = t^*$).

Докажем теперь, что процесс последовательных приближений для уравнения (6), с какого бы элемента $\tilde{x}_0 \in \Omega_0$ его ни начать, сходится и дает, следовательно, корень уравнения (6). Последо-

вательные приближения будут иметь вид

$$\tilde{x}_{n+1} = S(\tilde{x}_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Имеем

$$\tilde{x}_1 - x_1 = S(\tilde{x}_0) - S(x_0) = \int_{x_0}^{\tilde{x}_0} S'(x) dx$$

и, снова применяя замечание из XVII.1.7, получим

$$\|\tilde{x}_1 - x_1\| \leq \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \varphi'(t) dt = \varphi(\tilde{t}_0) - \varphi(t_0) = \tilde{t}_1 - t_1.$$

Отсюда ясно, что

$$\|\tilde{x}_1 - x_0\| \leq \|\tilde{x}_1 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq (\tilde{t}_1 - t_1) + (t_1 - t_0) = \tilde{t}_1 - t_0 \leq r$$

и, значит, $\tilde{x}_1 \in \Omega_0$.

Пусть уже доказано, что

$$\tilde{x}_k \in \Omega_0, \quad \|\tilde{x}_k - x_k\| \leq \tilde{t}_k - t_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Тогда

$$\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1} = S(\tilde{x}_n) - S(x_n) = \int_{x_n}^{\tilde{x}_n} S'(x) dx.$$

Но если x и t — соответствующие точки отрезка $[x_n, \tilde{x}_n]$ и промежутка $[t_n, \tilde{t}_n]$,

$$x = x_n + \tau(\tilde{x}_n - x_n), \quad t = t_n + \tau(\tilde{t}_n - t_n), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

то

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &\leq \tau \|\tilde{x}_n - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \dots + \|x_1 - x_0\| \leq \\ &\leq \tau(\tilde{t}_n - t_n) + (t_n - t_{n-1}) + \dots + (t_1 - t_0) = t - t_0, \end{aligned}$$

и поэтому для указанных x и t будет $\|S'(x)\| \leq \varphi'(t)$ и

$$\|\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1}\| \leq \int_{t_n}^{\tilde{t}_n} \varphi'(t) dt = \varphi(\tilde{t}_n) - \varphi(t_n) = \tilde{t}_{n+1} - t_{n+1},$$

а тогда

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_{n+1} - x_0\| &\leq \|\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_0\| \leq \\ &\leq (\tilde{t}_{n+1} - t_{n+1}) + (t_{n+1} - t_0) = \tilde{t}_{n+1} - t_0 \leq r, \end{aligned}$$

и, следовательно, $\tilde{x}_{n+1} \in \Omega_0$.

По индукции заключаем, что (16) справедливо для всех $k = 1, 2, \dots$

Поскольку последовательности $\{t_n\}$ и $\{\tilde{t}_n\}$ имеют общий предел (равный t^*), то из сходимости последовательности $\{x_n\}$ след-

ствие (16) вытекает сходимость последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ и равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*. \quad (17)$$

Итак, доказано, что, какое бы начальное приближение $\tilde{x}_0 \in \Omega_0$ ни взять, процесс последовательных приближений сходится к x^* . Отсюда вытекает единственность решения уравнения (6). Действительно, если $\tilde{x} \in \Omega_0$ — корень этого уравнения, то, взяв $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$, получим, очевидно, при любом $n = 1, 2, \dots$

$$\tilde{x}_n = \tilde{x},$$

а ввиду (17) $\tilde{x} = x^*$, что и требовалось доказать.

1.3. Перейдем к исследованию метода Ньютона для уравнения (2). Вместе с уравнением (2) рассмотрим вещественное уравнение

$$\psi(t) = 0. \quad (18)$$

Будем считать, что оператор P определен в шаре Ω ($\|x - x_0\| < R$) пространства X и имеет в замкнутом шаре Ω_0 ($\|x - x_0\| \leq r$) непрерывную вторую производную. Функцию ψ будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемой в промежутке $[t_0, t']$ ($t' = t_0 + r$).

С помощью теоремы 1 легко получить следующий результат о сходимости модифицированного метода Ньютона.

Теорема 3. Пусть выполнены условия:

1) существует непрерывный линейный оператор $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$;

2) $c_0 = -\frac{1}{\psi'(t_0)} > 0$;

3) $\|\Gamma_0(P(x_0))\| \leq c_0\psi(t_0)$;

4) $\|\Gamma_0 P''(x)\| \leq c_0\psi''(t)$, если $\|x - x_0\| \leq t - t_0 \leq r$;

5) уравнение (18) имеет в промежутке $[t_0, t']$ корень $\tilde{t}$.

Тогда модифицированный процесс Ньютона для уравнений (2) и (18), начатый соответственно с x_0 и t_0 , сходится и приводит к решениям этих уравнений x^* и t^* , причем

$$\|x^* - x_0\| \leq t^* - t_0. \quad (19)$$

Доказательство. Выше было отмечено, что модифицированный метод Ньютона для уравнения (2) равносильен методу последовательных приближений для уравнения (5), т. е. для уравнения

$$x = S(x), \quad S(x) = x - \Gamma_0(P(x)). \quad (20)$$

Аналогично, модифицированный процесс Ньютона для уравнения (18) может быть заменен процессом последовательных приближений для уравнения

$$t = \varphi(t), \quad \varphi(t) = t + c_0\psi(t). \quad (21)$$

Докажем, что для уравнений (20) и (21) выполнены условия теоремы 1. Имеем

$$S(x_0) - x_0 = -\Gamma_0(P(x_0))$$

и, аналогично,

$$\varphi(t_0) - t_0 = c_0\psi(t_0).$$

Таким образом, в силу условия 3)

$$\|S(x_0) - x_0\| \leq \varphi(t_0) - t_0.$$

Далее, используя правила дифференцирования (XVII.1.2), получим

$$S'(x) = I - \Gamma_0 P'(x), \quad S''(x) = -\Gamma_0 P''(x);$$

поэтому

$$S'(x) = S'(x) - S'(x_0) = \int_{x_0}^x S''(x) dx = - \int_{x_0}^x \Gamma_0 P''(x) dx,$$

и, следовательно, на основании замечания из XVII.1.7 и условия 4) найдем

$$\|S'(x)\| \leq \int_{t_0}^t c_0 \psi''(\tau) d\tau = c_0 \psi'(t) - c_0 \psi'(t_0) = 1 + c_0 \psi'(t_0) = \psi'(t),$$

если x и t связаны неравенством $\|x - x_0\| \leq t - t_0$.

Таким образом, уравнение (21) является мажорантным по отношению к уравнению (20), что позволяет применить теорему 1 к этим уравнениям, а это для данных уравнений приводит к доказываемому результату.

Замечание. Как и в теореме 1, быстрота сходимости последовательности $\{x'_n\}$ (см. (3)) к x^* оценивается неравенством

$$\|x^* - x'_n\| \leq t^* - t'_n, \quad n = 0, 1, \dots; \quad x'_0 = x_0; \quad t'_0 = t_0, \quad (22)$$

где t'_n — последовательные приближения модифицированного метода Ньютона для уравнения (18).

Применение теоремы 2 к уравнениям (20) и (21) позволяет сразу же установить факт единственности решения уравнения (2).

Теорема 4. Пусть соблюдены условия теоремы 3 и, кроме того,

$$\psi(t') \leq 0. \quad (23)$$

Тогда, если уравнение (18) имеет в промежутке $[t_0, t']$ единственный корень, то уравнение (2) имеет в шаре Ω_0 только одно решение.

Для доказательства достаточно заметить, что (23) влечет неравенство

$$\varphi(t') = t' + c_0\psi(t') \leq t',$$

т. е. выполнено дополнительное условие теоремы 2.

Замечание. Так как t^* — наименьший корень уравнения (18), то теорема единственности применима, если положить $t' = t^*$. Таким образом, можно гарантировать единственность решения x^* уравнения (2) во всяком случае в шаре

$$\|x - x_0\| \leq t^* - t_0.$$

1.4. Сходимость основного процесса Ньютона устанавливается на основании теоремы 3 о сходимости модифицированного процесса.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда основной процесс Ньютона для уравнения (2), начатый с x_0 , осуществим и приводит к последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к корню x^* уравнения (2).

Доказательство. Первые шаги в модифицированном и основном процессах Ньютона совпадают; поэтому x_1 имеет смысл и $x_1 \in \Omega_0$. Проверим, что условия теоремы 3 не нарушатся, если в ней заменить x_0 на x_1 , а t_0 на t_1 . Сохраняя обозначения теоремы 3, рассмотрим оператор

$$I - \Gamma_0 P'(x_1) = -\Gamma_0 (P'(x_1) - P'(x_0)) = -\int_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x) dx.$$

Используя замечание из XVII.1.7, найдем

$$\|I - \Gamma_0 P'(x_1)\| \leq \int_{t_0}^{t_1} c_0 \psi''(t) dt = 1 + c_0 \psi'(t_1) = q.$$

Так как $\psi''(t) \geq 0$ во всем промежутке $[t_0, t_1]$, а $\psi(t_0) \geq 0$, то минимум функции $\psi(t)$ не может достигаться левее точки t^* . Поскольку $t_1 \leq t^*$ и $\psi'(t_0) < 0$, то $\psi'(t_1) < 0^*$ и, значит, $q < 1$.

По теореме Банаха (V.4.5) существует непрерывный линейный оператор

$$U = [\Gamma_0 P'(x_1)]^{-1} \in B(X, X),$$

причем

$$\|U\| \leq \frac{1}{1-q} = \frac{\psi'(t_0)}{\psi'(t_1)} = \frac{c_1}{c_0}, \quad c_1 = -\frac{1}{\psi'(t_1)}. \quad (24)$$

Следовательно, существует непрерывный линейный оператор

$$\Gamma_1 = [P'(x_1)]^{-1} = U\Gamma_0.$$

) Если $\psi'(t_1) = 0$, то $t_1 = t^$ и $\psi(t_1) = 0$, а тогда

$$0 = \psi(t_1) - \psi(t_0) - \psi'(t_0)(t_1 - t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \psi''(t)(t_1 - t) dt,$$

что возможно лишь при $\psi''(t) = 0$ в промежутке $[t_0, t_1]$, а это в свою очередь приводит к равенству $\psi'(t_0) = \psi'(t_1) = 0$.

Итак, условия 1) и 2) теоремы 3 проверены. Докажем теперь, что

$$\|\Gamma_0(P(x_1))\| \leq c_0 \psi(t_1). \quad (25)$$

По формуле Тейлора (XVII.2.5) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_0(P(x_1)) &= \Gamma_0(P(x_0)) + \Gamma_0 P'(x_0)(x_1 - x_0) + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x)(x_1 - x, \cdot) dx = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_0) + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x)(x_1 - x, \cdot) dx = \int_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x)(x_1 - x, \cdot) dx. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$c_0 \psi(t_1) = c_0 \int_{t_0}^{t_1} \psi''(t)(t_1 - t) dt.$$

Так как для соответствующих точек x и t отрезков $[x_0, x_1]$ и $[t_0, t_1]$ будет

$$\|\Gamma_0 P''(x)(x_1 - x, \cdot)\| \leq \|\Gamma_0 P''(x)\| \|x_1 - x\| \leq c_0 \psi''(t)(t_1 - t),$$

то

$$\left\| \int_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x)(x_1 - x, \cdot) dx \right\| \leq \int_{t_0}^{t_1} c_0 \psi''(t)(t_1 - t) dt,$$

а это и означает (25).

Принимая во внимание (25) и (24), получим

$$\|\Gamma_1 P(x_1)\| = \|U \Gamma_0(P(x_1))\| \leq \|U\| \|\Gamma_0(P(x_1))\| \leq \frac{c_1}{c_0} c_0 \psi(t_1) = c_1 \psi(t_1),$$

т. е. условие 3) также выполнено.

Условие 4) проверяется подобным же образом. Отметим сначала, что если $\|x - x_1\| \leq t - t_1$, то подавно $\|x - x_0\| \leq t - t_0$. Поэтому

$$\|\Gamma_1 P''(x)\| = \|U \Gamma_0 P''(x)\| \leq \|U\| \|\Gamma_0 P''(x)\| \leq \frac{c_1}{c_0} c_0 \psi''(t) = c_1 \psi''(t).$$

Наконец, условие 5) не нарушается, так как корень $\bar{t}$ лежит в промежутке $[t^*, t']$, а следовательно, и в более широком промежутке $[t_1, t']$.

Рассуждая аналогично, покажем, что условия теоремы 3 не нарушатся, если перейти от x_1 и t_1 к x_2 и t_2 и т. д.

Итак, все x_n имеют смысл, т. е. уже доказано, что процесс Ньютона осуществим.

Так как последовательность $\{t_n\}$, очевидно, возрастающая и ограниченная, то она имеет предел $\tilde{t}$, а ввиду неравенства

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

последовательность $\{x_n\}$ также имеет предел $\tilde{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Из (1) получаем соотношение

$$P(x_n) + P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (26)$$

Для произвольного $x \in \Omega_0$ по формуле конечных приращений имеем

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0[P'(x) - P'(x_0)]\| &\leq \\ &\leq \|x - x_0\| \sup_{0 < \theta < 1} \|\Gamma_0 P''(x_0 + \theta(x - x_0))\| \leq r \max_{[t_0, t']} c_0 \psi''(t), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\|P'(x_n)\|$ ограничены в совокупности. Поэтому предельный переход в (26) дает

$$P(\tilde{x}) = 0,$$

т. е. $\tilde{x}$ является корнем уравнения (2).

Равным образом $\tilde{t}$ является корнем уравнения (18), причем так как $\tilde{t} \leq t^*$, а t^* — наименьший корень, то $\tilde{t} = t^*$.

Поскольку, очевидно, $\|\tilde{x} - x_0\| \leq \tilde{t} - t_0 = t^* - t_0$, то согласно замечанию к теореме 4 $\tilde{x} = x^*$. Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Быстрота сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x^* оценивается неравенством

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (27)$$

Это следует из неравенства (22), так как x_n и t_n можно рассматривать как первые приближения по модифицированному методу Ньютона с начальными приближениями x_{n-1} и t_{n-1} соответственно.

1.5. Непосредственное использование теоремы 3 или теоремы 5 представляется обычно затруднительным вследствие наличия в их формулировке неопределенной функции ψ . В связи с этим приобретает значение следующая теорема.

Теорема 6. Пусть, как и раньше, оператор P определен в Ω и имеет непрерывную вторую производную в Ω_0 . Пусть, кроме того:

- 1) существует непрерывный линейный оператор $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$;
- 2) $\|\Gamma_0(P(x_0))\| \leq \eta$;
- 3) $\|\Gamma_0 P''(x)\| \leq K (x \in \Omega_0)$.

Тогда, если

$$h = K\eta \leq \frac{1}{2}, \quad (28)$$

$$r \geq r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta, \quad (29)$$

то уравнение (2) имеет решение x^* , к которому сходится процесс Ньютона (основной и модифицированный). При этом

$$\|x^* - x_0\| \leq r_0. \quad (30)$$

Далее, если при $h < 1/2$

$$r < r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta, \quad (31)$$

а при $h = 1/2$

$$r \leq r_1, \quad (32)$$

то в шаре Ω_0 решение x^* единственно.

Быстрота сходимости основного процесса характеризуется неравенством

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{1}{2^n} (2h)^{2^n} \frac{\eta}{h}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (33)$$

а модифицированного (при $h < 1/2$) неравенством

$$\|x^* - x'_n\| \leq \frac{\eta}{h} (1 - \sqrt{1 - 2h})^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (34)$$

Доказательство. Рассмотрим в промежутке $[0, r]$ вещественную функцию

$$\psi(t) = Kt^2 - 2t + 2\eta = Kt^2 - 2t + \frac{2h}{K} = \frac{h}{\eta} t^2 - 2t + 2\eta.$$

Проверим, что оператор P и функция ψ удовлетворяют всем условиям теоремы 3 (а значит, и теоремы 5). В самом деле, выполнение условий 1)–4) очевидно; далее, так как корни уравнения

$$\psi(t) = 0 \quad (35)$$

есть

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta, \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta,$$

то (28) обеспечивает вещественность корней, а условие (29) гарантирует, что наименьший корень, равный r_0 , содержится в промежутке $[0, r]$. Поскольку $t^* = r_0$, то неравенство (30) означает неравенство (19) теоремы 3.

Утверждение о единственности решения является следствием теоремы 4, так как, каково бы ни было $h \leq 1/2$, при выполнении условий теоремы $\psi(r) \leq 0$ и корень уравнения (35) единствен в промежутке $[0, r]$.

Установим теперь неравенства (33) и (34), характеризующие быстроту сходимости процесса Ньютона. Принимая во внимание замечания к теоремам 3 и 5, достаточно рассмотреть лишь вещественные последовательности $\{t_n\}$ и $\{t'_n\}$ последовательных приближений соответственно основного и модифицированного процессов для уравнения (35).

Рассмотрим сначала основной метод. Обозначим

$$c_n = -\frac{1}{\psi'(t_n)}, \quad \eta_n = c_n \psi(t_n),$$

$$K_n = c_n \psi''(t_n) = 2Kc_n, \quad h_n = K_n \eta_n$$

и выразим η_n , K_n и h_n через эти же величины, но с меньшим на единицу индексом. Для этого отметим, что

$$t_{k+1} - t_k = -\frac{\psi(t_k)}{\psi'(t_k)} = \eta_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (36)$$

Следовательно, по формуле Тейлора для полинома второй степени

$$\begin{aligned} \eta_n &= c_n \psi(t_n) = c_n \psi(t_{n-1} + \eta_{n-1}) = \\ &= c_n \left[\frac{1}{2} \psi''(t_{n-1}) \eta_{n-1}^2 + \psi'(t_{n-1}) \eta_{n-1} + \psi(t_{n-1}) \right] = \\ &= c_n \left[K \eta_{n-1}^2 - \frac{\eta_{n-1}}{c_{n-1}} + \frac{\eta_{n-1}}{c_{n-1}} \right] = c_n K \eta_{n-1}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{c_n}{c_{n-1}} 2Kc_{n-1} \eta_{n-1}^2 = \frac{1}{2} \frac{c_n}{c_{n-1}} K_{n-1} \eta_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Но

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{\psi'(t_n)}{\psi'(t_{n-1})} = \frac{\psi'(t_{n-1}) + \psi''(t_{n-1}) \eta_{n-1}}{\psi'(t_{n-1})} = 1 + K_{n-1} \eta_{n-1} = 1 + h_{n-1}, \quad (37)$$

поэтому

$$\eta_n = \frac{1}{2} \frac{K_n \eta_{n-1}^2}{1 + h_{n-1}} = \frac{\eta_{n-1}}{2} \frac{h_{n-1}}{1 + h_{n-1}}. \quad (38)$$

Аналогично, также с помощью (37) получаем

$$K_n = 2c_n K = 2Kc_{n-1} \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{K_{n-1}}{1 + h_{n-1}}.$$

Отсюда

$$h_n = K_n \eta_n = \frac{1}{2} \frac{K_{n-1} \eta_{n-1} h_{n-1}}{(1 + h_{n-1})^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_{n-1}}{1 + h_{n-1}} \right]^2. \quad (39)$$

Из (38) и (39), учитывая $h_n \leq 1/2$, получаем оценки

$$\eta_n \leq h_{n-1} \eta_{n-1}, \quad h_n \leq 2h_{n-1}^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (40)$$

Следовательно, $h_n \leq \frac{1}{2} [2h_0]^{2^n} = \frac{1}{2} [2h]^{2^n}$ и

$$\eta_n \leq h_{n-1} \eta_{n-1} \leq h_{n-1} h_{n-2} \eta_{n-2} \leq \dots$$

$$\dots \leq h_{n-1} h_{n-2} \dots h_0 \eta_0 \leq \frac{1}{2^n} [2h]^{2^{n-1}} \eta.$$

Отсюда, наконец, привлекая (36), находим

$$\begin{aligned} t^* - t_n &= (t_{n+1} - t_n) + (t_{n+2} - t_{n+1}) + \dots = \eta_n + \eta_{n+1} + \dots \leq \\ &\leq \frac{1}{2^n} [2h]^{2^{n-1}} \eta \left\{ 1 + \frac{1}{2} [2h]^{2^n} + \frac{1}{2^2} [2h]^{2^{n+1}} + \dots \right\} \leq \\ &\leq \frac{2}{2^n} [2h]^{2^{n-1}} \eta = \frac{1}{2^n} [2h]^{2^n} \frac{\eta}{h}. \end{aligned}$$

В силу (27) это приводит к требуемой оценке (33).

Рассмотрим теперь оценку погрешности модифицированного метода. Предположим, что $h < 1/2$. Понимая под φ ту же функцию, что и в доказательстве теоремы 3, можем написать

$$t^* - t'_n = \varphi(t^*) - \varphi(t'_{n-1}) = \varphi'(\tilde{t}_n)(t^* - t'_{n-1}), \quad \tilde{t}_n = \frac{t^* + t'_{n-1}}{2}.$$

Но

$$\varphi'(t) = 1 + c_0 \psi'(t) = Kt,$$

так что

$$\varphi'(\tilde{t}_n) = K\tilde{t}_n \leq Kt^* = 1 - \sqrt{1-2h}.$$

Поэтому

$$t^* - t'_n \leq [1 - \sqrt{1-2h}] (t^* - t'_{n-1}).$$

Применяя этот же прием, оценим $t^* - t'_{n-1}$ и, продолжая так и дальше, получим в конце концов

$$t^* - t'_n \leq [1 - \sqrt{1-2h}]^n (t^* - t'_0) = \frac{\eta}{h} [1 - \sqrt{1-2h}]^{n+1}.$$

Подставляя это в (22), найдем

$$\|x^* - x'_n\| \leq \frac{\eta}{h} [1 - \sqrt{1-2h}]^{n+1},$$

т. е. неравенство (34). Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Условия 2) и 3) теоремы можно заменить условиями:

$$1') \|\Gamma_0\| \leq B';$$

$$2') \|P(x_0)\| \leq \eta';$$

$$3') \|P''(x)\| \leq K' \quad (x \in \Omega_0).$$

При этом

$$h = K' B'^2 \eta', \quad r_0 = \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h} B' \eta', \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{1-2h}}{h} B' \eta'.$$

Замечание 2. Условия (28), (29), (31) (или (32)) точны в том смысле, что для квадратного уравнения (35) нарушение каждого из первых двух условий влечет отсутствие решения для этого уравнения, а без условия (31) или (32) не имеет места единственность *).

§ 2. Следствия из теоремы о сходимости метода Ньютона

В этом параграфе указаны некоторые следствия из теоремы о сходимости метода Ньютона (теорема 1.6). Как и в предыдущем параграфе, мы будем рассматривать уравнение

$$P(x) = 0, \quad (1)$$

причем относительно оператора P (его области задания, дифференциальных свойств и т. д.) сохраним прежние предположения и обозначения.

2.1. Прежде всего отметим следующее обобщение теоремы 1.6, когда вместо обратного оператора $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ требуется лишь существование оператора, близкого к Γ_0 .

Теорема 1. Пусть существует линейный оператор $\Gamma \in B(Y, X)$, имеющий непрерывный обратный, и выполнены условия:

- 1) $\|\Gamma(P(x_0))\| \leq \bar{\eta}$;
- 2) $\|\Gamma P'(x_0) - I\| \leq \delta$;
- 3) $\|\Gamma P''(x)\| \leq \bar{K} \quad (x \in \Omega_0)$.

Тогда, если

$$\bar{h} = \frac{\bar{K}\bar{\eta}}{(1-\delta)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \delta < 1, \quad (2)$$

$$r \geq \bar{r}_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\bar{h}}}{\bar{h}} \frac{\bar{\eta}}{1 - \delta}, \quad (3)$$

то уравнение (1) имеет решение $x^* \in \Omega_0$, единственное, если

$$r < \bar{r}_1 \quad \text{при} \quad \bar{h} < \frac{1}{2}, \quad r \leq \bar{r}_1 \quad \text{при} \quad \bar{h} = \frac{1}{2},$$

$$\bar{r}_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\bar{h}}}{\bar{h}} \frac{\bar{\eta}}{1 - \delta}.$$

При этом, если $\{x_n\}$ — последовательность приближений основного процесса Ньютона, то

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{1}{2^n} [2\bar{h}]^{2^n} \frac{\bar{\eta}}{\bar{h}(1-\delta)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

*) В случае условия (32) уравнение (30) имеет единственное решение. Однако уравнение $\psi(t) - \varepsilon = 0$ ($\varepsilon > 0$) будет иметь в промежутке $[0, r]$ уже два решения.

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 1.6. Из второго условия вытекает, что существует непрерывный линейный оператор

$$U = [\Gamma P'(x_0)]^{-1},$$

причем

$$\|U\| \leq \frac{1}{1-\delta}.$$

Отсюда следует, что существует непрерывный линейный оператор

$$\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1} = U\Gamma.$$

При этом

$$\|\Gamma_0(P(x_0))\| \leq \|U\| \|\Gamma(P(x_0))\| \leq \frac{\eta}{1-\delta},$$

$$\|\Gamma_0 P''(x)\| \leq \|U\| \|\Gamma P''(x)\| \leq \frac{\bar{K}}{1-\delta}, \quad x \in \Omega_0.$$

Остается заменить в теореме 1.6 η на $\frac{\bar{\eta}}{1-\delta}$ и K на $\frac{\bar{K}}{1-\delta}$.

2.2. Рассмотрим процесс последовательных приближений, подобный модифицированному, с заменой в последнем оператора $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ на близкий к нему Γ . Иначе говоря, построим последовательность $\{\tilde{x}_n\}$:

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \Gamma(P(\tilde{x}_n)), \quad n = 0, 1, \dots; \quad \tilde{x}_0 = x_0. \quad (4)$$

Теорема 2. В условиях теоремы 1 процесс (4) осуществим, т. е. $\tilde{x}_n \in \Omega_0$ ($n = 0, 1, \dots$) и имеет место сходимость

$$\tilde{x}_n \rightarrow x^*.$$

Доказательство. Так же, как и в теореме 1.3, при доказательстве сходимости модифицированного процесса воспользуемся теоремой 1.1, полагая в ней

$$S(x) = x - \Gamma(P(x)), \quad x \in \Omega_0,$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \bar{K} t^2 + \delta t + \bar{\eta} = t + \psi(t),$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2} K t^2 - (1 - \delta) t + \bar{\eta}, \quad t \in [t_0, t'], \quad t_0 = 0, \quad t' = r.$$

Имеем

$$\|S(x_0) - x_0\| = \|\Gamma(P(x_0))\| \leq \bar{\eta} = \varphi(t_0) - t_0.$$

Далее, если $\|x - x_0\| \leq t \leq r$, то

$$\|S'(x)\| = \|I - \Gamma P'(x)\| \leq \|I - \Gamma P'(x_0)\| + \|\Gamma(P'(x_0) - P'(x))\| \leq$$

$$\leq \delta + \left\| \int_{x_0}^x \Gamma P''(y) dy \right\| \leq \delta + \int_0^t \bar{K} d\tau = \delta + \bar{K} t = \varphi'(t).$$

Таким образом, уравнение

$$x = S(x) \quad (5)$$

мажорируется уравнением $t = \varphi(t)$, которое имеет решение

$$t^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\bar{h}}}{\bar{h}} \frac{\bar{\eta}}{1 - \delta} = \bar{r}_0 \leq r.$$

Следовательно, и уравнение (5) имеет решение, которое должно совпадать с x^* (так как в шаре $\|x - x_0\| \leq \bar{r}_0$ решение x^* уравнения (1) единственно).

З а м е ч а н и е. Что касается оценки скорости сходимости последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ к x^* , то она может быть выведена совершенно аналогично тому, как это было сделано в 1.4 для модифицированного процесса. Именно, предоставляем читателю доказать, что при $h < 1/2$

$$\|x^* - \tilde{x}_n\| \leq \frac{1}{\bar{h}} \left[1 - (1 - \delta) \sqrt{1 - 2\bar{h}} \right]^{n+1} \frac{\bar{\eta}}{(1 - \delta)^2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

2.3. Пусть выполнены условия теоремы 1.6 с $h < 1/2$. Покажем, что процесс Ньютона обладает известной устойчивостью, т. е. сходимость процесса не нарушится, если в качестве начального приближения взять не x_0 , а произвольный элемент $x'_0 \in \Omega_0$, достаточно близкий к x_0 .

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1.6 с постоянными η, K и $h = K\eta < 1/2$. Если при этом

$$\|x' - x_0\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1 - 2h}{4k} = \frac{1 - 2K\eta}{4K}, \quad (6)$$

то основной и модифицированный процессы Ньютона будут сходиться, если в качестве начального приближения принять элемент x'_0 .

Доказательство. Применим теорему 1, взяв в ней в качестве Γ оператор $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, а за x_0 приняв элемент x'_0 . Условие 1):

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0(P(x'_0))\| = & \left\| \Gamma_0 \left[P(x_0) + P'(x_0)(x'_0 - x_0) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{x_0}^{x'_0} P''(x)(x'_0 - x) dx \right] \right\| \leq \eta + \varepsilon + K \frac{\varepsilon^2}{2}, \end{aligned}$$

так что в качестве $\bar{\eta}$ следует принять величину $\eta + \varepsilon + K \frac{\varepsilon^2}{2}$.

$$\|\Gamma_0 P'(x'_0) - I\| = \|\Gamma_0 [P'(x'_0) - P'(\bar{x}_0)]\| = \left\| \int_{x_0}^{x'_0} \Gamma_0 P''(x) dx \right\|.$$

Таким образом, $\delta = K\varepsilon$.

Наконец, $\bar{K} = K$. Величина $\bar{h}$ будет при этом равна

$$\bar{h} = \frac{\bar{K}\bar{\eta}}{(1-\delta)^2} = \frac{K\left(\eta + \varepsilon + \frac{K}{2}\varepsilon^2\right)}{(1-K\varepsilon)^2} = \frac{1}{2} \frac{K^2\varepsilon^2 + 2K\varepsilon + 2K\eta}{K^2\varepsilon^2 - 2K\varepsilon + 1} = \frac{1}{2}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если $h \geq 4\sqrt{2} - 5,5 \approx 0,16$, то шар $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$ содержится в шаре $\|x - x_0\| \leq r_0$ и, следовательно, в шаре Ω_0 .

Если же $h < 4\sqrt{2} - 5,5$, то условие (6) уже не обеспечивает, вообще говоря, включения $x_0 \in \Omega_0$ и его надо потребовать дополнительно.

2.4. В числе данных, участвующих в оценке близости начального приближения x_0 к решению x^* , т. е. в оценке величины r_0 , фигурирует и оператор Γ_0 . Знание этого оператора позволяет уточнить область расположения решения. Действительно, зная Γ_0 , мы можем найти x_1 — следующее приближение по методу Ньютона — и применить к нему теорему 1.

Теорема 4. Пусть существует непрерывный линейный оператор $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ и выполнены условия:

- 1) $\|\Gamma_0(P(x_0))\| \leq \eta$;
- 2) $\|\Gamma_0(P(x_1))\| \leq \eta_1$ ($x_1 = x_0 - \Gamma_0(P(x_0))$);
- 3) $\|\Gamma_0 P''(x)\| \leq K$ ($x \in \Omega_0$);

$$4) h_1 = \frac{K\eta_1}{(1-K\eta)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда уравнение (1) имеет решение x^* , причем

$$\|x^* - x_1\| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_1}}{h_1} \eta_1. \quad (7)$$

Доказательство. Проверим условия теоремы 1, полагая в ней $\Gamma = \Gamma_0$ и беря x_1 вместо x_0 :

$$\|\Gamma_0(P(x_1))\| \leq \eta_1,$$

$$\|\Gamma_0 P'(x_1) - I\| \leq \|\Gamma_0 [P'(x_1) - P'(x_0)]\| =$$

$$= \left\| \int_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x) dx \right\| \leq K \|x_1 - x_0\| \leq K\eta.$$

Тогда в качестве $\bar{\eta}$, δ и $\bar{h}$ следует принять η_1 , $K\eta$ и h_1 соответственно.

Согласно теореме 1 решение x^* лежит в шаре $\|x - x_1\| \leq \bar{r}_0$. Поскольку в данном случае

$$\bar{r}_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\bar{h}}}{\bar{h}} \frac{\bar{\eta}}{1 - \delta} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_1}}{h_1} \frac{\eta_1}{1 - K\eta},$$

отмеченное обстоятельство приводит к (7).

Замечание 1. Может случиться, что $h_1 \leq 1/2$, хотя $h = K\eta > 1/2$. В этом случае теорема дает возможность делать заключение о существовании решения, хотя теорема 1.6 неприменима.

Замечание 2. Условия 1)–4) не гарантируют включение шара $\|x - x_1\| < \bar{r}_0$ в шар Ω_0 . Поэтому надо предполагать, что радиус шара Ω_0 настолько велик, чтобы указанное включение имело место.

Например,

$$r \geq \eta + \bar{r}_0 = \eta + \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_1}}{h_1} \frac{\eta_1}{1 - K\eta}.$$

2.5. Если в условиях замечания 1 к теореме 1.6 оценка нормы оператора $[P'(x)]^{-1}$ известна не только в точке x_0 , но и во всей области Ω_0 , то можно ослабить условие, накладываемое на h , потребовав вместо $h < 1/2$ лишь $h < 2$ (см. Мысовских [1]).

Теорема 5 (Мысовских). Пусть выполнены условия:

1) $\|P(x_0)\| \leq \eta$;

2) для $x \in \Omega_0$ существует непрерывный линейный оператор $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$, причем

$$\|\Gamma(x)\| \leq B, \quad x \in \Omega_0;$$

3) $\|P''(x)\| \leq K \quad (x \in \Omega_0)$.

Тогда, если

$$h = B^2 K \eta < 2, \quad r > r' = B \eta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{2^{k-1}},$$

то уравнение (1) имеет решение $x^* \in \Omega_0$, к которому сходится основной процесс Ньютона, начатый с x_0 . При этом быстрота сходимости устанавливается неравенством

$$\|x^* - x_n\| \leq B \eta \frac{(h/2)^{2^n - 1}}{1 - (h/2)^{2^n}},$$

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma(x_n)(P(x_n)); \quad n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Доказательство. Покажем сначала, что процесс Ньютона мы осуществим, т. е. что $x_n \in \Omega_0$ ($n = 0, 1, \dots$). Имеем

$$\|x_1 - x_0\| = \|\Gamma(x_0)(P(x_0))\| \leq B \eta, \quad (10)$$

$$\|P(x_1)\| = \left\| P(x_0) + P'(x_0)(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} P''(x)(x_1 - x) dx \right\| \leqslant \\ \leqslant \int_0^{B\eta} K(B\eta - t) dt = \frac{KB^2\eta^2}{2} = \frac{h\eta}{2} = \eta_1. \quad (11)$$

Из (10) вытекает, что $x_1 \in \Omega_0$.

Подсчитаем величину h , соответствующую точке x_1 :

$$h_1 = B^2 K \eta_1 = \frac{B^2 K \eta h}{2} = \frac{h^2}{2}. \quad (12)$$

Пусть уже доказано, что $x_n \in \Omega_0$. Обозначая через h_k и η_k ($k = 0, 1, \dots$) величины h и η , отвечающие точке x_k , будем иметь аналогично (10), (11) и (12)

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant B\eta_n, \\ \eta_{k+1} = \frac{h_k \eta_k}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (13)$$

$$h_k = 2 \left(\frac{h_{k-1}}{2} \right)^2 = \dots = 2 \left(\frac{h_0}{2} \right)^{2^k} = 2 \left(\frac{h}{2} \right)^{2^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Из двух последних соотношений находим

$$\eta_n = \frac{h_{n-1} \eta_{n-1}}{2} = \frac{h_{n-1} h_{n-2} \eta_{n-2}}{4} = \dots = \frac{h_{n-1} h_{n-2} \dots h_0}{2^n} \eta_0 = \left(\frac{h}{2} \right)^{2^n - 1} \eta.$$

Подставляя это в (13), получим

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant B\eta \left(\frac{h}{2} \right)^{2^n - 1}. \quad (14)$$

Отсюда, используя для $\|x_{k+1} - x_k\|$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) аналогичную оценку,

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leqslant \sum_{k=0}^n \|x_{k+1} - x_k\| \leqslant B\eta \sum_{k=0}^n \left(\frac{h}{2} \right)^{2^k - 1} \leqslant r' \leqslant r$$

и, следовательно, $x_{n+1} \in \Omega_0$.

Также на основании (14) имеем

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} B\eta \left(\frac{h}{2} \right)^{2^k - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (15)$$

так что последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе и, значит, существует $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Ясно, что x^* — решение уравнения (1).

Устремляя в (15) $p \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\|x^* - x_n\| \leq$$

$$\leq B\eta \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{2^k-1} \leq B\eta \left(\frac{h}{2}\right)^{2^n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{2^k} = B\eta \frac{(h/2)^{2^n-1}}{1 - (h/2)^{2^n}},$$

что и дает оценку (9) быстроты сходимости процесса.

2.6. Нередко оказывается возможным данное уравнение (1) заменить на близкое к нему, но уже более простое уравнение, также, вообще говоря, нелинейное. Выясним условия, на основании которых можно судить о разрешимости данного уравнения по решению приближенного уравнения.

Итак, пусть уравнение (1) имеет вид

$$P(x) = \pi(x) + R(x) = 0. \quad (16)$$

Предположим, что элемент x_0 является решением упрощенного уравнения

$$\pi(x_0) = 0.$$

Если выполнены условия:

$$1) \|\pi'(x_0)^{-1}(R(x_0))\| \leq \eta;$$

$$2) \|\pi'(x_0)^{-1}R'(x_0)\| \leq \alpha < 1;$$

$$3) \|\pi'(x_0)^{-1}\pi''(x)\| \leq K, \quad \|\pi'(x_0)^{-1}R''(x)\| \leq L \quad (x \in \Omega_0);$$

и если

$$h = \frac{\eta(K+L)}{(1-\alpha)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (17)$$

$$r \geq r_0 = \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h} \frac{\eta}{1-\alpha}, \quad (18)$$

то уравнение (16) имеет в Ω_0 решение x^* .

Это предложение получается непосредственно из теоремы 1, если положить в ней $\Gamma = [\pi'(x_0)]^{-1}$. Также с помощью теоремы 1 может быть установлена область единственности решения x^* .

Рассмотренная только что ситуация является частным случаем более общей, когда левая часть уравнения (1) зависит от числового или иного параметра, причем при одном значении параметра решение уравнения известно и требуется установить существование решения для значений параметра, близких к начальному. Мы ограничимся здесь случаем, когда параметр входит в уравнение линейно. Точнее говоря, рассмотрим уравнение

$$P(x, \mu) = \pi(x) + \mu R(x) = 0, \quad (19)$$

где μ означает линейный оператор в пространстве Y ($\mu \in B(Y, Y)$). В частности, μ может быть числовым множителем.

Теорема 6. Пусть выполнены условия:

$$1) P(x_0, 0) = \pi(x_0) = 0;$$

2) существует непрерывный линейный оператор $\Gamma_0 = [\pi'(x_0)]^{-1}$,
и $\|\Gamma_0\| \leq B$;

3) $\|R(x_0)\| \leq \eta$, $\|R'(x_0)\| \leq \alpha$;

4) $\|\pi''(x)\| \leq K$, $\|R''(x)\| \leq L$ ($x \in \Omega_0$).

Тогда, если μ таково, что

$$h_\mu = \frac{B^2 \eta (K + L \|\mu\|) \|\mu\|}{(1 - \alpha B \|\mu\|)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \alpha B \|\mu\| < 1, \quad (20)$$

то, если радиус r шара Ω_0 достаточно велик, уравнение (19) имеет решение $x^* \in \Omega_0$.

Доказательство получается непосредственно из сказанного выше по поводу уравнения (16).

Область расположения решения $x^*(\mu)$ и область его единственности могут быть найдены с помощью теоремы 1. Из этой же теоремы следует, что к $x^*(\mu)$ сходится как основной, так и модифицированный процессы Ньютона, начатые с x_0 . Кроме того, на основании теоремы 2 к $x^*(\mu)$ сходится последовательность $\{\tilde{x}_n(\mu)\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+1}(\mu) &= \tilde{x}_n(\mu) - [\pi'(x_0)]^{-1}(P(\tilde{x}_n(\mu), \mu)), \\ n &= 0, 1, \dots; \quad \tilde{x}_0(\mu) = x_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Этот последний процесс имеет то достоинство, что в нем используется обратный оператор, соответствующий начальной точке x_0 и начальному значению параметра $\mu = 0$.

Замечание 1. Обратим внимание на то, что при каждом μ , мажорантным для уравнения (19) будет вещественное уравнение

$$\left(\frac{K}{2} t^2 - \frac{1}{B} t \right) + \|\mu\| \left(\frac{L}{2} t^2 + \alpha t + \eta \right) = 0$$

и условия (20) означают не что иное, как требование вещественности корней этого уравнения.

Замечание 2. Несколько более сложные рассуждения позволяют разобрать общий случай, когда параметр μ входит в уравнение $P(x, \mu) = 0$ нелинейно.

Отметим, что в некоторых случаях более широкие границы для допустимых значений параметра могут быть получены, если применить теорему 1 не к x_0 и Γ_0 , а к значениям x и Γ , представляющим решение системы уравнений

$$P(x, \mu) = 0, \quad \Gamma P'(x, \mu) = I$$

с точностью до «первых» степеней параметра μ .

Ограничимся случаем, когда параметр имеет числовое значение и приближенное уравнение $\pi(x) = 0$ линейно, т. е. уравнение (19) имеет вид

$$P(x, \mu) = U(x - x_0) + \mu R(x) = 0, \quad (22)$$

где $U = (\pi'(x_0))$ — непрерывный линейный оператор.

В этом случае указанные решения с точностью до первой степени μ имеют вид

$$x_1 = x_0 - \mu \Gamma_0(R(x_0)), \quad \Gamma_1 = \Gamma_0 - \mu \Gamma_0 R'(x_0) \Gamma_0.$$

Таким образом, требуется оценить величины:

- 1) $\|\Gamma_1(P(x_1, \mu))\| = \|\Gamma_0 - \mu \Gamma_0 R'(x_0) \Gamma_0\| [-\mu R(x_0) + \mu R(x_0 - \mu \Gamma_0 R(x_0))] \leq \eta_1;$
- 2) $\|\Gamma_1 P'(x_1, \mu) - I\| = \|\Gamma_0 - \mu \Gamma_0 R'(x_0) \Gamma_0\| [U + \mu R'(x_0 - \mu \Gamma_0 R(x_0))] - I\| \leq \delta_1;$
- 3) $\|\Gamma_0 - \mu \Gamma_0 R'(x_0) \Gamma_0\| R''(x) \leq L_1 \quad (x \in \Omega_0).$

Тогда уравнение (22) разрешимо, если

$$\frac{L_1 \eta_1 |\mu|}{(1 - \delta_1)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

2.7. Существование решения и сходимость определяющего его процесса в определенной области изменения параметра позволяет делать заключения и о характере зависимости решения $x^*(\mu)$ от параметра. Например, поскольку $\tilde{x}_0(\mu) = x_0$ непрерывно зависит от μ , а $\pi(x)$ и $R(x)$ — непрерывные функции x , то все $\tilde{x}_n(\mu)$ в (21) будут непрерывными функциями параметра, а тогда и $x(\mu)$ непрерывно зависит от μ .

При определенных условиях можно заключить и об аналитическом характере зависимости $x^*(\mu)$ от параметра.

Функцию $x(\mu)$ со значениями в пространстве X будем называть *слабо аналитической*, если, каков бы ни был линейный функционал $f \in X^*$, функция $f(x(\mu))$ аналитическая в обычном смысле слова.

Оператор P называется *аналитическим*, если он преобразует любую слабо аналитическую функцию $x(\mu)$ в слабо аналитическую же функцию $P(x(\mu))$ (в пространстве Y).

Считая в уравнении (19) μ числовым параметром, предположим, что π и R — аналитические операторы. Тогда все приближения (21) будут, как легко проверить, аналитическими функциями от μ . Пусть f — произвольный непрерывный линейный функционал в пространстве X . Ввиду равномерной (по μ) ограниченности норм элементов $\tilde{x}_n(\mu)$ аналитические функции

$$\varphi_n(\mu) = f(\tilde{x}_n(\mu)), \quad n = 0, 1, \dots,$$

ограничены в совокупности, а тогда и функция

$$\varphi(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\mu) = f(x^*(\mu))$$

является аналитической. Поскольку f — произвольный функционал, то $x^*(\mu)$ — слабо аналитическая функция от μ .

Если естественным образом определить разложение функции $x^*(\mu)$ в ряд по степеням μ :

$$x^*(\mu) = x_0 + \mu x_1 + \dots + \mu^n x_n + \dots,$$

то из сказанного вытекает, что ряд должен слабо сходиться для всех $|\mu| < \mu_0$.

Методу Ньютона, различным его применениям и обобщениям посвящено большое число работ. См., в частности, Красносельский и др., Коллатц и указанную там литературу. Особо отметим работу С. М. Лозинского [2], где развивается существенно иной подход к решению нелинейных уравнений.

§ 3. Применение метода Ньютона к конкретным функциональным уравнениям

3.1. Рассмотрим сначала применение метода Ньютона к одному вещественному или комплексному уравнению

$$f(z) = 0. \quad (1)$$

Используя теорему 1.6, учитывая при этом, что величины η и K , фигурирующие там, имеют следующий смысл:

$$\eta \geq \frac{|f(z_0)|}{|f'(z_0)|}, \quad K \geq \max \frac{|f''(z)|}{|f'(z_0)|}$$

(здесь z_0 — начальное приближение), получаем, что существование корня обеспечено, если

$$h = \eta K \leq \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \frac{|f(z_0)| |f''(z_0)|}{|f'(z_0)|^2} \leq \frac{1}{2},$$

причем корень расположен в круге

$$|z - z_0| \leq r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \quad (2)$$

и единствен в круге

$$|z - z_0| < r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta^* \quad (3)$$

Метод Ньютона можно использовать и для решения систем алгебраических уравнений

$$\varphi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

которую мы будем рассматривать как одно уравнение

$$P(x) = 0$$

*) При этом предполагается, что оценка второй производной осуществляется в круге $|z - z_0| \leq r$, где $r \geq r_0$, если имеется в виду (2), и $r \geq r_1$, если рассматривается (3).

в m -мерном пространстве X :

$$y = P(x),$$

$$y = (\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_m), \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_m)), \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_m).$$

Пусть $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_m^{(0)})$ — начальное приближение. Подставляя его в уравнение метода Ньютона

$$P'(x_0)(x - x_0) + P(x_0) = 0$$

и учитывая при этом выражение для производной $P'(x_0)$, указанное в XVII.1.6, получим для поправки $\Delta x = x_1 - x_0 = (\Delta \xi_1, \Delta \xi_2, \dots, \Delta \xi_m)$ систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_j(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_m^{(0)})}{\partial \xi_k} \Delta \xi_k = -\varphi_j(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_m^{(0)}), \quad (5)$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

из которой находим Δx и, следовательно, x_1 . Таким же образом находим x_2 и т. д.

Если использовать модифицированную схему процесса, то матрица системы (5) остается неизменной на каждом шаге — меняются только правые части.

Условия сходимости процесса зависят от нормировки пространства X . Мы рассмотрим два случая: $X = l_m^\infty$ и (менее подробно) $X = l_m^2$.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ и начальное приближение x_0 удовлетворяют условиям:

- 1) $|\varphi_j(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_m^{(0)})| \leq \eta'$ ($j = 1, 2, \dots, m$);
- 2) матрица Якоби

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_m^{(0)}) \right), \quad j, k = 1, 2, \dots, m,$$

имеет определитель $D \neq 0$, и если $A_{j,k}$ означает алгебраическое дополнение элемента $\partial \varphi_j / \partial \xi_k$, то справедлива оценка

$$\frac{1}{|D|} \sum_{j=1}^m |A_{j,k}| \leq B', \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$3) \left| \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi_k \partial \xi_s}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \right| \leq L \quad (j, k, s = 1, 2, \dots, m; |\xi_i - \xi_i^{(0)}| \leq r);$$

$$4) h = B'^2 \eta' L m^2 \leq 1/2.$$

Тогда, если

$$r \geq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} B' h', \quad (6)$$

то система (4) имеет решение $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_m^*)$, лежащее в окрестности точки x_0 , к которому сходится как основной, так и модифицированный процессы Ньютона.

Доказательство теоремы сводится к проверке условий теоремы 1.6, точнее говоря, замечания 1 к этой теореме, если принять $X = I_m^\infty$. Эту проверку мы предоставляем читателю*).

Замечание 1. Быстрота сходимости основного и модифицированного процессов оценивается с помощью неравенств (33) и (34) теоремы 1.6.

Замечание 2. Так как при $0 < h \leq 1/2$

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \leq 2,$$

то (6) будет выполнено, если принять $r = 2B'\eta'$.

Замечание 3. Пусть число уравнений системы (4) есть $m = 2$. Тогда

$$A_{j,k} = \pm \frac{\partial \varphi_{3-k}}{\partial \xi_{3-j}}(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}), \quad j, k = 1, 2;$$

поэтому, если известна оценка

$$\left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}) \right| \leq L, \quad j, k = 1, 2,$$

то в качестве B' может быть принята величина

$$B' = 2L/|D|,$$

и условие 4) запишется в форме

$$\frac{16l^2\eta'L}{|D|} \leq \frac{1}{2},$$

или

$$32l^2\eta'L \leq |D|.$$

Это условие было получено А. Островским. Любопытно отметить, что прямое доказательство сходимости метода Ньютона даже в этом простейшем случае весьма сложно.

Если использовать нормировку пространства l_m^2 , то условия 1) — 4) теоремы 1 следует заменить следующими:

$$1') \|\Gamma_0(P(x_0))\| = \|\Delta x\| = \left[\sum_{k=1}^m |\Delta \xi_k|^2 \right]^{1/2} \leq \eta;$$

$$2') \|\Gamma_0\| = \sqrt{\Lambda} \leq B';$$

здесь Γ_0 , как всегда, означает $[P'(x_0)]^{-1}$, а через Λ обозначено наибольшее собственное значение матрицы $\Gamma_0\Gamma_0^*$; в качестве B'

*) Легко убедиться, что $\|P''(x)\| \leq Lm^2$ (ср. XVII.2.2).

можно принять, например,

$$B' = \frac{1}{|D|} \left[\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m |A_{j,k}|^2 \right]^{1/2},$$

$$3') \|P''(x)\| \leq \left[\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^m \left| \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi_k \partial \xi_s} \right|^2 \right]^{1/2} \leq K;$$

в качестве K' можно принять поэтому $K' = Lm\sqrt{m}$;

$$4') h = B'K'\eta \leq 1/2.$$

Выполнение этих условий обеспечивает существование решения системы (4) и сходимость к нему основного и модифицированного процессов Ньютона.

Проиллюстрируем сказанное примером. Рассмотрим систему

$$3\xi_1^2\xi_2 + \xi_2^2 = 1,$$

$$\xi_1^4 + \xi_1\xi_2^3 = 1.$$

Начальное приближение $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$ выберем так:

$$\xi_1^{(0)} = 0,98, \quad \xi_2^{(0)} = 0,32.$$

Система для определения поправок будет иметь вид

$$1,880\Delta\xi_1 + 3,188\Delta\xi_2 = 0,045,$$

$$3,798\Delta\xi_1 + 0,301\Delta\xi_2 = 0,046,$$

откуда находим

$$\Delta\xi_1 = 0,0105, \quad \Delta\xi_2 = 0,0075.$$

Отсюда же получаем

$$-\Gamma_0 = \begin{pmatrix} -0,026 & 0,256 \\ 0,329 & -0,163 \end{pmatrix}.$$

Применяя нормировку пространства l_2^∞ , подсчитаем константы B' , η' и L теоремы 1. Имеем

$$\|\Gamma_0\| = 0,492 < 0,5 = B',$$

$$\|P(x_0)\| = \max [0,046; 0,045] < 0,05 = \eta'.$$

Вторые производные функций φ_1 и φ_2 оцениваем для $\|x - x_0\| < 2B'\eta'$, т. е. для $0,93 \leq \xi_1 \leq 1,03$; $0,27 \leq \xi_2 \leq 0,37$. Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi_1^2} &= 6\xi_2, & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} &= 6\xi_1, & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi_2^2} &= 6\xi_2, \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi_1^2} &= 12\xi_1^2, & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} &= 3\xi_2^2, & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi_2^2} &= 6\xi_1\xi_2, \end{aligned}$$

то в качестве L можно принять

$$L = 12,8 > \max \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi_1^2} = 12 (1,03)^2.$$

При указанных значения B' , η' и L величина h будет

$$h = B'^2 \eta' L m^2 = 0,25 \cdot 0,05 \cdot 12,8 \cdot 4 = 0,64.$$

Таким образом, теорема 1 не дает возможности сделать заключение о сходимости процесса Ньютона. Это происходит вследствие очень грубой оценки $\|P''(x)\|$. Действительно, мы приняли

$$\|P''(x)\| < L m^2 = 51,2,$$

между тем фактически имеет место более точная оценка

$$\|P''(x)\| \leq 16 = K',$$

Используя ее, получим

$$h = B'^2 \eta' K' = 0,25 \cdot 0,05 \cdot 16 = 0,2,$$

что уже позволяет заключить о сходимости процесса Ньютона.

Заметим, что если воспользоваться непосредственно теоремой 1.6, то для h можно получить и еще меньшую величину. Действительно,

$$\|G_0(P(x_0))\| = \|\Delta x\| = \max [|\Delta \xi_1|, |\Delta \xi_2|] = 0,0105,$$

$$\|G_0 P''(x)\| < 7,2.$$

Поэтому, выбирая $\eta = 0,0105$, $K = 7,2$, получим

$$h = \eta K < 0,08. \quad (7)$$

Используя схему модифицированного процесса, найдем последовательные приближения

$$\xi_1^{(1)} = 0,9905, \quad \xi_2^{(1)} = 0,3275,$$

$$\xi_1^{(2)} = 0,99117, \quad \xi_2^{(2)} = 0,32738,$$

$$\xi_1^{(3)} = 0,991189, \quad \xi_2^{(3)} = 0,327382$$

Оценка погрешности третьего приближения, подсчитанная по формуле (34) теоремы 1.6 дает величину 0,0008 (при этом для h взято значение (7)).

Если применить теорему 2.4, то можно указать и более точную оценку погрешности; именно, на основании указанной теоремы

$$0,991173 < \xi_1^* \leq 0,991205, \quad 0,327366 \leq \xi_2^* < 0,327398.$$

Таким образом, в третьем приближении оказываются верными четыре десятичных знака.

Если воспользоваться нормировкой пространства L_2^2 , то, исходя из условий 1') — 3'), можно получить

$$\|G_0\| \leq 0,448 < 0,5 = B',$$

$$\|G_0(P(x_0))\| = \|\Delta x\| = 0,0133 < 0,015 = \eta,$$

$$\|P''(x)\| < 15,2 = K', \quad h = B' K' \eta = 0,1026.$$

3.2. Рассмотрим применение метода Ньютона к нелинейным интегральным уравнениям. Пусть дано интегральное уравнение

$$x(s) = \int_0^1 K(s, t, x(t)) dt, \quad (8)$$

где $K(s, t, u)$ — непрерывная функция всех своих аргументов,

имеющая непрерывные производные нужных порядков. В функциональном пространстве X введем оператор P :

$$y = P(x), \quad y(s) = x(s) - \int_0^1 K(s, t, x(t)) dt, \quad (9)$$

и запишем уравнения (8) в виде функционального уравнения $P(x) = 0$.

Процесс Ньютона для этого уравнения строится следующим образом. Пусть x_0 — начальное приближение. Предположим, что пространство X и функция $K(s, t, u)$ таковы, что $P'(x_0)$ может быть получено «дифференцированием под знаком интеграла», т. е. что $z = P'(x_0)(x)$ означает

$$z(s) = x(s) - \int_0^1 K'_u(s, t, x_0(t)) x(t) dt. \quad (10)$$

Поправка $\Delta x = x_1 - x_0$ определяется из уравнения

$$P'(x_0)(\Delta x) = -P(x_0),$$

которое в силу (10) будет иметь вид

$$\Delta x(s) - \int_0^1 K'_u(s, t, x_0(t)) \Delta x(t) dt = e_0(s), \quad (11)$$

где $e_0(s) = \int_0^1 K(s, t, x_0(t)) dt - x_0(s)$ есть невязка уравнения (8), отвечающая начальному приближению.

Таким образом, для нахождения каждого следующего приближения требуется решение линейного интегрального уравнения; при этом, если использовать схему модифицированного процесса, то ядро на каждом шаге будет одним и тем же.

Относительно сходимости процесса Ньютона можно высказать на основании общих теорем те или иные результаты в зависимости от того, какое пространство берется в основу. Так, если $X = C[0, 1]$, то мы приходим к такой теореме.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1) для ядра $K(s, t) = K'_u(s, t, x_0(t))$ интегральное уравнение (11) имеет резольвенту $G(s, t)$, причем

$$\int_0^1 |G(s, t)| dt \leq B, \quad s \in [0, 1]; \quad (12)$$

2) $|e_0(s)| \leq \eta'$ ($s \in [0, 1]$);

3) $\int_0^1 |K''_{uu}(s, t, u)| dt \leq K'$ в области значений s и u , опреде-

ляемой неравенствами

$$0 \leq s \leq 1, \quad |u - x_0(s)| \leq 2(1+B)\eta'_1$$

$$4) \quad h = (1+B)^2 K' \eta' \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда процесс Ньютона (основной и модифицированный) сходится к решению уравнения (8). При этом решение $x^*(s)$ находится в области

$$|x^*(s) - x_0(s)| \leq \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h} (1+B) \eta'_1, \quad s \in [0, 1],$$

и единственно в области

$$0 \leq s \leq 1, \quad |u - x_0(s)| \leq \frac{1 + \sqrt{1-2h}}{h} (1+B) \eta'_1.$$

Выполнение условий теоремы 1.6 легко проверяется, если принять во внимание, что в силу теоремы XVII.3.2 производная $P'(x_0)$ оператора P имеет форму (10) и на основании той же теоремы $P''(x)$ есть билинейный интегральный оператор с ядром $K_u''(s, t, x_0(t))$. Что касается оператора $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, то он, как показано в XIII.6.1, имеет вид

$$z = \Gamma_0(y), \quad z(s) = y(s) + \int_0^1 G(s, t) y(t) dt,$$

и, следовательно,

$$\|\Gamma_0\| \leq 1 + B.$$

Если за X принять пространство $L^2(0, 1)$, то, опираясь на теорему XVII.3.1, можно указать иные условия разрешимости интегрального уравнения (8). Именно:

$$1') \quad \int_0^1 |\epsilon_0(s)|^2 ds \leq \eta'^2;$$

2') соблюдено неравенство

$$\left| \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n} \right| \leq B', \quad n = 1, 2, \dots,$$

где λ_n — характеристические значения ядра $K(s, t) = K_u'(s, t, x_0(t))$ в случае, если оно симметрично (если ядро $K(s, t)$ несимметрично, это требование усложняется; ср. IV.2.6 и V.2.7);

$$3') \quad |K_u''(s, t, u)| \leq K' \quad (s, t \in [0, 1], \quad -\infty < u < \infty);$$

$$4') \quad h = B'^2 K' \eta' \leq 1/2.$$

3.3. Условия теоремы 2 или условия 1') — 4') предполагают наличие начального приближения x_0 , достаточно близкого к точному решению. Сейчас мы рассмотрим довольно общий способ построения такого начального приближения, состоящий в замене

данного интегрального уравнения (8) уравнением более простой структуры, решение которого сводится к решению алгебраической системы.

Предположим, именно, что ядро $K(s, t, u)$ может быть аппроксимировано ядром более простого вида

$$H(s, t, u) = \sum_{k=1}^m h_k(t, u) \omega_k(s),$$

где $\omega_k(s)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) — некоторые функции, которые, не умаляя общности, можно считать попарно ортогональными и нормированными. В качестве H может быть взят, например, отрезок ряда Фурье функции K по функциям полной ортонормальной системы $\{\omega_k(s)\}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Уравнение

$$x(s) = \int_0^1 H(s, t, x(t)) dt \quad (13)$$

естественно рассматривать как приближенное по отношению к уравнению (8). Но решение $x_0(t)$ уравнения (13) имеет вид

$$x_0(t) = \sum_{k=1}^m A_k \omega_k(t),$$

где коэффициенты A_k ($k = 1, 2, \dots, m$) определяются из нелинейной алгебраической системы

$$A_j = \int_0^1 h_j \left(t, \sum_{k=1}^m A_k \omega_k(t) \right) dt, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (14)$$

Функцию $x_0(t)$ мы и примем за начальное приближение для уравнения (8).

Так как во многих случаях важным является лишь вопрос о существовании решения уравнения (8) и области его расположения и единственности, то здесь естественно применить схему теоремы 2.6. Для этого примем $X = C[0, 1]$ и уравнение (8) запишем в форме

$$P(x) \equiv \pi(x) + \mu R(x) = 0,$$

$$\pi(x)(s) = x(s) - \int_0^1 H(s, t, x(t)) dt,$$

$$R(x)(s) = \int_0^1 [K(s, t, x(t)) - H(s, t, x(t))] dt,$$

Тогда можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть выполнены условия:

1) существует резольвента $G_0(s, t)$ ядра $H'_u(s, t, x_0(t))$, причем

$$\int_0^1 |G_0(s, t)| dt \leq B, \quad s \in [0, 1];$$

$$2) \left| \int_0^1 [K(s, t, x_0(t)) - H(s, t, x_0(t))] dt \right| - |\varepsilon_0(s)| \leq \eta \quad (s \in [0, 1]);$$

$$3) \int_0^1 |K'_u(s, t, x_0(t)) - H'_u(s, t, x_0(t))| dt \leq \alpha \quad (s \in [0, 1]);$$

$$4) \int_0^1 |H''_u(s, t, u)| dt \leq K \quad (s \in [0, 1], |u - x_0(s)| \leq r);$$

$$5) \int_0^1 |K''_u(s, t, u) - H''_u(s, t, u)| dt \leq L \quad (s \in [0, 1], |u - x_0(s)| \leq r);$$

$$6) h = \frac{(1+B)^2(K+L)\eta}{[1-\alpha(B+1)]^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \alpha(B+1) < 1.$$

Тогда, если

$$r \geq r_0 = \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h} \frac{\eta(1+B)}{1-\alpha(1+B)},$$

то уравнение (8) имеет решение x^* , причем

$$|x^*(s) - x_0(s)| \leq r_0. \quad (15)$$

Удобство сформулированной теоремы по сравнению с теоремой 2 состоит в том, что ядро $H'_u(s, t, x_0(t))$ вырожденное, так что резольвенту $G_0(s, t)$ легко найти.

Для определения решения уравнения (8) можно воспользоваться процессом, указанным в 2.6, хотя при этом сходимость будет медленнее, чем при использовании модифицированного процесса.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим пример. Пусть дано уравнение

$$x(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x(t)]^2 \sin st dt + 1.$$

В качестве аппроксимирующего ядра возьмем

$$H(s, t, u) = \frac{1}{2} stu^2 + 1,$$

так что уравнение (13) в данном случае будет

$$x(s) = -\frac{1}{2} \int_0^1 [x(t)]^2 st dt + 1.$$

Решение этого уравнения имеет вид $x_0(t) = 1 + At$, причем A определяется из квадратного уравнения, $A = 0,405887$. Константы, входящие в условие теоремы 3, без труда подсчитываются. Для них мы получаем следующие значения:

$$B = 1,124; \quad \eta = 0,0367; \quad \alpha = 0,055; \quad K = 0,5; \quad L = 0,0417,$$

откуда

$$0,1 < h < 0,103; \quad \alpha(1+B) < 0,12,$$

и на основании (15)

$$|x^*(s) - x_0(s)| < 0,096, \quad s \in [0, 1].$$

Если бы мы приняли

$$H(s, t, u) = \frac{1}{2} \left(st - \frac{s^3 t^3}{6} \right) u^3 + 1,$$

то получили бы

$$x_0(s) = 1 + 0,38617s - 0,0345s^3$$

и оценка (15) приобрела бы вид

$$|x^*(s) - x_0(s)| < 0,0119, \quad s \in [0, 1].$$

3.4. Рассмотрим вопрос о применении метода Ньютона к дифференциальным уравнениям. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$x'(t) - \varphi(x(t), t) = 0, \quad x(0) = 0. \quad (16)$$

В пространстве C^1 непрерывно дифференцируемых в промежутке $[0, a]$ функций, обращающихся в нуль при $t=0$, введем нормировку

$$\|x\| = \max_{t \in [0, a]} |x(t)| + \lambda \max_{t \in [0, a]} |x'(t)|,$$

где λ — положительный коэффициент, который мы определим впоследствии. Предполагая функцию $\varphi(u, t)$ непрерывной и имеющей непрерывную вторую производную по u в области

$$0 \leq t \leq a, \quad |u - x_0(t)| \leq \delta, \quad x_0 \in C^1,$$

рассмотрим оператор P :

$$y = P(x), \quad y(t) = x'(t) - \varphi(x(t), t).$$

Нетрудно проверить, что P отображает шар $\|x - x_0\| \leq \delta$ (мы обозначим этот шар через Ω) в пространство $C[0, 1]$ и имеет в Ω непрерывные производные первого и второго порядка. При этом

$$P'(z)(x)(t) = x'(t) - \varphi'_u(z(t), t)x(t), \quad (17)$$

$$P''(z)(x, \tilde{x})(t) = -\varphi''_{uu}(z(t), t)x(t)\tilde{x}(t). \quad (18)$$

Найдем $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$. Вследствие (17) элемент $x = \Gamma_0(y)$ есть решение дифференциального уравнения

$$x'(t) = \varphi_u(x_0(t), t)x(t) + y(t), \quad (19)$$

т. е.

$$x(t) = \psi(t) \int_0^t \frac{y(s)}{\psi(s)} ds,$$

где обозначено

$$\psi(t) = \exp \left(\int_0^t \varphi_u(x_0(s), s) ds \right).$$

Отсюда

$$\max_{t \in [0, a]} |x(t)| \leq a \frac{\max |\psi(t)|}{\min |\psi(t)|} \|y\|,$$

а из уравнения (19) находим

$$\max_{t \in [0, a]} |x'(t)| \leq \max_{t \in [0, a]} |\varphi'_u(x_0(t), t)| \max_{t \in [0, a]} |x(t)| + \|y\| \leq \theta \|y\|.$$

Таким образом,

$$\|x\| \leq \left[a \frac{\max |\psi(t)|}{\min |\psi(t)|} + \lambda \theta \right] \|y\|,$$

так что

$$\|\Gamma_0\| \leq a \frac{\max |\psi(t)|}{\min |\psi(t)|} + \lambda \theta.$$

Полученная оценка позволяет применять теорему 1.6, на основании которой мы приходим к следующему результату.

Теорема 4. Пусть выполнены условия:

- 1) $|x'_0(t) - \varphi(x_0(t), t)| \leq \eta' \quad (t \in [0, a]);$
- 2) $|\varphi'_u(x_0(t), t)| \leq M_1 \quad (t \in [0, a]);$
- 3) $|\varphi''_{u^2}(u, t)| \leq M_2 \quad (t \in [0, a], |u - x_0(t)| \leq \delta);$
- 4) $h_0 = M_2 a^2 e^{4aM_1} \eta' < 1/2.$

Тогда, если

$$\delta > r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_1} e^{2aM_1} \eta',$$

то уравнение (16) имеет в промежутке $[0, a]$ единственное решение $x^*(t)$, причем

$$|x^*(t) - x_0(t)| < r_0.$$

Чтобы проверить условия теоремы 1.6, достаточно убедиться, что

$$\max |\psi(t)| \leq e^{aM_1}, \quad \min |\psi(t)| \geq e^{-aM_1};$$

поэтому в качестве B' в указанной теореме можно принять

$$B' = ae^{2aM_1} + \lambda\theta.$$

Далее, можно положить $K' = M_2$. Таким образом, условие разрешимости уравнения (16) запишется в форме

$$h = B'^2 K' \eta' = (ae^{2aM_1} + \lambda\theta)^2 M_2 \eta' \leq 1/2. \quad (20)$$

Поскольку $\lim_{\lambda \rightarrow 0} h = h_0$, то, взяв λ достаточно малым, мы на основании условия 4) обеспечим выполнение (20).

Замечание 1. Случай ненулевого начального условия сводится к рассмотренному очевидной заменой переменных.

Замечание 2. Исползованный метод пригоден и для исследования систем дифференциальных уравнений. Трудности его проведения для указанного случая лежат в невозможности, как правило, аналитического решения линейной системы и, следовательно, оценки нормы оператора Γ_0 .

3.5. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$x''(t) + x(t) + \mu\varphi(x(t), x'(t), t) = 0, \quad (21)$$

где $\varphi(u, v, t)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывные производные по u и v до второго порядка и периодическая по t с периодом $\omega > 0$.

Рассуждая по аналогии с 3.4, укажем условия, при которых уравнение (21) имеет периодическое решение с периодом ω , т. е., иначе говоря, имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$x(\omega) = x(0), \quad x'(\omega) = x'(0). \quad (22)$$

На этот раз воспользуемся схемой теоремы 2.6. Введем пространство $\tilde{C}^2$ дважды непрерывно дифференцируемых периодических (с периодом ω) функций. Норму в $\tilde{C}^2$ определим, полагая

$$\|x\| = \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)| + \lambda \max_t |x''(t)|, \quad x \in \tilde{C}^2,$$

где $\lambda > 0$ будет определено впоследствии. Введем, далее, операторы π и R :

$$y = \pi(x), \quad y(t) = x''(t) + x(t), \quad z = R(x), \quad z(t) = \varphi(x(t), x'(t), t).$$

Уравнение (21) запишется при этом в виде

$$\pi(x) + \mu R(x) = 0. \quad (23)$$

Произведем необходимые для применения теоремы 2.6 оценки.

Оператор π , очевидно, непрерывен и линеен, так что решением x_0 уравнения $\pi(x) = 0$ является элемент $x_0 = 0$. Если $\cos \omega \neq 1$, то существует $\Gamma_0 = \pi^{-1}$. Оператор Γ_0 можно найти,

решая дифференциальное уравнение

$$x'' + x = y$$

при условиях (22). Опуская несложные по существу, но утомительные выкладки, укажем сразу оценку нормы оператора Γ_0 :

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0\| &\leq \omega \left[2 + \frac{1 + |\cos \omega| + |\sin \omega|}{1 - \cos \omega} \right] + \lambda \theta \leq \\ &\leq \frac{4 + 1 + \sqrt{2}}{1 - \cos \omega} \omega + \lambda \theta < \frac{6,5\omega}{1 - \cos \omega} + \lambda \theta; \end{aligned}$$

здесь θ означает некоторое выражение, содержащее ω .

Таким образом, за B можно принять

$$B = \frac{6,5\omega}{1 - \cos \omega} + \lambda \theta = B_0 + \lambda \theta.$$

Учитывая, что

$$R'(x_0)(x)(t) = \varphi'_u(0, 0, t)x(t) + \varphi'_v(0, 0, t)x'(t),$$

$$\begin{aligned} R''(z)(x, \tilde{x})(t) &= \varphi''_{uu}(z(t), z'(t), t)x(t)\tilde{x}(t) + \\ &+ \varphi''_{uv}(z(t), z'(t), t)[x(t)\tilde{x}'(t) + x'(t)\tilde{x}(t)] + \\ &+ \varphi''_{vv}(z(t), z'(t), t)x'(t)\tilde{x}'(t), \end{aligned}$$

можем теперь сформулировать следующую теорему.

Теорема 5. Пусть выполнены условия:

1) $\omega = 2\pi n \quad (n = 1, 2, \dots)$;

2) $|\varphi(0, 0, t)| \leq \eta$;

3) $|\varphi'_u(0, 0, t)| \leq \alpha, \quad |\varphi'_v(0, 0, t)| \leq \alpha$;

4) $|\varphi''_{uu}(u, v, t)| \leq L, \quad |\varphi''_{uv}(u, v, t)| \leq L, \quad |\varphi''_{vv}(u, v, t)| \leq L.$

Тогда, если

$$\mu < \frac{1 - \cos \omega}{6,5\omega(\alpha + \sqrt{2}L\eta)}, \quad (24)$$

то уравнение (21) имеет единственное периодическое решение с периодом ω .

Для доказательства достаточно проверить, что неравенство (20) теоремы 2.6, которое в данном случае принимает вид

$$h_\mu = \frac{B^2 L \eta \mu^2}{(1 - \alpha B \mu)^2} \leq \frac{1}{2},$$

будет выполнено, если λ достаточно мало и

$$\frac{B_0^2 L \eta \mu^2}{(1 - \alpha B_0 \mu)^2} < \frac{1}{2},$$

а это неравенство равносильно (24).

З а м е ч а н и е. Если функция φ зависит от своих аргументов аналитически, то на основании сказанного в 2.7 можно сделать заключение, что и периодическое решение, уравнения (21) будет зависеть от μ аналитически для μ , удовлетворяющих (24).

Для уравнений более высокого порядка можно использовать аналогичные рассуждения.

3.6. Рассмотрим применение метода Ньютона к теории возмущений.

Пусть U и V — непрерывные линейные операторы, отображающие B -пространство X в себя. Пусть требуется найти собственное значение и соответствующий собственный элемент оператора $U_t = U + tV$, предполагая, что для $t=0$ решение этой задачи известно, т. е. предполагая известным собственное значение λ_0 оператора U и соответствующего ему собственного элемента x_0 .

Накладывая на операторы U и V некоторые дополнительные требования, докажем, что для достаточно малых t оператор U_t имеет собственное значение λ_t и соответствующий ему собственный элемент x_t , близкие к λ_0 и соответственно к x_0 . Именно, имеет место

Теорема 6. Пусть выполнены условия:

1) $\bar{\lambda}_0$ является собственным значением для оператора U^* :

$$U^*(f_0) = \bar{\lambda}_0 f_0;$$

при этом f_0 означает собственный элемент, нормированный условием

$$f_0(x_0) = 1;$$

2) оператор $U - \lambda_0 I$, область значений которого лежит в пространстве $X_0 = N(f_0)$, состоящем из тех $y \in X$, для которых $f_0(y) = 0$ (ср. XII.2.1.), рассматриваемый как оператор из X_0 в X , имеет непрерывный обратный T :

$$T(Ux - \lambda_0 x) = x, \quad UTx - \lambda_0 Tx = x, \quad x \in X_0.$$

Тогда, если

$$\|T\| \|V\| |t| \leq \frac{1}{1 + 2\|f_0\| \|x_0\| + 2\sqrt{(1 + \|f_0\| \|x_0\|)\|f_0\| \|x_0\|}}, \quad (25)$$

то оператор U_t имеет собственное значение λ_t такое, что если нормировать соответствующий собственный элемент x_t условием

$$f_0(x_t) = 1,$$

то

$$|\lambda_t - \lambda_0| \leq A|t|, \quad \|x_t - x_0\| \leq B|t|,$$

где A и B — некоторые постоянные, определяемые операторами U и V .

Доказательство. Требуется определить λ и x из условий

$$U(x) + tV(x) = \lambda x, \quad f_0(x) = 1.$$

Введем новые неизвестные z и δ , полагая

$$x = x_0 + z, \quad \lambda = \lambda_0 + \delta.$$

Новые неизвестные должны удовлетворять условиям

$$U(z) + tV(x_0 + z) = \delta(x_0 + z) + \lambda_0 z, \quad f_0(z) = 0,$$

т. е. в пространстве X_0 требуется найти решение уравнения

$$U(z) + tV(x_0 + z) = \delta(x_0 + z) + \lambda_0 z. \quad (26)$$

Применим к обеим частям уравнения (26) функционал f_0 . Так как

$$f_0(Uz - \lambda_0 z) = U^*(f_0)(z) - (\lambda_0 f_0)(z) = 0,$$

то это приводит к равенству

$$\delta = tf_0(V(x_0 + z)), \quad (27)$$

выражающему δ через z . Подставив (27) в (26), получаем уравнение для определения z :

$$U(z) - \lambda_0 z + t[V(x_0 + z) - f_0(V(x_0 + z))(x_0 + z)] = 0. \quad (28)$$

В этом уравнении оба слагаемых принадлежат подпространству X_0 , поэтому можно применить к нему оператор T ; это даст

$$\pi(z) + tR(z) = 0, \quad (29)$$

где

$$\pi(z) = z, \quad R(z) = T[V(x_0 + z) - f_0(V(x_0 + z))(x_0 + z)].$$

Применим к уравнению (29) теорему 2.6. Имеем ($z_0 = 0$)

$$\pi'(z_0) = I, \quad \Gamma_0 = I, \quad \pi''(z) = 0,$$

$$R(z_0) = T[V(x_0) - f_0(V(x_0))x_0],$$

$$R'(z)(x) = T[V(x) - f_0(V(x))(x_0 + z) - f_0(V(x_0 + z))x],$$

$$R'(z)(x, \tilde{x}) = -T[f_0(V(x))\tilde{x} + f_0(V(x))\tilde{x}] =$$

$$= -f_0(V(x))T(\tilde{x}) - f_0(V(\tilde{x}))T(x).$$

Это позволяет принять

$$\eta = \|T\| \|V\| [1 + \|f_0\| \|x_0\|] \|x_0\|, \quad B = 1,$$

$$\alpha = \|T\| \|V\| [1 + 2\|f_0\| \|x_0\|],$$

$$K = 0, \quad L = 2\|T\| \|V\| \|f_0\|.$$

Условие разрешимости уравнения (29) будет, таким образом,

$$h_t = \frac{L\eta |t|^2}{(1 - \alpha |t|)^2} \leq \frac{1}{2},$$

что равносильно (25).

Обозначая через z_t решение уравнения (29), имеем

$$\|z_t\| = \|z_t - z_0\| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_t}}{h_t} \eta |t| \leq 2\eta |t| = B |t|,$$

а из равенства (27) получаем

$$|\lambda_t - \lambda_0| = |\delta| \leq |t| \|f_0\| \|V\| \|x_0 + z_t\| \leq A |t|.$$

Теорема полностью доказана.

Замечание. Отметим один важный частный случай, когда возможно более простое выражение величин η и α . Пусть X — гильбертово пространство и U — самосопряженный оператор. Нетрудно проверить, что в этом случае в качестве f_0 можно взять функционал, определяемый элементом x_0 , т. е.

$$f_0(y) = (y, x_0), \quad y \in X.$$

Учитывая, что $\|x_0\|^2 = f_0(x_0) = 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|R(z_0)\| &\leq \|T\| \|Vx_0 - (Vx_0, x_0)x_0\| \leq \|T\| \|V(x_0)\| \leq \|T\| \|V\|, \\ \|R'(z_0)(x)\| &\leq \|T\| \|Vx - (Vx, x_0)x_0 - (Vx_0, x)x\| \leq \\ &\leq \|T\| [\|Vx - (Vx, x_0)x_0\| + \|(Vx_0, x)x\|] \leq \\ &\leq \|T\| [\|Vx\| + |(Vx_0, x_0)| \|x\|] \leq 2\|T\| \|V\| \|x\|, \end{aligned}$$

так что на этот раз можно принять

$$\eta = \|T\| \|V\|, \quad \alpha = 2\|T\| \|V\|,$$

и условие разрешимости уравнения (29) будет

$$\frac{2(\|T\| \|V\| |t|)^2}{(1 - 2\|T\| \|V\| |t|)^2} \leq \frac{1}{2},$$

что позволяет заменить (25) неравенством

$$\|T\| \|V\| |t| \leq 1/4.$$

Непосредственное исследование данного случая привело М. К. Гавурина [3] к условию

$$\|T\| \|V\| |t| \leq 1/2,$$

которое уже неумлучшаемо.

3.7. Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$\begin{aligned} A(s, t, u, p, q) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + B(s, t, u, p, q) \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + C(s, t, u, p, q) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ + D(s, t, u, p, q) = 0; \quad (30) \end{aligned}$$

здесь p и q означают первые производные $p = \partial u / \partial s$, $q = \partial u / \partial t$.

Уравнение (30) будем рассматривать в некоторой области Q и будем искать решение, удовлетворяющее некоторому граничному условию на кривой γ , ограничивающей область Q .

Применение метода Ньютона к поставленной задаче позволяет указать условия существования решения и область его располо-

жения, если известно приближенное решение $u_0 = u_0(s, t)$. (Дальнейшее изложение опирается на работы А. И. Кошелева [1, 2].)

Будем предполагать, что уравнение (30) эллиптического типа, точнее говоря, будем считать, что для всех значений переменных или по крайней мере для тех, которые могут встретиться, выполнено неравенство

$$B^2 - 4AC < 0. \quad (31)$$

Для того чтобы применить метод Ньютона к уравнению (30), запишем его в виде одного уравнения

$$P(u) = 0, \quad (32)$$

где P — оператор, отображающий некоторое пространство функций U в другое пространство функций V . Эти пространства будут конкретизированы позднее.

Пусть $F = F(s, t, u, p, q)$ — некоторая функция. Через F_0 будем обозначать результат подстановки в F вместо u функции u_0 и вместо p и q частных производных $p_0 = \partial u_0 / \partial s$ и $q_0 = \partial u_0 / \partial t$.

Не задаваясь вопросами обоснования, легко найдем

$$\begin{aligned} P'(u_0)(u) = & A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \left[\left(\frac{\partial A}{\partial u} \right)_0 u + \left(\frac{\partial A}{\partial p} \right)_0 p + \left(\frac{\partial A}{\partial q} \right)_0 q \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial s^2} + \\ & + B_0 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \left[\left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)_0 u + \left(\frac{\partial B}{\partial p} \right)_0 p + \left(\frac{\partial B}{\partial q} \right)_0 q \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial s \partial t} + \\ & + C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left[\left(\frac{\partial C}{\partial u} \right)_0 u + \left(\frac{\partial C}{\partial p} \right)_0 p + \left(\frac{\partial C}{\partial q} \right)_0 q \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \\ = & \left[A_0 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + B_0 \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} + C_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u + \dots \quad (33) \end{aligned}$$

При этом невыписанные слагаемые не содержат производных второго порядка от u . Таким образом, $P'(u_0)$ есть линейный эллиптический дифференциальный оператор, и, следовательно, каждый шаг метода Ньютона для уравнения (32) сводится к решению линейного эллиптического дифференциального уравнения

$$P'(u_n)(u_{n+1}) = P'(u_n)(u_n) - P(u_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (34)$$

В случае использования схемы модифицированного процесса мы также получаем на каждом шаге эллиптическое уравнение

$$P'(u_0)(u_{n+1}) = P'(u_0)(u_n) - P(u_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (35)$$

но уже с неизменной левой частью.

Вторая производная оператора P , которая понадобится для исследования сходимости метода Ньютона, также может быть легко найдена (разумеется, как и выше, без обоснования). Именно, ясно, что $P''(u)(x, y)$ является билинейной формой от x, y

и их производных до второго порядка включительно с коэффициентами, зависящими от u . Существенно при этом отметить, что слагаемые, содержащие произведение второй производной от x на вторую производную от y , в указанной форме отсутствуют.

Займемся теперь пространствами U и V . Подчиним их следующим требованиям.

1) Оператор P отображает пространство U (или его часть Ω) в пространство V .

2) Оператор P должен быть дважды дифференцируемым, и в качестве производных должны получаться указанные выше выражения.

3) Каково бы ни было $u \in \Omega$, коэффициенты F_k билинейной формы $P''(u)(x, y)$, рассматриваемые как операторы умножения, являются непрерывными линейными операторами из V в V , причем

$$\|F_k\|_V^V \leq M, \quad u \in \Omega. \quad (36)$$

Аналогично, если $x \in U$, то функция $\frac{\partial^{\alpha+\beta} x}{\partial s^\alpha \partial t^\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1; \alpha + \beta \leq 1$), рассматриваемая также как оператор умножения, является непрерывным линейным оператором из V в V и

$$\left\| \frac{\partial^{\alpha+\beta} x}{\partial s^\alpha \partial t^\beta} \right\|_V^V \leq M_1 \|x\|_U. \quad (37)$$

4) Оператор, сопоставляющий элементу $x \in U$ его производную $\frac{\partial^{\alpha+\beta} x}{\partial s^\alpha \partial t^\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2; \alpha + \beta \leq 2$), является непрерывным линейным оператором из U в V .

5) Оператор $P'(u_0)$ имеет непрерывный обратный $\Gamma_0 = -[P'(u_0)]^{-1}$, отображающий пространство V на пространство U .

Пространства U, V , удовлетворяющие поставленным требованиям, будем называть *соответствующими*. Для такой пары пространств возможно применение теоремы 1.6, если только начальное приближение u_0 выбрано достаточно удачно. В самом деле, условия 3) и 4) обеспечивают равномерную ограниченность $\|P''(u)\|$, так как, например, для слагаемого вида $F \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ имеем на основании (36) и (37)

$$\left\| F \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\|_V \leq \|F\|_V^V \left\| \frac{\partial x}{\partial s} \right\|_V^V \left\| \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\|_V \leq M \cdot M_1 \left\| \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\|_V \|x\|_U \|y\|_U.$$

Ниже будет указано несколько конкретных пар соответствующих пространств. Однако лишь в первом, простейшем случае мы остановимся на проверке условий 1)–5).

Рассмотрим уравнение *)

$$P(u) \equiv \pi(u) + R(u) \equiv \Delta u + \frac{\partial}{\partial s}(pH) + \frac{\partial}{\partial t}(qH) = \varphi, \quad (38)$$

$$\pi(u) = \Delta u, \quad R(u) = \frac{\partial}{\partial s}(pH) + \frac{\partial}{\partial t}(qH),$$

и будем решать для него задачу Неймана

$$\partial u / \partial n = 0 \quad (39)$$

на границе квадрата $Q = [0, \pi; 0, \pi]$.

Относительно функции H будем предполагать, что она непрерывна вместе с нужными производными и ограничена.

С помощью формулы Грина легко убедиться, что если u удовлетворяет граничному условию, то

$$\iint_Q [P(u)] ds dt = 0; \quad (40)$$

поэтому функцию φ следует подчинить условию $\iint_Q \varphi ds dt = 0$.

В связи с уравнением (38) рассмотрим пару пространств

$$U = \dot{W}_2^{(3)}, \quad V = \dot{W}_2^{(1)},$$

где $\dot{W}_2^{(3)}$ состоит из функций $u \in W_2^{(3)}$, удовлетворяющих граничному условию (39) и условию

$$\iint_Q u(s, t) ds dt = 0. \quad (41)$$

Пространство $\dot{W}_2^{(1)}$ образовано из функций $v \in W_2^{(1)}$, удовлетворяющих условию

$$\iint_Q v(s, t) ds dt = 0. \quad (42)$$

В качестве норм в указанных пространствах примем

$$\|u\| = \left[\iint_Q \sum_{\alpha+\beta=3} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial s^\alpha \partial t^\beta} \right)^2 ds dt \right]^{1/2},$$

$$\|v\| = \left[\iint_Q \left(\left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right) ds dt \right]^{1/2} \quad u \in U, \quad v \in V.$$

*) Уравнением такого типа будет, например, уравнение минимальной поверхности

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

Такого же типа уравнения встречаются в задаче пластического кручения.

Проверим, что пара U, V удовлетворяет условиям 1)–5) (за Ω принимается шар достаточно большого радиуса).

В силу теорем вложения вторые производные функции $u \in U$ суммируемы с любой степенью, поэтому, в частности,

$$\left[\iint_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)^4 ds dt \right]^{1/4} \leq M_2 \|u\| \quad (43)$$

и аналогично для других производных второго порядка. Сама же функция u и ее первые производные p и q ограничены.

Рассмотрим характерное слагаемое выражения $\|P(u)\|$:

$$\begin{aligned} \left\{ \iint_Q \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(H \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) \right]^2 ds dt \right\}^{1/2} &\leq \left\{ \iint_Q \left(H \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \right)^2 ds dt \right\}^{1/2} + \\ &+ \left\{ \iint_Q \left[\left(\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial u} p + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right]^2 ds dt \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \max |H| \|u\| + \\ &+ \max \left| \frac{\partial H}{\partial q} \right| \left\{ \iint_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right)^4 ds dt \right\}^{1/4} \left\{ \iint_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)^4 ds dt \right\}^{1/4} + \dots \end{aligned}$$

Второе слагаемое конечно в силу (43); конечность невыписанных слагаемых очевидна. Таким образом, $P(u) \in V$.

Дифференцируемость P и то, что $P(u_0)$ имеет форму (33), проверяется на основании тех же соображений. Сначала устанавливается, что выражение (33) является слабой производной, а так как P' непрерывен, то тем самым P дифференцируем. То же самое справедливо и по отношению ко второй производной.

Рассмотрим теперь функцию F — один из коэффициентов билинейной формы $P''(u)(x, y)$. Очевидно, F есть частная производная функции H , и поэтому непрерывна и ограничена. Для $v \in V$ имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \iint_Q \left[\frac{\partial}{\partial s} (Fv) \right]^2 ds dt \right\}^{1/2} &= \\ &= \left\{ \iint_Q \left[F \frac{\partial v}{\partial s} + v \left(\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right) \right]^2 ds dt \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \max |F| \|v\| + \left\{ \iint_Q \left[v \left(\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right) \right]^2 ds dt \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (44)$$

На основании теорем вложения функция v суммируема с любой

степенью, в частности,

$$\left\{ \int_Q \int [v(s, t)]^4 ds dt \right\}^{1/4} \leq M_3 \|v\|.$$

Оценим на основании этого один из членов второго слагаемого в (44). Например,

$$\begin{aligned} \left\{ \int_Q \int \left[v \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right]^2 ds dt \right\}^{1/2} &\leq \\ &\leq \max \left| \frac{\partial F}{\partial p} \right| \left\{ \int_Q \int v^4 ds dt \right\}^{1/4} \left\{ \int_Q \int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)^4 ds dt \right\}^{1/4} \leq M_4 \|v\|. \end{aligned}$$

Из сказанного ясно, что рассматриваемый оператор есть непрерывный линейный оператор из V в V , причем выполнено (36). Вторая часть условия 3) следует из ограниченности функции $u \in U$ и ее производных p и q .

Выполнение условия 4) очевидно.

Перейдем к условию 5). Имея в виду использовать соображения из 2.6, достаточно доказать, что оператор Лапласа, рассматриваемый как оператор из U в V , имеет непрерывный обратный. Рассмотрим для этого уравнение

$$\Delta u = v, \quad v \in V. \quad (45)$$

Разложим правую часть — функцию v — в ряд по косинусам:

$$v(s, t) = \sum_{k, m=0}^{\infty} a_{km} \cos ks \cos mt.$$

Вследствие (42) $a_{00} = 0$. Тогда, как легко видеть, единственное решение уравнения (45), удовлетворяющее граничному условию (39), дается рядом

$$u(s, t) = \sum_{k, m=0}^{\infty} \frac{a_{km}}{k^2 + m^2} \cos ks \cos mt.$$

Проверим, что $u \in U$. Действительно, поскольку производные функции v суммируемы с квадратом, имеем

$$\sum_{k, m=0}^{\infty} (k^2 + m^2) a_m^2 = M_4 \int_Q \int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] ds dt = M_4 \|v\|^2.$$

Но тогда очевидна сходимость в среднем рядов, определяющих третьи производные функции u , например,

$$\frac{\partial^3 u(s, t)}{\partial s^2 \partial t} = \sum_{k, m=0}^{\infty} \frac{k^2 m}{k^2 + m^2} a_{km} \cos ks \cos mt.$$

При этом

$$\iint_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2 \partial t} \right)^2 ds dt = M_5 \sum_{k, m=0}^{\infty} \frac{k^4 m^2}{(k^2 + m^2)^2} a_{km}^2 \leq M_6 \sum_{k, m=0}^{\infty} k^2 a_{km}^2 \leq M_7 \|v\|^2.$$

Следовательно, $u \in U$ и $\|u\| \leq M_8 \|v\|$; существование оператора Δ^{-1} доказано.

Таким образом, в данном случае применимы теоремы о сходимости метода Ньютона. Отметим, в частности, что если вместо уравнения (38) рассмотреть уравнение с параметром

$$\Delta u + \mu \left[\frac{\partial}{\partial s} (pH) + \frac{\partial}{\partial t} (qH) \right] = \varphi,$$

то, поскольку при $\mu = 0$ решение существует, на основании теоремы 2.6 его можно гарантировать и для всех достаточно малых μ .

Заметим, что применение схемы теоремы 2.6 здесь приводит к решению уравнения Пуассона на каждом шаге процесса.

В заключение, уже не входя в подробности, укажем еще на две пары соответствующих пространств. Так, если решается задача Дирихле, то можно принять $U = \dot{W}_p^{(2)}$, $V = L^p$. Проверка условий 1)–4) здесь не представляет особого труда. Этого, однако, нельзя сказать по поводу условия 5), которое проверяется весьма сложно.

Накопец, в качестве U можно принять пространство $\text{Lip}^{(2)} \alpha$, состоящее из всех непрерывно дифференцируемых функций, вторые производные которых удовлетворяют условию Липшица с показателем α . За V в этом случае следует взять пространство $\text{Lip} \alpha$. Как и в предыдущем случае, основное затруднение здесь составляет проверка условий 5), для которой нужно использовать тонкие теоремы теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Другие применения метода Ньютона, кроме упоминавшихся выше, рассмотрены в работах Мысовских [2], Николаевой [1, 2].

3.8. Рассмотрим применение метода Ньютона к задаче приближенного построения конформного отображения единичного круга на область, ограниченную простым замкнутым контуром, когда уравнение контура задано аналитически.

Один из методов построения такого отображения (Канторович [1а]; Канторович, Крылов (глава V)) основан на том, что эта задача эквивалентна отысканию специального параметрического представления контура области, при котором комплексная координата z точки контура представляется рядом

$z = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{in\theta}$, $\alpha_n = a_n - ib_n$; при этом предполагается, что каждая точка контура соответствует только одному значению параметра θ . Иначе говоря, требуется найти нормальное комплексное представление контура области, в котором вещественная и мнимая части представляют сопряженные функции.

В силу этих соображений задача построения конформного отображения единичного круга $|\zeta| < 1$ на семейство областей B_λ плоскости z с контурами L_λ , заданными уравнением $\Phi(z, \bar{z}, \lambda) = Q(z, \bar{z}) + \lambda R(z, \bar{z})$, с вещественным параметром λ , сводится к решению функционального уравнения

$$P(z, \lambda) = 0, \quad (46)$$

где преобразование $w = P(z, \lambda)$ определяется формулой

$$w(\theta) = \Phi(z(\theta), \bar{z}(\theta), \lambda)$$

и рассматривается как оператор, действующий из пространства Z в пространство W :

$$W = \left\{ w(\theta) \left| \int_{-\pi}^{\pi} |w'(\theta)|^2 d\theta < \infty \right. \right\},$$

$$Z = \left\{ z \in W \mid \exists \alpha_n = a_n + ib_n, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{in\theta} \right\},$$

$$\|w\|_W = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\pi w(\theta) d\theta \right| + \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |w'(\theta)|^2 d\theta}; \quad \|z\|_Z = \|z\|_W.$$

Предполагается, что конформное отображение единичного круга на область B_0 , соответствующую параметру $\lambda = 0$, известно. Оно и может быть принято за начальное приближение в методе Ньютона $z_0 = z(\theta, 0)$. На основании теорем о сходимости метода Ньютона может быть доказана его сходимость в данной задаче при достаточно малых λ .

Применим к уравнению (46) теорему 2.6 о сходимости метода Ньютона.

Проверим выполнение условий указанной теоремы для уравнения (46).

В данном случае мы можем получить явный вид оператора $\Gamma_0 = [P'(z_0, 0)]^{-1}$ решением уравнения

$$P'(z_0, 0) \Delta z = Q'_z(z_0, \bar{z}_0) \Delta z + Q'_z(z_0, \bar{z}_0) \Delta \bar{z} = q(\theta),$$

которое с учетом продифференцированного по θ тождества

$Q(z_0, \bar{z}_0) = 0$ дает

$$\frac{\Delta z}{z'_0 e^{i\theta}} + \frac{\Delta \bar{z}}{\bar{z}'_0 e^{-i\theta}} = \frac{q(\theta)}{Q'_z(z_0, \bar{z}_0) z'_0 e^{i\theta}} = \frac{q(\theta)}{Q'_z(z_0, \bar{z}_0) \bar{z}'_0 e^{-i\theta}} = R(\theta),$$

т. е.

$$2 \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta z}{z'_0 e^{i\theta}} \right) = R(\theta),$$

откуда в силу регулярности функции $\Delta z/(z'_0 e^{i\theta})$ имеем

$$\Delta z = \frac{1}{2} z'_0 e^{i\theta} \left\{ \frac{q(\theta)}{F'_z(z_0, \bar{z}_0) z'_0 e^{i\theta}} + i \frac{q(\theta)}{F'_z(z_0, \bar{z}_0) \bar{z}'_0 e^{-i\theta}} \right\}. \quad (47)$$

Нетрудно показать, что если

$$F(\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k e^{ikh\theta} + B_k e^{-ikh\theta}) \in W,$$

$$\Phi(\theta) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{ikh\theta} + D_k e^{-ikh\theta}) \in W,$$

то

$$\|F(\theta) \Phi(\theta)\| \leq \left(\frac{1}{2\pi} + 2 \sqrt{\frac{\pi}{6}} \right) \|F(\theta)\| \|\Phi(\theta)\|, \quad (48)$$

$$\|F(\theta) \Phi(\theta)\| \leq A \|F(\theta)\| \|\Phi(\theta)\|, \quad (49)$$

где

$$A[u(\theta)] = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |u(\theta)|^2 d\theta} + \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |u'(\theta)|^2 d\theta} + \max_{\theta} |u(\theta)|.$$

Используя при оценке выражения (47) неравенства (48) и (49), имеем

$$\|\Delta z\| \leq \sqrt{2} A[z'_0(\theta)] \cdot A \left[\frac{1}{Q'_z(z_0, \bar{z}_0) z'_0 e^{i\theta}} \right] \|q(\theta)\|,$$

или $\|\Gamma_0\| \leq \sqrt{2} A[z'_0(\theta)] \cdot A \left[\frac{1}{Q'_z(z_0, \bar{z}_0) z'_0 e^{i\theta}} \right]$, откуда следует выполнение условия 1.

Условие 2 выполняется в силу выбора нами начального приближения, так как $P(z_0, 0) = Q(z_0, \bar{z}_0) = 0$.

Выполнение условий 3-6 основано на существовании и ограниченности соответствующих производных функции Φ .

Действительно, из того, что

$$P'(z, \lambda) \Delta z = \Phi'_z \Delta z + \Phi'_{\bar{z}} \Delta \bar{z},$$

$$P''(z, \lambda) \Delta z \Delta' z = 2 \operatorname{Re} \{ \Phi''_{z\bar{z}} \Delta z \Delta' \bar{z} + \Phi''_{\bar{z}z} \Delta \bar{z} \Delta' z \}$$

и оценок (48) и (49) следует

$$\begin{aligned} \|P^{\varepsilon}(z, 0) \Delta z \Delta' z\| &\leqslant 2 \left(\frac{1}{2\pi} + 2 \sqrt{\frac{\pi}{6}} \right) A [\Phi_{z^2}''(z, \bar{z}, 0) + \Phi_{z\bar{z}}''(z, \bar{z}, 0)] \|\Delta z\| \cdot \|\Delta' z\|, \\ \left\| \frac{\partial}{\partial \lambda} P(z_0, \lambda) \right\| &= \|\Phi_{\lambda}'(z_0, \bar{z}_0, \lambda)\| \leqslant A [\Phi_{\lambda}'(z_0, \bar{z}_0, \lambda)], \\ \left\| \frac{\partial}{\partial \lambda} P'(z_0, \lambda) \Delta z \right\| &\leqslant A \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\Phi_z'(z_0, \bar{z}_0, \lambda) + \Phi_{\bar{z}}'(z_0, \bar{z}_0, \lambda)) \right] \|\Delta z\|, \\ \left\| \frac{\partial}{\partial \lambda} P''(z, \lambda) \Delta z \Delta' z \right\| &\leqslant 2 \left(\frac{1}{2\pi} + 2 \sqrt{\frac{\pi}{6}} \right) A \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\Phi_{z^2}''(z, \bar{z}, \lambda) + \Phi_{z\bar{z}}''(z, \bar{z}, \lambda)) \right] \|\Delta z\| \cdot \|\Delta' z\|. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 7. Пусть функция $Q(z, \bar{z})$ имеет по двум первым переменным ограниченные производные до второго порядка включительно.

Пусть функция Q и начальное приближение z_0 удовлетворяют следующим условиям

- 1) $\sqrt{2}A[z_0'(\theta)] \cdot A \left[\frac{1}{Q_z'(z_0, \bar{z}_0) z_0' e^{i\theta}} \right] \leqslant B;$
- 2) $\Phi(z_0, \bar{z}_0) = 0;$
- 3) $\left(\frac{1}{2\pi} + 2 \sqrt{\frac{\pi}{6}} \right) A [\Phi_{z^2}''(z, \bar{z}, 0) + \Phi_{z\bar{z}}''(z, \bar{z}, 0)] \leqslant K$
при $\|z - z_0\| \leqslant \delta^*;$
- 4) $A[\Phi_{\lambda}'(z_0, \bar{z}_0, \lambda)] \leqslant \eta$ при $|\lambda| \leqslant v;$
- 5) $A \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\Phi_z'(z_0, \bar{z}_0, \lambda) + \Phi_{\bar{z}}'(z_0, \bar{z}_0, \lambda)) \right] \leqslant \alpha$ при $|\lambda| \leqslant v;$
- 6) $\left(\frac{1}{2\pi} + 2 \sqrt{\frac{\pi}{6}} \right) A \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\Phi_{z^2}''(z, \bar{z}, \lambda) + \Phi_{z\bar{z}}''(z, \bar{z}, \lambda)) \right] \leqslant \kappa$
при $\|z - z_0\| \leqslant \delta^*$ и $|\lambda| \leqslant v;$
- 7) $\left(1 - \frac{\alpha B v}{B} \right)^2 - 2v\eta(K + v\kappa) \geqslant 0 \quad (0 < \alpha B v < 1);$
- 8) $\delta(v) = \frac{1 - \alpha B v}{B} - \sqrt{\left(\frac{1 - \alpha B v}{B} \right)^2 - 2v\eta(K + v\kappa)} \leqslant \delta^*.$

Тогда уравнение $\Phi(z, \bar{z}, \lambda) = 0$ имеет при $|\lambda| \leqslant v$ решение $z = z(\lambda) \in Z$, которое может быть получено основным и модифицированным процессом Ньютона, и при этом

$$\|z(\lambda) - z_0\| \leqslant \delta(v).$$

Отсюда следует также (поскольку последовательные приближения по методу Ньютона представляют полиномы от λ), что решение $z = z(\lambda)$ представляет аналитическую функцию от λ . Это дает возможность сделать заключение, что и при другом процессе получения решения методом разложения по степеням параметра λ также получается сходящийся процесс. Прямое доказательство сходимости этого процесса, данное первоначально (Канторович [1a]), является гораздо более громоздким, чем полученное на основании теорем о методе Ньютона; при этом последнее доказательство позволяет эффективно оценить область сходимости метода и получить другие эффективные алгоритмы. Все эти вопросы были развиты в работе Г. А. Николаевой.

Другие применения теорем о методе Ньютона в задачах комплексного анализа, именно, к решению сингулярных уравнений в комплексной области и, в частности, уравнений, связанных с задачей конформного отображения двухсвязных областей, развивались в работах Д. А. Мильмана.

§ 4. Метод Ньютона в решеточно-нормированных пространствах

Схема метода Ньютона, изложенная в § 1 для нормированных пространств, проходит для более общего класса пространств, тесно связанных с ВР, — класса решеточно-нормированных пространств. Результаты 4.1 и 4.2 принадлежат Л. В. Канторовичу [4, 10, 12], 4.3 — А. Н. Балугеву [1]. В изложении мы следуем монографии Вулих — I, где можно ознакомиться с подробными доказательствами изложенных здесь теорем и библиографическими ссылками.

4.1. Вещественное векторное пространство X называется пространством, решеточно-нормированным посредством ВР Z , если каждому элементу $x \in X$ сопоставлен положительный элемент $|x| \in Z$, называемый его абстрактной нормой, удовлетворяющий обычным аксиомам:

- 1) $|x| > 0$, если $x \neq 0$;
- 2) $|\lambda x| = |\lambda| |x|$;
- 3) $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$.

ВР Z мы будем называть нормирующей ВР. Нормированное пространство есть частный случай решеточно-нормированного пространства: в этом случае в качестве нормирующей ВР выступает K -пространство вещественных чисел. Более общим образом, любое ЛВНП может быть представлено как решеточно-нормированное посредством K -пространства $s(T)$, где мощность T равна мощности определяющей системы полунорм. Наконец, если в произвольной ВР X за абстрактную норму элемента принять его модуль, то X становится решеточно-нормированным пространством, для которого нормирующей ВР является сама X .

Пусть X — пространство, решеточно-нормированное при помощи ВР Z . Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ (oZ) -сходится к элементу $x \in X$ ($x_n, x \in X$), если $|x_n - x| \xrightarrow{(oZ)} 0$ в X (обозначение: $x_n \xrightarrow{(oZ)} x$). Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется (oZ) -фундаментальной, если в Z существует такая последовательность $z_m \downarrow 0$, что

$$|x_n - x_m| \leq z_m \text{ при всех } n > m,$$

* Если всякая (oZ) -фундаментальная последовательность (oZ) -сходится, то пространство X называется (oZ) -полным, B -пространство (oR') -полно; K -пространство X (oX) -полно.

Важным примером решеточно-нормированных пространств являются пространства со смешанной нормой $X[Y]$, введенные в XI.1.3. Пространство $X[Y]$ можно рассматривать как нормированное посредством K -пространства X , если абстрактную норму ввести по формуле

$$\|K\|(t) = \|K(\cdot, t)\|_Y.$$

Предоставляем читателю проверить, что пространство $X[Y]$ (oX) -полно.

Приведем некоторый вспомогательный материал, который нам потребуется при исследовании метода Ньютона.

Пусть, далее, на протяжении пунктов 4.1 и 4.2 X и Y — пространства, решеточно-нормированные посредством K -пространств Z и W соответственно.

Пусть $U: X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Положительный линейный оператор $U_0: Z \rightarrow W$ называется *модулярной мажорантой* оператора U , если

$$|U(x)| \leq U_0(|x|)$$

при всех $x \in X$.

Введем понятие производной от оператора, которое также будет использовано при исследовании функциональных уравнений.

Пусть $P: X \rightarrow Y$ — произвольный оператор. Возьмем фиксированный элемент $x_0 \in X$ и предположим, что существует такой линейный оператор $U: X \rightarrow Y$, что при любом $x \in X$ и любой последовательности чисел $t_k \rightarrow 0$ ($t_k \neq 0$) имеем

$$(oW)\text{-}\lim_{t_k} \frac{P(x_0 + t_k x) - P(x_0)}{t_k} = U(x).$$

В этом случае говорят, что линейный оператор U является *производной* оператора P в точке x_0 . При этом пишут

$$U = P'(x_0).$$

Рассмотрим теперь соответствующее понятие интеграла. Пусть $x_0, x \in X$. Через $[[x_0, x]]$ обозначим интервал, соединяющий точки x и y (см. II.3.1; не путать с порядковым интервалом!).

Пусть на интервале $[[x_0, x]]$ задана функция $F(x)$, значения которой суть линейные операторы из X в Y .

Пусть также задана последовательность $\{\sigma_n\}$ разбиений отрезка $[0, 1]: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ такая, что $\lambda = \max(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$, и зафиксированы $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ ($0 \leq k \leq n-1$). Положим $\xi_k = (1 - \tau_k)x_0 + \tau_k x$. Если в Y существует (oW) -предел последовательности интегральных сумм

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1} - t_k),$$

причем этот предел не зависит от выбора $\{\sigma_n\}$ и $\{\tau_k\}$, то этот предел назы-

вается интегралом функции F и обозначается $\int_{x_0}^x F(x) dx$.

Приведенное определение применимо, в частности, к производной $P'(x)$ оператора $P: X \rightarrow Y$. Будем говорить, что на множестве $\Omega \subset X$ для оператора P справедлива *формула Ньютона — Лейбница*, если $P'(x)$ существует при всех $x \in \Omega$ и

$$P(x_0 + \Delta x) - P(x_0) = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} P'(x) dx$$

для всех Δx таких, что $x_0 + \Delta x \in \Omega$.

Мы не будем приводить условий, когда справедлива формула Ньютона — Лейбница, предоставляя читателю самому сформулировать достаточное условие, исходя из доказательства в XVII.1.7 (ср. Вулих — I, с. 372).

4.2. Предположим теперь, что X (αZ)-полно. Рассмотрим уравнение

$$P(x) = 0, \quad (1)$$

где P — оператор из X в Y . Зафиксировав $x_0 \in X$, как и в 1.1, для решения уравнения (1) можно использовать метод Ньютона

$$x'_{n+1} = x'_n - [P'(x_n)]^{-1}(P(x'_n)), \quad n = 0, 1, \dots; \quad x'_0 = x_0,$$

и модифицированный метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_0)]^{-1}(P(x_n)), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Мы ограничимся кратким рассмотрением модифицированного метода Ньютона. Положим $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ (при этом мы пока требуем от Γ_0 только то, чтобы он был линейным оператором, заданным на всем Y). Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$Q(z) = 0, \quad (3)$$

где Q — оператор из Z в W , которое будет играть роль мажорирующего уравнения. Пусть в Z задан порядковый интервал $[z_0, z']$;

$$D = \{x \in X: |x - x_0| \leq z' - z_0\}.$$

Теорема 1. Пусть операторы P и Q удовлетворяют следующим условиям:

1) на множестве D для оператора P справедлива формула Ньютона — Лейбница;

2) на интервале $[z_0, z']$ для оператора Q справедлива формула Ньютона — Лейбница;

3) если $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [z_0, z']$ и $z_n \xrightarrow{(o)} z$, то $Q(z_n) \rightarrow Q(z)$;

4) существуют обратные операторы: $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, заданный на всем Y , и $\Delta_0 = [Q'(z_0)]^{-1}$, заданный на всем W , причем $\Delta_0 \in L_{no}(W, Z)$ и $-\Delta_0$ есть модулярная мажоранта для Γ_0 ;

5) $|\Gamma_0 P(x_0)| \leq -\Delta_0 Q(z_0)$;

6) если $x \in D$ и $z \in [z_0, z']$ таковы, что $|x - x_0| \leq z - z_0$, то оператор $I - \Delta_0 Q'(z)$ является модулярной мажорантой для $I - \Gamma_0 P'(x)$;

7) существует решение $\bar{z}$ уравнения (3) на интервале $[z_0, z']$.

Тогда существует решение $\bar{x}$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $|\bar{x} - x_0| \leq \bar{z} - z_0$, к которому (αZ)-сходится модифицированный процесс Ньютона при начальной точке x_0 .

Если в условиях теоремы 1 уравнение (3) имеет в интервале $[z_0, z']$ единственное решение, то уравнение (1) также имеет единственное решение в множестве D .

Доказательство этих результатов можно найти в книге Вулих — I (теоремы XII.5.1 и XII.5.2).

4.3. Если функциональное уравнение решается в упорядоченном пространстве, то естественно искать две монотонные последовательности, сходящиеся к решению с разных сторон. Изложенные здесь результаты можно трактовать как абстрактное обобщение метода С. А. Чаплыгина из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$U(x) = 0, \quad (4)$$

где U — оператор из K -пространства X в $BP Y$.

Лемма 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) существуют $x_0, x' \in X$ такие, что

$$x_0 \leq x'_0 \text{ и } U(x_0) \leq 0 \leq U(x'_0);$$

2) существует такой линейный оператор T , отображающий X на все Y , что если $x_0 \leq x \leq x'_0$, то

$$U(x'_0) + T(x - x'_0) \leq U(x) \leq U(x_0) + T(x - x_0); \quad (5)$$

3) оператор T имеет положительный обратный T^{-1} .
Тогда:

а) элементы x_1 и x'_1 , определяемые формулами

$$x_1 = x_0 - T^{-1}U(x_0), \quad x'_1 = x'_0 - T^{-1}U(x'_0),$$

удовлетворяют неравенствам

$$x_0 \leq x_1 \leq x'_1 \leq x'_0, \quad U(x_1) \leq 0 \leq U(x'_1); \quad (6)$$

б) если на порядковом интервале $[x_0, x'_0]$ уравнение (4) имеет решение $\tilde{x}$, то $x_1 \leq \tilde{x} \leq x'_1$.

Доказательство. Так как $U(x_0) \leq 0$ и оператор $T^{-1} \geq 0$, то $T^{-1}U(x_0) \leq 0$, откуда $x_1 \geq x_0$. Аналогично $x'_1 \leq x'_0$. Далее,

$$\begin{aligned} x'_0 - x_1 &= x'_0 - x_0 + T^{-1}U(x_0) = T^{-1}T(x'_0 - x_0) + T^{-1}U(x_0) = \\ &= T^{-1}[T(x'_0 - x_0) + U(x_0)]. \end{aligned}$$

В силу правой части неравенства (5) и условия 1)

$$T(x'_0 - x_0) + U(x_0) \geq U(x'_0) \geq 0,$$

откуда $x'_0 - x_1 \geq 0$. Следовательно, $x_0 \leq x_1 \leq x'_0$ и неравенство (5) справедливо при $x = x_1$. Отсюда

$$\begin{aligned} U(x_1) &\leq U(x_0) + T(x_1 - x_0) = U(x_0) - TT^{-1}U(x_0) = 0, \\ U(x'_0) + T(x_1 - x'_0) &\leq U(x_1) \leq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее,

$$\begin{aligned} x'_1 - x_1 &= x'_0 - T^{-1}U(x'_0) - x_1 = T^{-1}T(x'_0 - x_1) - T^{-1}U(x'_0) = \\ &= -T^{-1}[U(x'_0) + T(x_1 - x'_0)], \end{aligned}$$

откуда в силу (7) $x'_1 - x_1 \geq 0$, т. е. $x_1 \leq x'_1$.

Подставляя в левую часть неравенства (5) $x = x'_1$, получаем, что

$$U(x'_1) \geq U(x'_0) + T(x'_1 - x'_0) = U(x'_0) - TT^{-1}U(x'_0) = 0.$$

Тем самым неравенства (6) доказаны. Нам осталось проверить справедливость утверждения б).

Пусть $x_0 \leq \tilde{x} \leq x'_0$ и $U(\tilde{x}) = 0$. Тогда в силу (5)

$$\tilde{x} - x_1 = \tilde{x} - x_0 + T^{-1}U(x_0) = T^{-1}[U(x_0) + T(\tilde{x} - x_0)] \geq T^{-1}U(\tilde{x}) = 0,$$

откуда $\tilde{x} \geq x_1$. Аналогично устанавливается, что $\tilde{x} \leq x'_1$. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $x_0 \leq x'_0$ и $Ux_0 \leq 0 \leq Ux'_0$;
- 2) если $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^\infty \subset [x_0, x'_0]$ и $\tilde{x}_n \xrightarrow{(o)} x$, то $U(\tilde{x}_n) \xrightarrow{(oo)} U(x)$;
- 3) на интервале $[x_0, x'_0]$ для оператора U справедлива формула Ньютона — Лейбница;
- 4) существует такой линейный оператор T , отображающий X на все Y , что при всех $x \in [x_0, x'_0]$ имеем $[U'(x)](h) \leq T(h)$ при любом $h \in X_+$;
- 5) оператор T имеет положительный (o) -непрерывный обратный оператор T^{-1} .

Тогда множество решений уравнения (4), принадлежащих интервалу $[x_0, x'_0]$, не пусто и среди них есть наименьшее x^* и наибольшее x^{**} . При этом, если элементы x_n и x'_n определены рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} - T^{-1}U(x_{n-1}), \\ x'_n &= x'_{n-1} - T^{-1}U(x'_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (8)$$

то $x_n \uparrow x^*$ и $x'_n \downarrow x^{**}$.

Доказательство. Покажем, что операторы U и T удовлетворяют условиям леммы 1 на каждом интервале $[x_n, x'_n]$.

Докажем, что при любых $\bar{x}$, x и $\bar{x}'$ таких, что $x_0 \leq \bar{x} \leq x \leq \bar{x}' \leq x'_0$, справедливо неравенство, аналогичное (5):

$$U(\bar{x}') + T(x - \bar{x}') \leq U(x) \leq U(\bar{x}) + T(x - \bar{x}). \quad (9)$$

Действительно, используя условие 3) и определение интеграла, получаем

$$\begin{aligned} U(x) - U(\bar{x}) &= \int_{\bar{x}}^x U'(x) dx \leq \int_{\bar{x}}^x T dx = T(x - \bar{x}), \\ U(\bar{x}') - U(x) &= \int_x^{\bar{x}'} U'(x) dx \leq \int_x^{\bar{x}'} T dx = T(\bar{x}' - x), \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (9).

Используя неравенство (9) и условие 1), по индукции убеждаемся, что при любых x_n и x'_n выполнены условия леммы 1, откуда

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq x'_n \leq \dots \leq x'_1 \leq x'_0.$$

Так как X — K -пространство, то существуют $x^* = \sup x_n$, $x^{**} = \inf x'_n$, причем $x_n \uparrow x^*$, $x'_n \downarrow x^{**}$. Переходя к (o) -пределу в формулах (8), учитывая 2) и 5), получаем $T^{-1}U(x^*) = T^{-1}U(x^{**}) = 0$, откуда

$$U(x^*) = U(x^{**}) = 0,$$

т. е. x^* и x^{**} — решения уравнения (4). Кроме того, в силу леммы 1 любое решение $\tilde{x}$ уравнения (4), содержащееся в $[x_0, x'_0]$, удовлетворяет $x_n < \tilde{x} \leq x'_n$ при всех n . Поэтому $x^* \leq \tilde{x} \leq x^{**}$. Теорема полностью доказана.

Дальнейшие результаты об обобщении Чаплыгина и приложения этого метода даны в книге Курпеля, Шувара.

МОНОГРАФИИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

- Абрамов Ю. Ш. Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
- Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.— Новосибирск: Наука, 1978.
- Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций.— М.: Гостехиздат, 1948.
- Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А. Топологические алгебры Буля.— Изд. АН УзССР, 1963.
- Акилов Г. П., Макаров Б. М., Хавин В. П. Элементарное введение в теорию интеграла.— Изд. ЛГУ, 1969.
- Ахисезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Наука, 1966.
- Багриновский К. А. Основы согласования плановых решений.— М.: Наука, 1977.
- Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ.— М.: Наука, 1980.
- Банах (Banach S.) Théorie des opérations linéaires.— Warszawa, 1932. [Укр. пер.: Курс функционального анализа.— Київ, 1948.]
- Бакельман И. Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений.— М.: Наука, 1965.
- Берг И., Лёфстрём И. Интерполяционные пространства. Введение.— М.: Мир, 1980.
- Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.
- Биркгоф Г. I. Теория структур.— М.: ИЛ, 1952.
- II. Теория решеток.— М.: Наука, 1984.
- Бирман М. Ш. и др. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1972.
- Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
- Бурбаки Н. I. Теория множеств.— М.: Мир, 1965.
- II. Общая топология. Основные структуры.— М.: Наука, 1968.
- III. Топологические векторные пространства.— М.: ИЛ, 1959.
- IV. Интегрирование. Меры, интегрирование мер.— М.: Наука, 1967.
- V. Интегрирование. Векторное интегрирование, мера Хаара, свертка и представления.— М.: Наука, 1970.
- VI. Спектральная теория.— М.: Мир, 1972.
- Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов.— М.: Наука, 1972.
- Вайникко Г. М. I. Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений.— Тарту: Изд. Тартуского гос. ун-та, 1970.
- II. Анализ дискретизационных методов.— Тарту: Изд. Тартуского гос. ун-та, 1976.
- Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1976.
- Владимиров Д. А. Булевы алгебры.— М.: Наука, 1969.
- Воробьев Ю. В. Метод моментов в прикладной математике.— М.: Физматгиз, 1958.

Вулих Б. З. I. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.— М.: Физматгиз, 1961.

II. Введение в функциональный анализ.— М.: Наука, 1967.

III. Краткий курс теории функций вещественной переменной.— М.: Наука, 1973.

IV. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.— Калинин: Изд. КГУ, 1977.

Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений.— М.: Наука, 1971.

Гельфанд И. М., Виленькин Н. Я. Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М.: Физматгиз, 1961.

Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилев Г. Е. Коммутативные нормированные кольца.— М.: Физматгиз, 1960.

Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними.

Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций.

Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.

Гильберт (Hilbert D.) Grundzüge einer allgemeine Theorie der Integralgleichungen.— Leipzig, 1912.

Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ.— М.: Наука, 1969.

Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения.— М.: Наука, 1971.

Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций.— М.: ИЛ, 1963.

Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамо-сопряженных операторов.— М.: Наука, 1965.

Данфорд Н., Шварц Дж. Т. I. Линейные операторы. Общая теория.— М.: ИЛ, 1962.

II. Линейные операторы. Спектральная теория.— М.: Мир, 1966.

III. Линейные операторы. Спектральные операторы.— М.: Мир, 1974.

Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс.— М.: Наука, 1972.

Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Приближенные методы решения экстремальных задач.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1968.

Динкуляну (Dinculeanu N.). Vector measures.— Berlin, 1966.

Дьедонне Ж. Основы современного анализа.— М.: Мир, 1964.

Дэй М. М. Линейные нормированные пространства.— М.: ИЛ, 1961.

Заанен (Zaanan A. C.). I. Linear Analysis.— Amsterdam, 1960.

II. Integration.— Amsterdam, 1967.

Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2.— М.: Мир, 1965.

Зингер (Singer I.). Bases in Banach spaces. V. I.— Berlin — New York: Springer-Verlag, 1970.

Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.— М.: Наука, 1974.

Иосида К. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1967.

Кадец М. И. Геометрия нормированных пространств.— В кн.: Матем. анализ. 1975/Итоги науки.— М.: ВИНТИ АН СССР, 1975.

Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости.— М.: Наука, 1973.

Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.— М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.— М.-Л.: Физматгиз, 1962.

Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике.— М.: Мир, 1964.

- Като Т. К. Теория возмущения линейных операторов.— М.: Мир, 1972.
- Келли Дж. Л. Общая топология.— М.: Наука, 1968.
- Кириллов А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа.— М.: Наука, 1979.
- Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика.— М.: Мир, 1969.
- Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1933.
- Коротков В. Б. Интегральные операторы.— Новосибирск: Наука, 1983.
- Красносельский М. А. I. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1956.
- II. Положительные решения операторных уравнений.— М.: Физматгиз, 1962.
- Красносельский М. А. и др. Приближенное решение операторных уравнений.— М.: Наука, 1969.
- Красносельский М. А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.— М.: Наука, 1966.
- Красносельский М. А., Рутцкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича.— М.: Физматгиз, 1958.
- Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1978.
- Крылов Н. М. Методы приближенного решения задач математической физики. Избранные труды, т. 2.— Киев: Изд. АН УССР, 1964.
- Курпел Н. С., Шувар Б. А. Двусторонние операторные неравенства и их приложения.— Киев: Наукова Думка, 1980.
- Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа.— Новосибирск: Наука, 1983.
- Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и ее приложения.— Новосибирск: Наука, 1976.
- Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики.— М.: Наука, 1973.
- Липденштраусс, Цафрири (Lindenstrauss J., Tzafriri K.). Classical Banach spaces.
- V. 1. Sequence spaces.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer Verlag, 1977.
- V. 2. Function spaces.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer Verlag, 1979.
- Люксембург, Заанен (Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.). Riesz Spaces. V. I.— Amsterdam, 1974.
- Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.
- Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия.— М.: Наука, 1973.
- Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1980.
- Михлин С. Г. I. Численная реализация вариационных методов.— М.: Наука, 1966.
- II. Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.
- Наймарк М. А. Нормированные кольца.— М.: Наука, 1968.
- Накано (Nakano N.). Modularized semi-ordered linear spaces.— Tokyo: Maruzen Co., LTD, 1950.
- Натансон И. П. I. Конструктивная теория функций.— М.: Гостехиздат, 1949.
- II. Теория функций вещественной переменной.— М.: Наука, 1974.
- Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика.— М.: Мир, 1972.
- Никольский Н. К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа.— Труды МИАН, 1974, 120.

- Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига.— М.: Наука, 1980.
- Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.
- Олевский А. М. (Olevskii A. M.) Fourier series with respect to general orthogonal systems.— Berlin — Heidelberg.— New York: Springer Verlag, 1975.
- Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений.— М.: Наука, 1965.
- Пич А. Операторные идеалы.— М.: Мир, 1982.
- Плеснер А. И. Спектральная теория линейных операторов.— М.: Наука, 1965.
- Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию.— М.: Наука, 1983.
- Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума.— М.: Наука, 1969.
- Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1977.
- Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность.— М.: Мир, 1978.
- Т. 3. Теория рассеяния.— М.: Мир, 1982.
- Т. 4. Анализ операторов.— М.: Мир, 1982.
- Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу.— М.: ИЛ, 1954.
- Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т. 1.— М.: Мир, 1982.
- Робертсон А. П., Робертсон В. Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1967.
- Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.
- Рубинов А. М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам.— Л.: Наука, 1977.
- Рубинштейн Г. Ш. Коэффициентные модели оптимизации.— Новосибирск: Наука, 1970.
- Рудин У. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1975.
- Сегё Г. Ортогональные многочлены.— М.: Физматгиз, 1962.
- Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. V.— М.: Физматгиз, 1959.
- Соболев С. Л. I. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Изд. ЛГУ, 1950.
- II. Введение в теорию кубатурных формул.— М.: Наука, 1974.
- Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений.— М.: Изд-во МГУ, 1976.
- Треногин В. А. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1980.
- Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.— М.: Мир, 1980.
- Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры.— М.: Физматгиз, 1963.
- Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке.— М.: Мир, 1968.
- Филиппов А. Ф., Рябенский В. С. Об устойчивости разностных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1956.
- Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I-III.— М.: Наука, 1966.
- Фремлин (Fremlin D. H.). Topological Riesz spaces and measure theory.— Cambridge Univ. Press, 1974.
- Хавин В. П. Пространства аналитических функций.— В кн.: Матем. анализ. 1964/Итоги науки.— М.: ВИНТИ АН СССР, 1966.
- Халмош П. Теория меры.— М.: Мир, 1953.
- Халмош, Сандер (Halmos P. R., Sunder V. S.) Bounded integral operators on L^2 spaces.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer Verlag, 1978.
- Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства.— М.: ИЛ, 1948.

- Хаусдорф Ф. Теория множеств.— М.: Гостехиздат, 1937.
- Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными.— М.: Мир, 1965.
- Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.— М.: ИЛ, 1982.
- Шварц (Schwartz L.). Théorie des distributions. T. I-II.— Paris, 1950—1951.
- Шеффер Х. I. Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1971.
- II. Banach lattices and positive operators.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer Verlag, 1974.
- Шилов Г. Е. I. Математический анализ. Специальный курс.— М.: Физматгиз, 1961.
- II. Математический анализ. Второй специальный курс.— М.: Наука, 1965.
- Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная.— М.: Наука, 1964.
- Эдвардс Р. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1969.

Иосифов . Ф. А

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Абрамович Ю. А.

1. Некоторые теоремы о нормированных структурах.— Вестник ЛГУ, 1971, № 13, с. 5—11.

Агаханов С. А., Натансон Г. И.

1. Функция Лебега сумм Фурье — Якоби.— Вестник ЛГУ, 1968, № 1, с. 11—23.

Акилов Г. М.

1. О распространении линейных операций.— ДАН СССР, 1947, 57, № 7, с. 643—646.
2. Необходимые условия распространяемости линейных операций.— ДАН СССР, 1948, 59, № 3, с. 417—418.
3. О применении одного метода решения нелинейных дифференциальных уравнений к исследованию систем дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1949, 68, № 4, с. 645.

Алсынбаев К., Имомназаров Б., Рубинштейн Г. Ш.

1. Задача перемещения массы на компакте с несимметричной метрикой.— Оптимизация, 1975, вып. 17 (34), с. 94—107.

Андо (Ando T.).

1. Linear functionals in Orlicz spaces.— Nieuw Arch. Wiskunde, 1960, 8, № 1, p. 4—16.

Ароншайн, Смит (Aronszajn N., Smith K.)

1. Invariant subspaces of completely continuous operators.— Ann. Math., 1954, 60, p. 345—350. [Русск. пер.: Сб. переводов «Математика», 1958, 2, № 1, с. 97—102.]

Бакушинский А. Б.

1. Реализующий алгоритм на основе метода Пьютона — Канторовича для решения вариационных неравенств.— ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 6, с. 1397—1404.

Балуев А. Н.

1. О методе С. А. Чаплыгина.— Вестник ЛГУ, 1956, № 13, с. 27—42.

Банах (Banach S.)

1. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales.— Fund. Math., 1922, 3, p. 133—181.
2. Sur les fonctionelles linéaires II.— Studia Math., 1929, 1, p. 223—240.

Банах, Штейнгауз (Banach S., Steinhaus H.)

1. Sur le principe de la condensation le singularités. Fund. Math., 1927, 9, p. 50—61.

Берколайко М. З., Рutiцкий Я. Б.

1. Об операторах в обобщенных гильбертовых пространствах.— Сиб. матем. ж., 1971, 12, № 5, с. 1015—1025.

Берман Д. Л.

1. Об одном классе линейных операций.— ДАН СССР, 1952, 85, № 1, с. 13—16.

Бирман М. Ш.

1. Некоторые оценки для метода наискорейшего спуска.— УМН, 1950, 5, № 3, с. 152—155.
2. О вычислении собственных чисел методом наискорейшего спуска.— Зап. Ленинград. горного ин-та, 1952, 27, № 1, с. 209—216.

Бирман М. Ш., Соломяк М. З.

1. Оценки сингулярных чисел интегральных операторов.— УМН, 1977, 32, № 1, с. 17—84.

Брауэр (Brouwer L. E. F.)

1. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten.— Math. Ann, 1911, 71, p. 97—115.

Буренков В. И.

1. Интегральное представление Соболева и формула Тейлора.— Труды МИАН, 1974, 131.

Бухвалов А. В.

1. Об интегральном представлении линейных операторов.— Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1974, 47, с. 5—14.
2. Интегральные операторы и представление вполне линейных функционалов на пространствах со смешанной нормой.— Сиб. матем. ж., 1975, 16, № 3, с. 483—493.
3. Приложения методов теории порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах L_p .— 1983, УМН, 38, № 6, с. 37—83.

Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А.

1. Нормированные решетки.— Итоги науки и техники. ВИНТИ. Математический анализ, 1980, 18, с. 125—184.

Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я.

1. Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории.— 1979, УМН, 34, № 2, с. 137—183.

Бухвалов А. В., Лозановский Г. Я.

1. О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций.— Труды Московского матем. об-ва, 1976, 34, с. 128—149.

Векслер А. И.

1. О локальности функциональных векторных структур.— Сиб. матем. ж., 1971, 12, № 1, с. 54—64.

Вертгейм Б. А.

1. Об условиях применения метода Пьютона.— ДАН СССР, 1956, 110, № 5, с. 719—722.
2. О некоторых методах приближенного решения нелинейных операторных уравнений в пространствах Банаха.— УМН, 1957, 12, № 1, с. 166—169.
3. О приближенном построении некоторых конформных отображений. ДАН СССР, 1958, 119, № 1, с. 12—14.

Вершик А. М.

1. Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования.— УМН, 1970, 25, № 5, с. 117—124.
2. О работах Д. Орнштейна, условиях слабой зависимости и классах стационарных мер.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, 21, № 3.

Владимиров В. С.

1. Математические задачи однопоскоростной теории переноса частиц.— М.: Наука, 1961.

Гавурип М. К.

1. Über die Stiltjessche Integration abstrakten Funktionen.— Fund. Math., 1936, 27, p. 254—268.
2. Аналитические методы исследования функциональных преобразований.— Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., 1950, 19, с. 59—154.
3. Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора.— ДАН СССР, 1954, 96, № 6, с. 1093—1095.
4. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов.— Известия вузов, Матем., 1958, № 5, с. 18—31.

Гато (Gateaux R.)

1. Sur les fonctionelles continues et les fonctionelles analytiques.— C. R. Acad. Sci., 1913, 157, p. 325—327.

- Гельфанд И. М.
1. Abstrakte Functionen und lineare Operatoren.— *Mat. сб.*, 1938, 4 (46), с. 235—286.
- Гильдебрандт (Hildebrandt T. H.)
1. Über vollstetige lineare Transformationen.— *Acta Math.*, 1928, 51, p. 311—318.
- Гончаров В. Л.
1. Теория интерполирования и приближения функций.— Изд. 2-е.— М.-Л.: Гостехиздат, 1954.
- Грибанов Ю. И.
1. Об измеримости одной функции.— *Известия вузов. Матем.*, 1970, № 3, с. 22—26.
2. Об измеримости ядер интегральных операторов.— *Известия вузов. Матем.* 1972, № 7, с. 31—34.
- Гротендик (Grothendieck A.)
1. Sur les applications linéaires faiblement compact d'espaces du type $C(K)$.— *Canad. J. Math.*, 1953, 5, p. 129—173.
2. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.— *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1955, 16.
- Гюнтер Н. М.
1. Теория потенциалов.— М.-Л.: Гостехиздат, 1952.
- Данфорд, Петтис (Dunford N., Pettis B. J.)
1. Linear operators on summable functions.— *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1940, 47, № 3, p. 323—392.
- Даугавет И. К.
1. Применение общей теории приближенных методов к исследованию сходности метода Галеркина для некоторых граничных задач математической физики.— *ДАН СССР*, 1954, 98, № 6.
2. О методе моментов для обыкновенного дифференциального уравнения.— *Сиб. матем. ж.*, 1965, 6, № 1, с. 70—85.
- Демьянов, Рубинов (Demjanov V. F., Rubinov A. M.)
1. On quasidifferentiable mappings.— *Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Optimization*, 1983, 14, № 1, p. 3—21.
- Джеймс (James R.)
1. A non-reflexive Banach spaces isometric with its second conjugate spaces.— *Proc. Nat. Acad. U. S. A.*, 1951, 37, № 3, p. 174—177.
- Джонсон и др. (Johnson W. B., Maurey B., Schechtman G., Tzafriri L.)
1. Symmetric structures in Banach spaces.— *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1979, 19, № 217.
- Диестель (Diestel J.)
1. Geometry of Banach Spaces Selected topics.— *Lecture Notes in Math.*, 1975, 485.
- Диестель, Уль (Diestel J., Uhl J.)
1. *SR, Vector Measures*, 1977, Providence Amer. Math. Soc.
- Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.
1. Задачи на экстремум при наличии ограничений.— *ЖВМ и МФ*, 1965, 5, № 3, с. 395—453.
2. Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенств. *ЖВМ и МФ*, 1968, 8, № 4, с. 725—779.
- Ермольев Ю. М., Шор Н. З.
1. О минимизации педифференцируемых функций.— *Кибернетика*, 1967, 1, с. 101, 102.
- Ехлаков Н. И.
1. Существование оптимальных перевозок меры Лебега с плотностями.— *Оптимизация*, 1974, вып. 15 (32), с. 90—114.
- Вабрейко П. П.
1. Идеальные пространства функций.— *Вестник Яросл. ун-та*, 1974, вып. 8, с. 12—52.

Золотарев В. М.

1. Вероятностные метрики.— Теория вероятностей и ее применения, 1983, 28, № 2, с. 263—287.
2. Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений.— Мат. сб., 1976, 101 (143), № 3 (11), с. 416—454.

Каазик Ю. Я., Тамм Э. Э.

1. Об одном методе приближенного решения функциональных уравнений.— ДАН СССР, 1955, 101, № 6, с. 981—984.

Кадец М. И., Митягин Б. С.

1. Дополняемые подпространства в банаховых пространствах.— УМН, 1973, 28, № 6, с. 77—94.

Какутани (Kakutani S.)

1. Some characterizations of Euclidean space.— Jap. Journ. Math., 1939, 16, № 2, p. 93—98.
2. A generalization of Brouwer's fixed point theorem.— Duke Math. J., 1941, 8, № 3.

Каладия А. И.

1. Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости.— Матем. сб., 1957, 42.

Канторович Л. В.

1. Об одном новом методе приближенного решения уравнений в частных производных.— ДАН СССР, 1934, 2, № 8—9, с. 532—536.
- 1а. О конформном отображении.— Матем. сб., 1933, 40, № 3, с. 294—325.
2. О полупорядоченных линейных пространствах и их применения в теории линейных операций.— ДАН СССР, 1935, 4, с. 11—14.
3. Линейные полупорядоченные пространства.— Матем. сб. 1937, 2 (44), с. 121—168.
4. О функциональных уравнениях.— Уч. зап. ЛГУ, 1937, 3 (17), с. 24—50.
- 4а. Линейные операции в полупорядоченных пространствах.— Матем. сб., 1940, 7, с. 209—284.
5. Математические методы организации и планирования производства.— Л.: Изд. ЛГУ, 1939.
- 5а. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем.— ДАН СССР, 28, № 5, с. 212—215.
6. О перемещении масс.— ДАН СССР, 1942, 37, № 7—8, с. 227—229.
7. Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала.— ДАН СССР, 1945, 48, № 7, с. 483—487.
8. Об одной проблеме Монжа.— УМН, 1948, 3, № 2, с. 225—226.
9. Функциональный анализ и прикладная математика.— УМН, 1948, 3, № 6, с. 89—185.
10. Принцип мажорант и метод Ньютона.— ДАН СССР, 1951, 76, с. 17—20.
11. Об интегральных операторах.— УМН, 1956, 11, № 2, с. 3—29.
12. Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона.— Вестник Ленингр. ун-та, 1957, № 7, с. 68—103.

Канторович Л. В., Акилов Г. П., Рубинштейн Г. Ш.

1. Экстремальные состояния и экстремальные управления.— Вестник ЛГУ, 1967, № 7, с. 30—37.

Канторович Л. В., Вулих Б. З.

1. Sur la representation des opérations linéaires.— Comp. Math., 1937, 5, p. 119—165.

Канторович Л. В., Гавурин М. К.

1. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков.— В кн.: Проблемы повышения эффективности работы транспорта.— Изд. АН СССР, 1949, с. 110—138.

Канторович Л. В., Макаров В. Л.

1. Математические модели ценообразования.— УФН, 1981, 5, с. 203—204.

Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш.

1. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах.— ДАН СССР, 1957, 115, № 6, с. 1058—1061.

2. Об одном пространстве вполне аддитивных функций.— Вестник ЛГУ, 1958, № 7, с. 52—59.
- Карпиловская Э. Б.**
1. О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений.— УМН, 1953, 8, № 3, с. 111—118.
 2. О сходимости метода подобласти для обыкновенных интегродифференциальных уравнений.— Сиб. матем. ж., 1963, 4, № 3, с. 632—640.
- Карри (Curry H. V.)**
1. The method of steepest descent for nonlinear minimization problem.— Quart. Appl. Math., 1944, 2, № 3, p. 268—271.
- Колдыш М. В.**
1. О методе Б. Г. Галёркина для решения краевых задач.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1942, 6, с. 309—330.
- Келли (Kelley J.)**
1. Banach spaces with the extension property.— Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, № 2, p. 323—326.
- Киш (Kis O.)**
1. О сходимости метода совпадения.— Acta Math., Acad. Sci. Hung., 1960, 17, № 3—4.
- Колмогоров А. И.**
1. Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes.— Studia Math., 1934, 5, p. 29—33.
- Коротков В. Б.**
1. Интегральные операторы с ядрами, удовлетворяющими условиям Карлемана и Ахиезера. I.— Сиб. мат. ж., 1971, 12, № 5, с. 1041—1055.
 2. Интегральные представления линейных операторов.— Сиб. мат. ж., 1974, 15, № 3, с. 529—545.
- Кошелев А. И.**
1. Метод Ньютона и обобщенные решения нелинейных уравнений эллиптического типа.— ДАН СССР, 1953, 91, № 6, с. 1263—1266.
 2. Существование обобщенного решения упруго-пластической задачи кручения.— ДАН СССР, 1954, 99, № 3, с. 357—360.
- Крайер, Демпстер (Cryer C. W., Dempster M. A. H.)**
1. Equivalence of linear complementary problems and linear programs in vector lattice Hilbert spaces.— SIAM. J. Control and optimization, 1980, 18, № 1, p. 76—90
- Красносельский М. А.**
1. Некоторые задачи нелинейного анализа.— УМН, 1954, 9, № 3, с. 57—114.
 2. О нескольких новых принципах неподвижной точки.— ДАН СССР, 1973, 208, № 6, с. 1280—1284.
 3. О квазилинейных операторных уравнениях.— ДАН СССР, 1974, 214, № 4, с. 761—764.
- Красносельский М. А., Крейн С. Г.**
1. Итерационный процесс с минимальными псевдоточками.— Матем. сб., 1952, 31, с. 315—334.
- Красносельский М. А., Чечик В. А.**
1. Об одной теореме Л. В. Канторовича. Тр. семинара по функц. анализу, вып. 8—4.— Ростовск. п/д. ун-т, ВГУ, 1960, с. 50—53.
- Крейн С. Г., Петунин Ю. И.**
1. Скалы банаховых пространств.— УМН, 1966, 21, № 2, с. 89—168.
- Крейн М. Г., Рутман М. А.**
1. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха.— УМН, 1948, 3, № 4, с. 3—95.
- Куперт Ф.**
1. Метрика Канторовича — Рубинштейна и сходимость самосопряженных операторов. I, II.— Вестник ЛГУ, 1965, № 13, с. 35—50; 1966, № 13, с. 30—39.

Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.

1. Локальный выпуклый анализ.— В кн.: Современные проблемы математики, т. 19 (Итоги науки и техники, ВИНТИ АН СССР), с. 155—206.

Левин В. Л.

1. К задаче о перемещении массы.— ДАН СССР, 1975, 224, № 5, с. 1016—1019.
2. Экстремальные задачи с выпуклыми функционалами, полунепрерывными снизу относительно сходимости по мере.— ДАН СССР, 1975, 224, № 6, с. 1256—1259.
3. О теоремах двойственности для задачи Монжа — Канторовича.— УМН, 1977, 32.
4. Задача Монжа — Канторовича о перемещении масс.— В кн.: Методы функционального анализа в математической экономике.— М.: Наука, 1977.

Левин В. Л., Милютин А. А.

1. Задача о перемещении масс с разрывной функцией стоимости и массовая постановка проблемы двойственности выпуклых экстремальных задач.— УМН, 1979, 34, № 3, с. 3—68.

Левин А. Ю., Стрыгин В. В.

1. О скорости сходимости метода Ньютона — Канторовича.— УМН, 1962, 17, № 3, с. 185—187.

Леро Ж., Шаудер Ю.

1. Топология и функциональные уравнения.— УМН, 1946, 1, № 3—4, с. 74—95.

Лозановский Г. Я.

1. Об изоморфных банаховых структурах.— Сиб. мат. ж., 1969, 10, № 1, с. 93—98.
2. О некоторых банаховых структурах.— Сиб. мат. ж., 1969, 10, № 3, с. 584—599.
3. О локализованных функционалах в векторных структурах.— Теория функций, функц. ап. и их прилож., 1974, вып. 19, с. 66—80.

Лозинский С. М.

1. Пространства $\tilde{C}_0$ и $\tilde{C}_0^*$ и сходимость интерполяционных процессов в них.— ДАН СССР, 1948, 59, № 8, с. 1389—1392.
2. Обратные функции, неявные функции и решения уравнений.— Вестник ЛГУ, 1957, № 7, с. 131—142.

Ломоносов В. И.

1. Об инвариантных подпространствах семейства операторов, коммутирующих с вполне непрерывным, функц. анализ и его прил.— 1973, 7, № 3, с. 55—56.

Любич Ю. И., Майстровский Г. Д.

1. Общая теория релаксационных процессов для выпуклых функционалов.— УМН, 1970, 25, № 1, с. 57—112.

Люксембург (Luxemburg W. A. J.)

1. Notes on Banach Function Spaces.— Proc. Acad. Sci. Amsterdam, 1965, A 68, p. 229—248, 415—446, 646—667.

Люксембург, Заанен (Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.)

1. Notes on Banach Function Spaces.— Proc. Acad. Sci. Amsterdam, 1963, A 66, p. 135—153, 239—263, 496—504, 655—681; 1964, A 67, p. 104—119, 360—376, 493—543.

Макаров В. Л.

1. Экономическое равновесие: существование и экстремальное свойство.— В кн.: Современные проблемы математики, т. 19 (Итоги науки и техники, ВИНТИ АН СССР), с. 23—58.

Мильман Д. А.

1. О приближенном построении конформного отображения двусвязных невязданных областей.— Докл. ВИНТИ, № 7, с. 6—75.

Мысовских И. П.

1. О сходимости метода Л. В. Канторовича решения функциональных уравнений и его применения.— ДАН СССР, 1950, 70, № 4, с. 565—568.
2. О граничной задаче для уравнения $\Delta u = k(x, y)u^2$.— ДАН СССР, 1954, 94, № 6, с. 995—998.

Натансон И. П.

1. Некоторые нелокальные теоремы о сингулярных интегралах.— ДАН СССР, 1938, 19, № 5, с. 357—360.

Нахбин (Nachbin L.)

1. A theorem of the Hahn—Banach type for linear transformations.— Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, № 1, p. 28—46.

Нейман (Newman J. von)

1. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.— Math. Ann. 1929, 102, p. 49—131.

Нейман Дж. фон (Neumann J. von)

2. Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators.— Actualités Sci. et Ind., 1935, № 229.

Николаев В. Ф.

1. К вопросу о приближении непрерывных функций полиномами.— ДАН СССР, 1948, 61, № 2, с. 201—204.

Николаева Г. А.

1. О приближенном построении конформного преобразования методом сопряженных тригонометрических рядов.— ДАН СССР, 1956, 110, с. 180—183.
2. О приближенном построении конформного преобразования методом сопряженных тригонометрических рядов.— Тр. МИАН, 1959, 53, с. 236—266.

Никольский С. М.

1. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах.— Изв. АН СССР, сер. матем. 1943, 7, № 3, с. 147—163.

Пелчинский А., Фигель Т.

1. О методе Энфлю построения банаховых пространств без свойства аппроксимации.— УМН, 1973, 28, № 6, с. 95—108.

Пинскер А. Г.

1. Линейная оптимизация в упорядоченных пространствах.— ДАН СССР, 1978, 242, № 5, с. 1012—1015.
2. Общая задача линейного программирования в упорядоченных пространствах.— УМН, 1979, 34, № 5, с. 219—220.

Поляк Б. Т.

1. Градиентные методы решения уравнений и неравенств.— ЖВМ и МФ, 1964, 4, № 6, с. 995—1005.
2. Один общий метод решения экстремальных задач.— ДАН СССР, 1967, 174, № 1, с. 33—36.

Пугачев Б. П.

1. О сходимости методов, локально близких к методу Ньютона — Канторовича/Тр. семинара по функц. анализу, вып. 7.— Воронеж: изд-во ВГУ, 1963, с. 130—136.

Рачев С. Т.

1. Об одном классе функционалов в пространстве вероятностных мер.— Теория вероятн. и ее примен., 1984, 29, № 1, с. 41—48.

Рвачев М. А.

1. К задаче о перемещении массы.— Оптимизация, 1974, вып. 9 (26), с. 203—208.

Реллих (Rellich F.)

1. Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen.— Math. Ann, 1934, 110, p. 342—356.

Решетняк Ю. Г.

1. Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций.— Сиб. матем. ж., 1971, 12, № 2.

Риделл (Ridell R. C.)

1. Equivalence nonlinear complementary problems and least element problems in Banach lattices.— *Mah. of operations research* 1981, 6, № 3, p. 462—474.

Рисс Ф. (Riesz F.)

1. Sur les opérations fonctionnelles lineaires.— *C. A. Acad. Sci.*, 1909, 149, p. 974—977.
2. Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen.— *Meth. Ann.*, 1910, 69, p. 449—497.
3. Lecons sur les systèmes d'equations linéaires à une infinite d'inconnues.— *Paris*, 1913.
4. Sur la décomposition des opérations fonctionnelles.— *Atti Congresso Bologna*, 1928, 3, p. 143—148.
5. Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires.— *Ann. of Math.*, 1940, 41, p. 174—206. [Русск. пер.: УМН, 1946, 1, № 2, с. 147—178.]

Рубинов А. М.

1. Сублинейные операторы и их применение.— *УМН*, 1977, 32, № 4, с. 113—174.

Рубинштейн Г. Ш.

1. Несколько примеров двойственных экстремальных задач.— В кн.: Математическое программирование.— М.: Наука, 1966.
2. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа.— *УМН*, 1970, 25, № 5 (155).
3. О перемешиваниях массы на компакте.— *ДАН СССР*, 1975, 223, № 3, с. 572—575.

Самокиш Б. А.

1. Исследование быстроты сходимости метода наискорейшего спуска.— *УМН*, 1957, 12, № 1, с. 238—240.
2. Метод наискорейшего спуска в задаче о собственных значениях полуограниченных операторов.— *Изв. вузов, Матем.*, 1958, № 5, с. 105—114.

Седаев А. А.

1. Об одной задаче Г. Я. Лозановского/Труды НИИМ ВГУ, вып. 14.— Воронеж: 1974, с. 63—67.

Семенов Е. М.

1. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций.— *ДАН СССР*, 1964, 156, № 6, с. 1292—1295.

Сирвинт Ю. Ф.

1. Выпуклые множества и линейные функционалы в абстрактных пространствах.— *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1942, 6, с. 143—170, 189—211, 189—211.
2. Weak compactness in Banach Spaces.— *Studia Math.*, 1949, № 11, p. 71—94.

Смолицкий Х. Л.

1. О суммируемости потенциалов.— *УМН*, 1957, 12, № 4, с. 349—356.

Степанов В. В.

1. Курс дифференциальных уравнений.— Изд. 8-е.— М.: Физматгиз, 1959.

Судаков В. Н.

1. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.— *Труды МИАН*, 1976, 141.

Тибо (Thibault L.)

1. On generalized differentials and subdifferentials of Lipschitz vector valued functions.— *Nonlinear analysis, theory, methods, applications*, 1982, 6, № 10, p. 1037—1053.

Троицкая Е. А.

1. О собственных числах и собственных векторах вполне непрерывных операторов.— *Изв. вузов, Матем.*, 1961, № 3, с. 148—156.
2. Некоторые применения общей теории приближенных методов к задаче о собственных элементах нелинейных операторов.— *Сиб. мат. ж.*, 1961, 2, № 3, с. 454—466.

Тулайков А. Н.

1. Zur Kompaktheit im Raum L_p für $p = 1$.— Nach. Ges. Wiss. Göttingen, 1933, 1, № 39, p. 167—170.

Фернике (Fernique X.)

1. Sur le théorème de Kantorovich — Rubinstein dans les espaces polonais.— Lect. Notes Math., 1981, B850, № 5, p. 6—10.

Филлипс (Phillips R. S.)

1. On weakly compact subsets of a Banach space.— Amer. J. Math., 1943, 65, p. 108—136.

Фрейденталь (Freudenthal H.)

1. Teilweise geordnete Moduln.— Proc. Acad. Sci. Amsterdam, 1936, 39, p. 641—651.

Фреше (Fréchet M.)

1. Sur quelques points du calcul fonctionnel.— Rend. Math. di Palermo, 1906, 22, p. 1—74.
2. Sur les ensembles des fonctions et les opérations lineaires.— C. R. Acad. Sci., 1907, 144, p. 1414—1416.
3. Sur les fonctionnelles continues.— Ann. Ec. Norm., 1910, 27, № 3, p. 193—216.

Фридман В. М.

1. О сходимости методов типа наискорейшего спуска.— УМН, 1962, 17, № 3, p. 201—204.

Харрик И. Ю.

1. Об одном аналоге неравенства Маркова.— ДАН СССР, 1956, 106, № 2, с. 203—206.
2. О приближении функций, обращающихся на границе области в нуль вместе с частными производными, функциями особого вида.— Сиб. матем. ж., 1963, 4, № 2, с. 408—425.

Хеллинггер, Тёплиц (Hellinger E., Toeplitz O.)

1. Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen.— Math. Ann., 1910, 69, p. 289—330.
2. Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.— Enciclopedia der matematiche Wissenschaften, 1927, Bd II, C 13, p. 1335—1616.

Шаудер (Schauder J.)

1. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen.— Math. Zetschr., 1927, 26, № 1, p. 47—65.
2. Über lineare vollstetige Operatoren.— Studia Math., 1930, 2, p. 183—196.
3. Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.— Math. Ann., 1932, 106, p. 611—721.
4. Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen.— Fund. Math., 1935, 24, p. 213—246.

Штейнгауз (Steinhaus H.)

1. Additive und stetige Funktionaloperationen.— Math. Zeitschr., 1919, 5, p. 186—221.

Шульга (Szulga)

1. On minimal metrics in the space of random variables.— Теория вероятностей и ее приложения, 1982, XXVII, № 2, с. 401—405.

Эльстер, Неезе (Elster K.-H., Heese R.)

1. Necessary and sufficient conditions for the ordercompleteness of partially ordered vector Spaces.— Math. Nach., 1978, 81, p. 301—311.

Энфло (Enflo P.)

1. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces.— Acta Math., 1973, 130, № 3—4, p. 309—317. [Русск. пер.: Математика, 1974, 8, № 1.]

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абстрактная норма оператора 410, 727
 Алгебра (множеств) 50
 Алгебраическая прямая сумма 74
 Алгебраический базис 73
 Алгебраическое сопряженное пространство 78
 Альтернатива Фредгольма 481, 506
 Аннулятор 113
 Антиградиент 595
 Аппроксимации свойство 520
 Асимптотическая устойчивость 675
 Атом в пространстве с мерой 58

Базис алгебраический 73
 — окрестностей 18
 — ортонормальный (ортонормированный) 171
 — топологии 18, 20
 — B -пространства 521
 Банахова решетка (БР) 377
 Банахово пространство (B -пространство) 122
 — идеальное пространство (БИП) 136
 — фундаментальное пространство (БФП) 136
 — K -пространство 377
 Биекция 14
 Билинейный оператор 655
 Биортогональная система 111
 Биопира 113
 Борелевская σ -алгебра 61

Вариация отрицательная 52
 — полная 52, 105
 — положительная 52
 Векторная подрешетка 360
 — решетка (БР) 359
 — архимедова 361
 — комплексная 379
 — ограниченных элементов 361
 — счетного типа 362
 — (τ) -полная 363
 Векторное пространство 70
 — вещественное 70
 — комплексное 70
 — конечномерное 73
 Вещественное ядро пространства 482
 Вложение каноническое (естественное) 113, 236, 369
 Внутренность множества 21
 Вторая производная оператора 655
 — — слабая 661
 Выпуклое множество 79
 — тело 107
 Вычет 42, 497

Гильбертово пространство 180
 Гиперплоскость 77
 — вещественная 78
 Гиперподпространство 77
 Гомеоморфизм 22

Гомеоморфные пространства 17
 Гомоморфизм нормированных пространств 129, 458
 — решеточный 363
 Градиент 595
 Граница верхняя 15
 — нижняя 15
 Границы оператора 331
 Грань верхняя 16
 — нижняя 16

Дизъюнктное дополнение 360
 Дифференциал Гато 646
 Дифференцируемый оператор 646
 — функционал 593
 Дополнение (к множеству) 15
 Дополняемое подпространство 130
 Дуальная пара 109
 Дуальное ИП 245

Единица левая 200
 — правая 200
 — сильная 361
 — слабая 360

Задача перемещения массы 297
 Замкнутое множество 20
 Замкнутый оператор 462
 Звездная область 437

Игра 640
 Идеал 360
 — главный (μ -идеал) 360
 Идеальное пространство (ИП) 135
 Изометрия 32
 — линейная 121
 Изоморфизм векторных пространств 72, 75
 — нормированных пространств 122
 — порядковый (решеточный) 363
 — ТВП 92
 Инвариантное подпространство оператора 517
 Инволюция 482
 Индуцированная топология 18
 Интеграл (Радона) 54, 56
 — Стильеса 259
 Интегральное представление самосопряженного оператора 351
 — уравнение Вольтерра 515
 Интегральный оператор 399
 Интервал 79
 — порядковый 360
 Интерполяционный метод 553
 — полином Лагранжа 269
 Инфимум 16

Квадратурная формула интерполяционная 270
 — — типа Гаусса 270

- Квазиполное ТВП 96
 Кольцо 201
 Компакт 27
 — гиперстоун 373
 — анстремально несвязный 364
 Компактный оператор 340
 Комплексификация 483
 Комплексное расширение оператора 484
 Конечномерный оператор 498
 Конус 437
 Корень, квадратный из оператора 224
 Корневое подпространство 488
 Коэффициент Фурье 169
 Кратность характеристического значения 487

 Лемма о почти перпендикуляре 127
 Линейная комбинация 73
 Линейно независимая система 73
 Линейное множество 72
 Локально выпуклое пространство (ЛВП) 100

 Мажорантное уравнение 681, 729
 Максимальное расширение (К-пространства) 365
 Мера 51
 — дискретная 58
 — конечная 51
 — локально конечная 51
 — непрерывная 58
 — нормальная 373
 — полная 51
 — регулярная 62
 — сепарабельная 66
 — строго положительная 373
 Метод Галеркина 533, 559
 — замены ядра на близкое 552
 — коллокации 553
 — моментов 550, 558
 — наискорейшего спуска 574, 578
 — Ньютона 680, 729
 — последовательных приближений 208
 — редукции 540
 — совпадения 553
 — Чаплыгина 729
 Метризуемое топологическое пространство 31
 — векторное пространство 93
 Метрика 30
 — индуцированная 31
 — Канторовича — Рубинштейна 300
 Метрическое пространство 30
 Минимизирующая последовательность 455
 Модель Эрроу — Дебре 642
 Модуль непрерывности 49
 Множества дизъюнктивные 15
 — одинаковой ширины 360
 — ортогональные 162
 — отделяемые 106
 — равные 13
 — строго отделяемые 106
 — (μ)-дизъюнктивные 57
 Множество 13
 — абсолютно выпуклое 79
 — борелевское 61
 — вполне ограниченное 94
 — всюду плотное 21
 — второй категории 21
 — выпуклое 79
 — замкнутое 18, 24
 — измеримое 52
 — компактное 27
 — конечномерное 619
 — Лебега 53, 598
 —, направленное по возрастанию 18

 Множество нигде не плотное 21, 41
 — ограниченное (в ТВП) 94, 112, 282
 — (порядково) 15
 — сверху 15
 — снизу 15
 — открытое 17
 — относительно компактное 28
 — секвенциально компактное 29
 — счетно компактное 29
 — первой категории 21
 — плотное 21
 — поглощающее 80
 — предкомпактное 100
 — пустое 13
 — равномерно непрерывное 115
 — секвенциально компактное 29
 — совершенно упорядоченное 16
 — солидное 360
 — счетно компактное 29
 — тотальное 109
 — упорядоченное 15
 — уравнивающее 79
 — фундаментальное 114
 Модулярная мажоранта 728

 Направление 16
 — Коши 96
 — сходящееся 22
 —, — в себе 96
 — фундаментальное 96
 —, часто встречающиеся с множеством 25
 Несообщенное значение 487
 Неподвижная точка 609, 623, 638
 Непрерывное отображение 21, 22
 Неравенство Бесселя 170
 — Гельдера 130, 131, 132
 — Коши — Буляковского 158
 — Минковского 133
 — Пуанкаре 444
 — Соболева 443, 447
 — треугольника 30
 — Юнга 147
 Норма 81, 119
 — билинейного оператора 656
 — евклидова 121
 — линейного оператора 176
 — монотонная 136
 — монотонно полная (В) 140, 382
 — порядково непрерывная (А) 139, 382
 — полунепрерывная (С) 140, 382
 Нормированная решетка (НР) 377
 Нормированное идеальное пространство (НИИ) 136
 — кольцо 201
 — пространство 119
 — фундаментальное пространство (НФИ) 136
 — К-пространство 377
 Нормируемое ТВП 120
 Носитель множества 134
 — функции 134
 Нулевое множество 464, 465

 Обобщенно суммируемый ряд 278
 Оболочка абсолютно выпуклая 80
 — выпуклая 80
 — замкнутая абсолютно выпуклая 92
 — выпуклая 92
 — линейная 92
 — линейная 72
 — солидная 360
 Образ 14
 Объединение 14
 Окрестность 18
 Оператор 174, 191
 —, абстрактная норма 410

- Оператор аддитивный 174
 — вложения 436
 — вполне непрерывный 320
 — интегральный 399
 — — регулярный 399
 — линейный 75, 175, 220
 — непрерывный 174
 — обратный 203, 457
 — — левый 203, 457
 — — правый 203, 457
 — ограниченный 175
 — однородный 174
 — полиномиальный 273
 — положительный (в гильбертовом пространстве) 221
 — — (в ВР) непрерывный 366
 — — порядково ограниченный 367
 — — непрерывный 367
 — — σ -непрерывный 367
 — регулярный 366
 — с абстрактной нормой 410
 — самосопряженный 196
 — сжатия 609
 Операторная функция 339, 357
 Операторный полином 222, 337
 Опорный функционал 107
 Ортогонализация 165
 Ортогональная сумма 229, 231
 Ортогональное дополнение 162, 230
 Ортогональные полиномы 167
 — проекторы 227
 Отделимое пространство 23
 Отображение 14
 — взаимно однозначное 14
 — гладкое 613
 — компактное 623
 — линейное 75
 — многозначное 637
 — — замкнутое 638
 — — полунепрерывное сверху 638
 — на 14
 — непрерывное 21, 22
 — обратное 14
 Пара векторных пространств в двойственности 109
 Пересечение 14
 Перманентный метод суммирования 279
 Подмножество 13
 Поднаправление 17
 Подпространство метрического пространства 32
 — топологического векторного пространства 89
 — — пространства 18
 — B -пространства 122
 Покрытие 25
 Полиномы Бернштейна 262
 — Лагерра 168
 — Лежандра 168
 — Чебышева 168
 — Эрмита 168
 — Якоби 168
 Полная система элементов 164
 Полное метрическое пространство 35
 — ТВП 96
 Положительный оператор (в гильбертовом пространстве) 221
 Полоса 361
 — главная 362
 — существенной положительности 370
 Полуметрика 300
 Полунорма 80
 Полира 113
 Пополнение Коши 36
 — метрического пространства 37
 — нормированного пространства 123
 — ТВП 97
 Порядок 15
 Последовательность, сходящаяся в себе 35
 —, убывающая вбок к нулю 384
 — фундаментальная 35
 Почти всюду (п. в.) 57
 Предель 22
 — Банаха 87
 Приближенное уравнение 523
 Принцип сгущения особенностей 266
 Проблема моментов 259
 — — степенная 260
 Продолжение 82
 Проектор 130
 — в гильбертовом пространстве 197
 — на полосе 361
 Произведение пространств с мерой 61
 Производная Гато 646
 — обобщенная 449
 — оператора 646
 — — порядка n 655
 — отображения 613
 — Фреше 594, 646
 — функционала 573
 Прообраз 14
 Пространство Лоренца 152
 — Марцинкевича 152
 — Орлича 146
 — с мерой 51
 — со скалярным произведением 157
 — — смешанной нормой 408
 — типа Π 241
 — Харди 156
 Прямое произведение банаховых пространств 670
 — — множеств 14
 — — топологических пространств 29
 Равенство Парсеваля 170
 Разбиение единицы 352
 — множества 15
 Разложение единицы 352
 — Жордана 52
 — Лебега 60
 — Хана 52
 Размерность 73
 Разность (множеств) 15
 Ранг характеристического значения 488
 Распространение оператора 238, 240
 Расстояние 30
 — между множествами 31
 — от точки до множества 623
 Регулярное значение 343, 487
 Резольвента 492
 Резольвентное множество 487
 Рефлексивное B -пространство 236
 Решетка банахова 377
 Решеточно-нормированное пространство 727
 Ряд 123
 — Неймана 217
 — Фурье 169
 Самосопряженный оператор 196
 Свойство прямой суммы 69
 Секвенциально полное ТВП 96
 Сепарабельность 21, 39
 Сеть 16
 Сильная производная 646
 Симметрическая разность 15
 Система элементов замкнутой 170
 — — минимальная 233
 — — ортогональная (ортонормированная) 164
 — — полная 164
 Слабая вторая производная 661
 — компактность 234

Слабая проивводная 646
 — топологии 109, 234
 Слабо связенциально полное В-пространство 283
 Собственное значение (число) 329, 488
 — подпространство 329
 Собственный элемент 329, 488
 Согласованные множество и функции 404
 Сопряженное пространство 106
 — уравнение 464
 Сопряженный оператор 195, 323
 — элемент 488
 Спектр 340, 487
 Спектральная функция 344
 Спектральный радиус 496
 Средняя функция 312
 Срезка функции 54
 Стратегия 640
 — оптимальная 641
 Строго выпуклое В-пространство 594
 Субградиент 603
 Субдифференциал 603
 Супремум 16
 Сходимость в среднем 142
 — операторов 221
 — по мере 57
 Сходимость почти всюду 57

Теорема Алаоглу — Бурбаки 117
 — Амеция 379
 — Арцела — Асколи 47 ✓
 — — Банаха 461
 — Банаха — Штейнгауза 266
 — Бирмана 579
 — Брауэра 621
 — Гельфанда 318
 — Гротендика 238, 380
 — Гюнтера — Куона 567
 — Данфорда — Петтиса 416
 — Егорова 58
 — Иосиды — Хьюитта 382
 — Канутани 638
 — Канторовича — Вулиха 416
 — Колмогорова 120, 316
 — Крейна — Мильмана 108
 — Крейна — Шмульяна 238
 — Лсбега 59
 — Леви 59 ✓
 — Лозинского — Харшиладзе 275
 — Ломоносова 518
 — Лузина 62
 — Мамки — Аренса 117
 — Мысовских 697
 — Накано — Амеция — Мори 250, 388
 — о минимаксе 641
 — — неявной функции 671
 — — полноте 567
 — Огасавара 391
 — Радона — Никодима 60
 — Сеге 268
 — Соболева — Кондрашова 448
 — Стоуна — Вейерштрасса 153
 — Теплица 279
 — Тонелли 61
 — Хана — Банаха 82, 104, 231
 — Харрин 567
 — Хаусдорфа 46, 261
 — Шаудера 627
 — Шюра 292
 — Эберлейна — Шмульяна 284
 Топологическое векторное пространство (ТВВ) 88
 — пространство 17
 — — компактное 25
 — — метризуемое 31
 — — сепарабельное 21
 — — хаусдорфово (отделимое) 23

Топология 17
 — индуцированная 18
 — Мамки 117
 —, порожденная семейством полунорм 102
 — равномерной сходимости 115
 —, согласующаяся с двойственностью 109
 —, сравнение 18
 Точка внутренняя 18
 — предельная множества 20
 — — направления (последовательности) 25
 — прикосновения 20
 — стационарная 596
 — экстремальная (крайняя) 108
 Транспортная задача 294

Унитарное пространство 158
 Упорядоченное множество 15
 Уравнение замкнутости 170
 — второго рода 473
 Условие (A) 139, 382, 529
 — (A₆) 382
 — (B) 140, 382
 — (B₆) 382
 — (C) 140, 382
 — (C₆) 382
 — Δ₂ 150
 Условие Гельдера 149
 — Липшица 49, 597
 — — с показателем 49
 Усреднение по Стеклову 312
 Устойчивость 675

Фактор-пространство 75, 128
 Формула конечных приращений 649
 — механических квадратур 268
 — Ньютона — Лейбница 728
 Фредгольма альтернатива 481, 506
 Фундамент 360
 Фундаментальная система окрестностей 18
 Фундаментальное пространство (ФП) 135
 Функционал линейный (см. также Оператор) 75
 — — вещественный 76
 — — порядково непрерывный 245, 367
 — — о-непрерывный 367
 Функционал линейный сингулярный 368
 — — существенно положительный 371
 — Минковского 81
 — полунепрерывный снизу 396
 Функция измеримая 52
 — калибровочная 80
 — конечнозначная 53
 — множества абсолютно непрерывная 59
 — — аддитивная 51
 — — неотрицательная 51
 — — регулярная 62
 — — сингулярная 60
 — — счетно-аддитивная 51
 — — ограниченной вариации 155, 258
 — — однородная 80
 — — положительно однородная 80
 — — полуаддитивная 80
 — — почти равномерно непрерывная 432
 — — сингулярная 59
 — — суммируемая 54, 56
 — — существенно ограниченная 142

Характеристическая функция 15
 Характеристический элемент 336
 Характеристическое значение 336, 487, 516

Характеристическое множество 487
 Хаусдорфово пространство 23

Центрированная система множеств 25
 Цепь 16

Частная производная 670

Шар замкнутый 30
 — открытый 30

Эквивалентные базисы 20
 — нормы 122, 462
 — последовательности 36
 — функции 57

Элемент максимальный 16
 — минимальный 16
 — наибольший 16
 — наименьший 16
 — «усеченный» 541

Элементы дизъюнкты 135, 360
 — ортогональные 162

Ядро интегрального оператора 399
 — — — повторное (итерированное)

— отображения 75
 — типа потенциала 433
 — уравнения 473
 — усреднения 312

K -пополнение 362
 K -пространство 361

— банахово 377
 — нормированное 377
 — расширенное 365

K_0 -пространство 361
 KB -пространство 389

N -функция 146
 N -функция дополнительная 146

(o)-рефлексивное пространство 369
 (o)-сопряженное пространство 368

(o)-сходимость 362
 (oo)-сходимость 362

P_1 -пространство 243
 (r)-сходимость 360

ε -сеть 43
 (μ)-разбиение 57

σ -алгебра 50
 (*)-слабая топология 234

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Пространства

R^n 30	L_∞ 94	V 155
C^n 30	$L^p(T, \Sigma, \mu)$ 142	H^p 156
$C(K)$ 32	$L^p(D)$ 143	$C(D)$ 157
$C[a, b]$ 33	$L^p(a, b)$ 143	$C^{(1)}(D)$ 157
s 33	l^p 144	H 157
$C^{(1)}[a, b]$ 34	c_0 145	$ba(\Sigma, \mu)$ 252
$l^\infty(T)$ 40	c 145	$rca(K)$ 257
$Lip \alpha$ 49, 429	φ 145	$Lip^1(K)$ 304
$S(T, \Sigma, \mu)$ 63	l_n^p 146	$C_\infty(Q)$ 364
$S(a, b)$ 66	L_M^0 146	$L^p_1 p_2$ 401
$S(D)$ 67	L_M 146	$\tilde{W}_p^{(r)}$ 448
K^n 71	E_M 149	$W_p^{(l)}$ 452
$s(T)$ 93	$M(\psi)$ 152	$\tilde{W}_2^{(1)}$ 456
$C(R^1)$ 94	$\Lambda(\psi)$ 152	
$D[a, b]$ 94		

Другие обозначения

$K_\varepsilon(x_0)$	— открытый шар радиуса ε с центром в x_0 30
$B_\varepsilon(x_0)$	— замкнутый шар радиуса ε с центром в x_0 30
$[x]_n$	— срезка функции 54
p_U	— функционал Минковского множества U 81
$\text{sign } \mu$	— «знак» числа 81
d	— знак дизъюнктивности 360
$[Y]$	— проектор на полосу 361
$x_\alpha \xrightarrow{(o)} x, \quad x = (o) - \lim x_\alpha$	— (o) -сходимость 362
$x_n \xrightarrow{(o\sigma)} x, \quad x = (o\sigma) - \lim x_n$	— $(o\sigma)$ -сходимость 362
$X_n^\sim$	— пространство (o) -непрерывных функционалов 368
$ U $	— модуль оператора 399
$X[Y]$	— пространства со смешанной нормой 408
$ x $	— абстрактная норма 410, 727

УКАЗАТЕЛЬ СОКРАЩЕНИЙ

- БИП банахово идеальное пространство 136
БР банахова решетка 377
БФП банахово фундаментальное пространство 136
ВР векторная решетка 359
ИП идеальное пространство 135
ЛВП локально выпуклое пространство 100
НИП нормированное идеальное пространство 136
НР нормированная решетка 377
НФП нормированное фундаментальное пространство 136
(о) сокращение для слова «порядковый» 139
п. в. почти всюду 57
ТВП топологическое векторное пространство 88
ФП фундаментальное пространство 135